

MEM100 ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ και ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Φυλλάδιο Προβλημάτων 8

Μετασχηματισμοί Möbius. Η μιγαδική εκθετική συνάρτηση.

Πριν ασχοληθείτε με τις επόμενες Ασκήσεις, βεβαιωθείτε ότι έχετε αποσαφηνίσει όλες σας τις απορίες σχετικά με τις Δραστηριότητες 3.25 έως 3.30.

Άσκηση 8.1 Δείξτε ότι η σύνθεση δύο μετασχηματισμών Möbius είναι μετασχηματισμός Möbius: Εάν $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ και $g(z) = \frac{pz+q}{rz+s}$, δείξτε ότι $f \circ g(z)$ γράφεται επίσης στη μορφή $\frac{Az+B}{Cz+D}$ για κατάλληλα A, B, C, D .

Πώς σχετίζεται ο πίνακας $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ με τους πίνακες $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$;

Άσκηση 8.2 Δίδονται οι συναρτήσεις $f(z) = iz - 4$ και $g(z) = \frac{z}{z+1}$. Γράψτε στη μορφή $\frac{az+b}{cz+d}$ με $ad - bc \neq 0$, τις συναρτήσεις

$$\begin{array}{ll} \alpha'. g(z) & \beta'. f^{-1}(z) \\ \gamma'. g^{-1}(z) & \delta'. g \circ f(z) \\ \epsilon'. f \circ g(z) & \zeta'. f \circ g \circ f^{-1}(z) \end{array}$$

Απάντηση - Υπόδειξη.

$$\beta'. f^{-1}(z) = \frac{-iz+4i}{0z+1}.$$

$$\delta'. g \circ f(z) = \frac{iz-4}{iz-3}.$$

$$\zeta'. f \circ g \circ f^{-1}(z) = \frac{(-4i-1)z-8-16i}{-iz+1+4i}.$$

Άσκηση 8.3 Περιγράψτε γεωμετρικά την εικόνα μέσω της εκθετικής συνάρτησης των υποσυνόλων του μιγαδικού επιπέδου

$$\begin{array}{ll} \alpha'. & \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 1\} \\ \beta'. & \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq 0, 2\pi/3 \leq \operatorname{Im} z \leq 5\pi/6\} \\ \gamma'. & \{z \in \mathbb{C} : 1/2 \leq \operatorname{Re} z \leq 1, \operatorname{Im} z = -9\pi/4\} \\ \delta'. & \{z \in \mathbb{C} : 1/2 \leq \operatorname{Re} z \leq 1, 3\pi/4 \leq \operatorname{Im} z \leq \pi\} \end{array}$$

Απάντηση - Υπόδειξη.

β' . Το τμήμα της 'σφήνας' μεταξύ των ημιευθειών $\{\operatorname{Arg} z = 4\pi/6\}$ και $\{\operatorname{Arg} z = 5\pi/6\}$ που βρίσκεται έξω από το μοναδιαίο κύκλο.

Άσκηση 8.4 Περιγράψτε γεωμετρικά την εικόνα των υποσυνόλων του μιγαδικού επιπέδου $F = \{z \in \mathbb{C} : z + \bar{z} = 4\}$ και $G = \{z \in \mathbb{C} : z - \bar{z} = 3\pi i\}$ από τις απεικονίσεις

$$\begin{array}{ll} \alpha'. \exp(z) = e^z & \beta'. f(z) = e^z - i \\ \gamma'. g(z) = e^{-2z} & \delta'. h(z) = e^{z+2} \end{array}$$

Απάντηση - Υπόδειξη.

$\alpha'. \exp(F)$ είναι κύκλος με κέντρο 0 και ακτίνα $e^2 \simeq 7,389$.

$\exp(G)$ είναι η αρνητική φανταστική ημιευθεία $\{ti : t < 0\}$.

$\gamma'. g(F)$ είναι κύκλος με κέντρο 0 και ακτίνα $e^{-4} \simeq 0,018$.

$g(G)$ είναι η αρνητική πραγματική ημιευθεία $\{t : t < 0\}$.

Άσκηση 8.5 Δίδονται οι συναρτήσεις $f(z) = iz$ και $g(z) = \frac{2z+1}{z+2}$. Βρείτε τα σταθερά σημεία των απεικονίσεων $f, g, f \circ g \circ f^{-1}$.

Άσκηση 8.6 Θεωρήστε την οικογένεια Απολλώνιων κύκλων $|z + 1| = \lambda|z - 1|$, για $\lambda > 0, \lambda \neq 1$. Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός Möbius $g(z) = \frac{z-i}{-iz+1}$ έχει σταθερά σημεία 1 και -1 και διατηρεί αμετάβλητο το λόγο των αποστάσεων του z από τα σημεία 1 και -1 , δηλαδή ότι

$$\left| \frac{z+1}{z-1} \right| = \left| \frac{g(z)+1}{g(z)-1} \right|.$$

Αυτό σημαίνει ότι απεικονίζει κάθε κύκλο της δέσμης $|z + 1| = \lambda|z - 1|$ στον εαυτό του.