

MEM100 ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ και ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Φυλλάδιο Προβλημάτων 10

Η έλλειψη και η υπερβολή.

Άσκηση 10.1 Βρείτε την εξίσωση της έλλειψης όταν:

- α'. Είναι συμμετρική ως προς τους άξονες και περνάει από τα σημεία $(0, 40)$ και $(5, 0)$.
- β'. Είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από τα $(6, 0)$ και $(-6, 0)$ είναι 16.
- γ'. Έχει εστίες στα σημεία $(0, 4)$ και $(0, -4)$ και εκκεντρότητα $e = \frac{2}{3}$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

- β') Το άθροισμα των αποστάσεων μίας κορυφής στον μεγάλο άξονα από τις εστίες είναι $(a - c) + (a + c) = 2a$. Συνεπώς $c = 6$, $a = 8$ και $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{28}$. Άρα η εξίσωση είναι $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{28} = 1$.
- γ') $c = 4$, $e = \frac{c}{a} = \frac{2}{3}$. Άρα $a = 6$, $a^2 = 36$, $b^2 = a^2 - c^2 = 20$.

Άσκηση 10.2 Να βρείτε την κανονική εξίσωση $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ της υπερβολής όταν η εκκεντρότητα είναι $\frac{13}{2}$ και ο πραγματικός ημιάξονας a είναι 48.

Απάντηση - Υπόδειξη.

Έχουμε $e = \frac{c}{a} = \frac{13}{2}$ και $a = 48$. Τότε $b^2 = c^2 - a^2 = 165 \cdot 24^2$ και η εξίσωση της υπερβολής είναι $\frac{x^2}{48^2} - \frac{y^2}{165 \cdot 24^2} = 1$.

Άσκηση 10.3 Η ισοσκελής υπερβολή είναι η υπερβολή για την οποία $a = b$. Βρείτε την εκκεντρότητα της ισοσκελούς υπερβολής.

Απάντηση - Υπόδειξη.

$$e = \sqrt{2}.$$

Άσκηση 10.4 Σχεδιάστε ένα πρόχειρο (δηλαδή χωρίς να χρησιμοποιήσετε υποχρεωτικά χάρακα και υποδεκάμετρο) αλλά προσεκτικά σχεδιασμένο σχήμα (δηλαδή οι θέσεις των σημείων και οι κλίσεις των ευθειών να είναι σωστές στα όρια ακριβείας του σχήματος) της έλλειψης με εξίσωση

$$x^2 + 4y^2 = 4.$$

Βρείτε τις εστίες της έλλειψης και σημειώστε τις στο σχήμα.

Βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων στα σημεία της έλλειψης για τα οποία $x = 1$ και σχεδιάστε τις στο σχήμα.

Άσκηση 10.5 Για να σχεδιάσετε ένα πρόχειρο αλλά προσεκτικά σχεδιασμένο σχήμα της υπερβολής με εξίσωση

$$x^2 - 2y^2 = 4,$$

πρώτα βρείτε τις εστίες της υπερβολής και σημειώστε τις στο σχήμα.

Κατόπιν βρείτε τις εξισώσεις των ασυμπτωτων προς την υπερβολή, και σχεδιάστε τις στο σχήμα.

Τώρα σχεδιάστε τους δύο κλάδους της υπερβολής.

Βρείτε την εξίσωση των εφαπτομένων στην υπερβολή από το σημείο $(x_1, y_1) = (-1, 2)$. Κατόπιν βρείτε την εξίσωση κάθε μίας από τις δύο εφαπτόμενες από το (x_1, y_1) και σχεδιάστε τις στο σχήμα.

Το ίδιο για το σημείο $(x_2, y_2) = (1, \frac{1}{2})$. Τί παρατηρείτε;

Απάντηση - Υπόδειξη.

Θα ήθελα να παρατηρήσετε τότε οι δύο εφαπτόμενες από ένα σημείο εφάπτονται στον ίδιο κλάδο της υπερβολής και τότε σε διαφορετικούς κλάδους.

Άσκηση 10.6 Βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της έλλειψης $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ και τα σημεία επαφής, όταν οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες προς την ευθεία $x = y$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

Η εφαπτομένη στο σημείο (x_0, y_0) έχει εξίσωση $\frac{x_0 x}{4} + \frac{y_0 y}{9} = 1$. Για να είναι παράλληλη προς την $x = y$ πρέπει να ισχύει $\frac{x_0}{4} = -\frac{y_0}{9}$. Αντικαθιστώντας αυτή τη σχέση στην εξίσωση της έλλειψης βρίσκουμε $x_0 = \pm \frac{4}{\sqrt{13}}$, $y_0 = \mp \frac{9}{\sqrt{13}}$. Οι εξισώσεις των εφαπτομένων είναι $x - y = \pm \sqrt{13}$.

Άσκηση 10.7 Να βρείτε την κανονική εξίσωση $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ της έλλειψης όταν η απόσταση μεταξύ των εστιών της είναι 6 και ο μεγάλος ημιάξονας a είναι 10.

