

MEM100 ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ και ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Φυλλάδιο Προβλημάτων 9

Ο κύκλος. Πόλοι και πολικές ευθείες. Δύναμη σημείου ως προς κύκλο.
Δέσμες κύκλων.

Άσκηση 9.1 Αποδείξτε με χρήση αναλυτικής γεωμετρίας την ιδιότητα του κύκλου: η γωνία η εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο είναι ορθή.

Απάντηση - Υπόδειξη.

Θεωρούμε τρία σημεία A, B, C τέτοια ώστε το B βρίσκεται στον κύκλο με διάμετρο AC . Θέλουμε να δείξουμε ότι $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{2}$. Έστω K το κέντρο του κύκλου. Τότε $|\overrightarrow{KA}| = |\overrightarrow{KB}| = |\overrightarrow{KC}|$ και $\overrightarrow{KA} = -\overrightarrow{KC}$ αφού τα A, C είναι αντιδιαμετρικά. Εξετάζουμε τη γωνία ϑ μεταξύ των $\overrightarrow{BA}$ και $\overrightarrow{BC}$:

$$\cos \vartheta = \cos \angle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BC}|}.$$

Αλλά $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{KA} - \overrightarrow{KB}) \cdot (\overrightarrow{KC} - \overrightarrow{KB}) = 0$ αφού $\overrightarrow{KA} = -\overrightarrow{KC}$ και $|\overrightarrow{KA}| = |\overrightarrow{KB}|$. Άρα $\vartheta = \frac{\pi}{2}$.

Άσκηση 9.2 Βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $(1, -2)$, $(5, -4)$, $(4, -3)$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

Ο κύκλος έχει εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$. Αντικαθιστούμε τα τρία σημεία και έχουμε τρεις γραμμικές εξισώσεις για να προσδιορίσουμε τα A, B, C .

Άσκηση 9.3 Βρείτε την εφαπτομένη στο σημείο $(1, -2)$ του κύκλου που περνάει από τα σημεία $(1, -2)$, $(5, -4)$, $(4, -3)$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

Βρήκαμε την εξίσωση του κύκλου στην Άσκηση 9.2. Η εξίσωση της εφαπτομένης στον κύκλο $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ στο σημείο (x_1, y_1) είναι $(x_1-a)(x-a) + (y_1-b)(y-b) = r^2$.

Άσκηση 9.4 Βρείτε τη συνθήκη ώστε οι κύκλοι με εξισώσεις

$$x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad x^2 + y^2 + A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

να εφάπτονται εσωτερικά ή να εφάπτονται εξωτερικά.

Άσκηση 9.5 Βρείτε την πολική ευθεία του σημείου $(3, 5)$ ως προς τον κύκλο που εφάπτεται στους άξονες στα σημεία $(2, 0)$ και $(0, 2)$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

Σχεδιάστε τον κύκλο. Το κέντρο του είναι το $(2, 2)$ και η ακτίνα είναι 2. Η εξίσωση της πολικής ευθείας του σημείου $(3, 5)$ είναι $(x - 2) + 3(y - 2) = 4$.

Άσκηση 9.6 Βρείτε την εξίσωση του κύκλου με διάμετρο την κοινή χορδή των κύκλων $x^2 + y^2 - 4y = 30$ και $x^2 + y^2 + 4x = 46$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

Λύνοντας το σύστημα των δύο εξισώσεων βρίσκουμε τα σημεία τομής των δύο κύκλων, $(5, -1)$ και $(-3, 7)$. Κατόπιν υπολογίζουμε την εξίσωση του κύκλου.

Εναλλακτικά, παρατηρούμε ότι ο ζητούμενος κύκλος ανήκει στη δέσμη $\lambda(x^2 + y^2 - 4y - 30) + (1 - \lambda)(x^2 + y^2 + 4x - 46) = 0$, και έχει την ελάχιστη ακτίνα από όλους τους κύκλους αυτής της δέσμης. Συγκεντρώνουμε τους όμοιους όρους, συμπληρώνουμε τα τετράγωνα, και βρίσκουμε την ακτίνα του κύκλου με παράμετρο λ : $r^2 = 8\lambda^2 - 24\lambda + 50$. Το τριώνυμο λαμβάνει την ελάχιστη τιμή όταν $\lambda = -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2}$. Άρα ο ζητούμενος κύκλος έχει εξίσωση

$$\frac{3}{2}(x^2 + y^2 - 4y - 30) - \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + 4x - 46) = x^2 + y^2 - 2x - 6y - 22 = 0.$$

Άσκηση 9.7 Βρείτε τις εξισώσεις των κύκλων που περνούν από τα σημεία $(2, 3)$ και $(-1, 6)$ και εφάπτονται στον x -άξονα.

Απάντηση - Υπόδειξη.

Τα κέντρα (x_0, y_0) αυτών των κύκλων ικανοποιούν τις εξισώσεις $y_0^2 = (x_0 - 2)^2 + (y_0 - 3)^2$ και $y_0^2 = (x_0 + 1)^2 + (y_0 - 6)^2$.

Άσκηση 9.8 Βρείτε την ακτίνα του κύκλου που περνάει από το σημείο αναφοράς και εφάπτεται στην ευθεία $3x - y = 5$ στο σημείο $(2, 1)$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

Το κέντρο του κύκλου είναι το σημείο τομής της μεσοκαθέτου των σημείων $(0, 0)$ και $(2, 1)$ και της ευθείας που είναι κάθετος προς την $3x - y = 5$ στο σημείο $(2, 1)$.

Άσκηση 9.9 Βρείτε την εξίσωση της δέσμης κύκλων που περιέχει τον κύκλο $x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + C_1 = 0$ και έχει ριζικό άξονα $A_2x + B_2y + C_2 = 0$.

Άσκηση 9.10 Δείξτε ότι οι κύκλοι με εξίσωση $x^2 + y^2 + 2\lambda x = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ αποτελούν δέσμη κύκλων που εφάπτονται σε ένα σημείο

Άσκηση 9.11 Δείξτε ότι οι πολικές ευθείες του σημείου (x_1, y_1) ως προς τους κύκλους της δέσμης της Άσκησης 9.10 περνούν από το σημείο $(-x_1, \frac{x_1^2}{y_1})$.