

MEM100 ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ και ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Φυλλάδιο Προβλημάτων 7

Ευθεία και κύκλος στο μιγαδικό επίπεδο.

Πριν ασχοληθείτε με τις επόμενες Ασκήσεις, βεβαιωθείτε ότι έχετε αποσαφηνίσει όλες σας τις απορίες σχετικά με τις Δραστηριότητες 3.16 έως 3.22.

Άσκηση 7.1 Βρείτε στη μορφή $\bar{u}z + u\bar{z} + c = 0$ την εξίσωση της ευθείας που περνάει από τα σημεία $w_1 = 3 - i$ και $w_2 = -1 + i$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

Ένα διάνυσμα διεύθυνσης της ευθείας αντιστοιχεί στο μιγαδικό αριθμό $w_1 - w_2 = 4 - 2i$. Άρα ίσχυει ότι είναι πραγματικό πολλαπλάσιο του $4 - 2i$. Θέτουμε $u = 1 + 2i$ και αντικαθιστούμε $z = w_2$ στην εξίσωση $(1 - 2i)z + (1 + 2i)\bar{z} + c = 0$ για να βρούμε το c . Μία εξίσωση της ευθείας είναι

$$(1 - 2i)z + (1 + 2i)\bar{z} - 2 = 0.$$

Άσκηση 7.2 Βρείτε στη μορφή $\bar{u}z + u\bar{z} + c = 0$ την εξίσωση της ευθείας που περνάει από το σημείο $-2 - i$ και είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση $(1 - 2i)z + (1 + 2i)\bar{z} + 3 = 0$.

Άσκηση 7.3 Βρείτε το σημείο τομής των ευθειών με εξισώσεις $iz - i\bar{z} = 1$ και $(3 + i)z + (3 - i)\bar{z} = 2$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση με $3 - i$ και τη δεύτερη εξίσωση με i , και απαλείφουμε το $\bar{z}$:

$$\begin{aligned}(3 - i)iz - (3 - i)i\bar{z} &= 3 - i \\ (3 + i)iz + (3 - i)i\bar{z} &= 2i,\end{aligned}$$

άρα $6iz = 3 + i$, δηλαδή $z = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}i$.

Άσκηση 7.4 Βρείτε την εξίσωση της ευθείας που εφάπτεται στον κύκλο $|z - 2 + i| = \sqrt{5}$ στο σημείο $-2i$.

Υπόδειξη: Ο κύκλος με κέντρο c και ακτίνα r εφάπτεται στην ευθεία ε στο σημείο w όταν ευθεία ε είναι κάθετη στην ακτίνα στο w .

Απάντηση - Υπόδειξη.

Η ζητούμενη ευθεία είναι κάθετη προς την ευθεία που περνάει από το κέντρο του κύκλου $2 - i$ και το σημείο επαφής $-2i$. Άρα μπορούμε να θέσουμε $u = 2 + i$.

Άσκηση 7.5 Βρείτε την ακτίνα του κύκλου με κέντρο $c \in \mathbb{C}$, όταν ο κύκλος εφάπτεται στον πραγματικό άξονα.

Άσκηση 7.6 Δίδονται σημεία $w_1 = 1 + 2i$ και $w_2 = 5 - 2i$. Βρείτε τις τιμές λ για τις οποίες ο κύκλος K_λ της οικογένειας Απολλωνίων κύκλων με εξίσωση $|z - w_1| = \lambda|z - w_2|$ εφάπτεται στον πραγματικό άξονα.

Απάντηση - Υπόδειξη.

Ο κύκλος εφάπτεται στον πραγματικό άξονα όταν η ακτίνα του είναι ίση με το φανταστικό μέρος του κέντρου του κύκλου.

Άσκηση 7.7 Δίδονται οι οικογένειες Απολλωνίων κύκλων $K_\lambda : |z - 1 - 2i| = \lambda|z - 5 + 2i|$ και $C_\mu : |z + 1 - 4i| = \mu|z - 5 + 2i|$. Βρείτε τη σχέση μεταξύ των λ και μ όταν οι κύκλοι K_λ και C_μ εφάπτονται.

Υπόδειξη: Όταν δύο κύκλοι εφάπτονται, το σημείο επαφής βρίσκεται πάνω στην ευθεία που συνδέει τα κέντρα τους.

Άσκηση 7.8 Δείξτε ότι η απόσταση του σημείου w από την ευθεία με εξίσωση $\bar{u}z + u\bar{z} + c = 0$, $u \neq 0$, $c \in \mathbb{R}$, είναι

$$d = \frac{|\bar{u}w + u\bar{w} + c|}{2|u|}.$$