Απάντηση - Υπόδειξη.

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{81} = 1.$$

Άσκηση 10.8 Να βρείτε την κανονική εξίσωση της υπερβολής όταν η απόσταση μεταξύ των διευθετουσών είναι $\frac{32}{5}$ και η εκκεντρότητα είναι $e = \frac{5}{4}$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

Η απόσταση μεταξύ των διευθετουσών είναι $\frac{2a^2}{c} = \frac{32}{5}$ και η εκκεντρότητα είναι $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$. Συμπεραίνουμε ότι $a = 4$, $c = 5$ και $b = 3$.

Άσκηση 10.9 Να βρείτε την κανονική εξίσωση της υπερβολής όταν η γωνία μεταξύ των ασυμπτωτων είναι $\frac{\pi}{3}$ και $c = 2\sqrt{3}$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

$$\frac{b}{a} = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ και } c = 2\sqrt{3}. \text{ Συμπεραίνουμε ότι } a^2 = 9 \text{ και } b^2 = 3.$$

Άσκηση 10.10 Να βρείτε την εκκεντρότητα της έλλειψης εάν η απόσταση μεταξύ δύο κορυφών της που ανήκουν σε διαφορετικούς άξονες είναι διπλάσια της απόστασης μεταξύ των εστιών.

Απάντηση - Υπόδειξη.

Η εκκεντρότητα είναι $e = \frac{c}{a}$. Από τα δεδομένα έχουμε τη σχέση $a^2 + b^2 = 16c^2$, ενώ γνωρίζουμε ότι $b^2 = a^2 - c^2$. Άρα $2a^2 = 17c^2$ και $e = \sqrt{\frac{2}{17}}$.

Άσκηση 10.11 Να βρείτε την εκκεντρότητα της έλλειψης εάν η απόσταση μεταξύ των διευθετούσων είναι τετραπλάσια της απόστασης μεταξύ των εστιών.

Απάντηση - Υπόδειξη.

$$e = \frac{1}{2}.$$

Άσκηση 10.12 Εάν p_1 και p_2 είναι οι αποστάσεις των σημείων $(0, c)$ και $(0, -c)$ από μία εφαπτομένη της έλλειψης $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, όπου $c^2 = a^2 - b^2$, δείξτε ότι $p_1^2 + p_2^2 = 2a^2$.

Υπόδειξη: Προσέξτε ότι τα σημεία $(0, c)$ και $(0, -c)$ δεν είναι οι εστίες της έλλειψης $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

Η εφαπτομένη στην έλλειψη στο σημείο (X_1, y_1) έχει εξίσωση $\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} - 1 = 0$. Η απόσταση των σημείων $(0, \pm c)$ από την εφαπτομένη είναι

$$\frac{|1 \mp \frac{y_1 c}{b^2}|}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4}}}.$$

Αντικαθιστούμε στο άθροισμα $p_1^2 + p_2^2$, και απλοποιούμε, αξιοποιώντας τη σχέση $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$.

Άσκηση 10.13 Βρείτε τις εξισώσεις των υπερβολών που έχουν ασύμπτωτες τις ευθείες $\varepsilon_1 : 4y = x$ και $\varepsilon_2 : -4y = x$.

Υπόδειξη: Η κλίση των ασυμπτωτών δίνει το λόγο των δύο παραμέτρων a και b της υπερβολής. Μην ξεχάσετε και τις συζυγείς υπερβολές, που έχουν τις ίδιες ασύμπτωτες. Έτσι έχουμε δύο άπειρες οικογένειες υπερβολών.

Άσκηση 10.14 Δείξτε ότι το γινόμενο των αποστάσεων ενός σημείου της υπερβολής $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ από τις ασύμπτωτες είναι $\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

Ασύμπτωτες $y = \pm \frac{b}{a}x$. Απόστανσεις του $P : (x_0, y_0)$ από ασύμπτωτες είναι $\frac{|ay_0 \mp bx_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Γινόμενο $\frac{b^2 x_0^2 - a^2 y_0^2}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$.

Άσκηση 10.15 Εάν K είναι η ορθογώνια προβολή της εστίας F σε μία ασύμπτωτη της υπερβολής, δείξτε ότι $|\overrightarrow{OK}| = a$, $|\overrightarrow{FK}| = b$ και ότι το K βρίσκεται στην αντίστοιχη διευθετούσα.

Απάντηση - Υπόδειξη.

Σχεδιάστε το σχήμα! $\frac{KF}{OK} = \tan \frac{\vartheta}{2} = \frac{b}{a}$. $KF^2 + OK^2 = OF^2 = c^2$, άρα $KF = b$, $OK = a$. Εάν $K : (x_1, y_1)$, τότε $x_1^2 + y_1^2 = a^2$ και $y_1 = \frac{b}{a}x_1$, άρα $x_1 = \frac{a^2}{c}$.