

MEM100 ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ και ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Φυλλάδιο Προβλημάτων 6

Μέτρο και τριγωνομετρική μορφή μιγαδικών αριθμών.
Ρίζες της μονάδας. Ρίζες μιγαδικών πολυωνύμων.

Πριν ασχοληθείτε με τις επόμενες Ασκήσεις, βεβαιωθείτε ότι έχετε αποσαφηνίσει όλες σας τις απορίες σχετικά με τις Δραστηριότητες 3.1 έως 3.15.

Άσκηση 6.1 Περιγράψτε γεωμετρικά τα υποσύνολα του μιγαδικού επιπέδου

$$\alpha'. \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| \leq 1\}$$

$$\beta'. \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = -\operatorname{Im} z\}$$

$$\gamma'. \{z \in \mathbb{C} : |z^2 + 2z| = 3|z|\}$$

$$\delta'. \{z \in \mathbb{C} : |z - i| > |z + 1|\}$$

$$\epsilon'. \mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$$

$$\zeta'. \{z \in \mathbb{C} : z + \bar{z} = 0\}$$

Άσκηση 6.2 α' . Αν z είναι οποιοσδήποτε μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός, δείξτε ότι $z^{-1} = \bar{z}$ εάν και μόνον εάν $|z| = 1$.

β' . Βρείτε όλους τους αριθμούς z για τους οποίους $z^2 = \bar{z}$, (υπάρχουν 4 τέτοιοι αριθμοί).

γ' . Βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς για τους οποίους ισχύει $|z^2| = -z^2$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

γ' . $|z^2| = |z|^2 = z\bar{z}$. Άρα $|z^2| = -z^2$ εάν και μόνον εάν $z = -\bar{z}$, δηλαδή εάν και μόνον εάν $\operatorname{Re} z = 0$.

Άσκηση 6.3 Γράψτε σε τριγωνομετρική μορφή τους αριθμούς

$$\alpha'. -10$$

$$\beta'. -4(\sqrt{2} - i\sqrt{2})$$

Απάντηση - Υπόδειξη.

$$\alpha'. -10 = 10(\cos(\pi) + i\sin(\pi)).$$

$$\beta'. -4(\sqrt{2} - i\sqrt{2}) = 8(\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4)).$$

Άσκηση 6.4 Υπολογίστε τους μιγαδικούς αριθμούς

$$\alpha'. (1 + i)^{2018}$$

$$\beta'. \left[3\left(\cos \frac{5\pi}{4} + i\sin \frac{5\pi}{4}\right)\right]^8$$

Άσκηση 6.5 Θεωρήστε τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου $a = 1 - i$, $b = 4 - 3i$ και $c = \frac{3}{2} - \frac{7}{2}i$. Δείξτε, χρησιμοποιώντας μιγαδικούς αριθμούς, ότι abc είναι ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο.

Άσκηση 6.6 Χρησιμοποιήστε τους μιγαδικούς αριθμούς $\sqrt{3}+i$ και $1+i$ για να υπολογίσετε τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις του $\pi/12$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

$\pi/12 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$ είναι το όρισμα του $(1+i)/(\sqrt{3}+i)$. Κάνουμε τη διαίρεση, γράφουμε το πηλίκο σε τριγωνομετρική μορφή, και έχουμε $\cos(\pi/12) = (\sqrt{3}+1)/2\sqrt{2}$ και $\sin(\pi/12) = (\sqrt{3}-1)/2\sqrt{2}$.

Άσκηση 6.7 Χρησιμοποιήστε το Τρίγωνο του Pascal για να βρείτε τους συντελεστές στο ανάπτυγμα του $(a+b)^7$.

Υπόδειξη: Για τις επόμενες δύο ασκήσεις, δείτε τις σημειώσεις, όπου υπάρχουν παρόμοια παραδείγματα.

Άσκηση 6.8 Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα De Moivre για να γράψετε τα $\cos(4\vartheta)$, $\sin(4\vartheta)$ ως πολυώνυμα στα $\cos \vartheta$, $\sin \vartheta$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

$$\begin{aligned}\cos 4\vartheta &= \cos^4 \vartheta - 6 \cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta + \sin^4 \vartheta. \\ \sin 4\vartheta &= 4 \cos^3 \vartheta \sin \vartheta - 4 \cos \vartheta \sin^3 \vartheta.\end{aligned}$$

Άσκηση 6.9 Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα De Moivre για να γράψετε το $\cos^7 \vartheta$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\cos \vartheta$, $\cos(3\vartheta)$, $\cos(5\vartheta)$, $\cos(7\vartheta)$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

$$\cos^7 \vartheta = \frac{1}{64}(\cos 7\vartheta + 7 \cos 5\vartheta + 21 \cos 3\vartheta + 35 \cos \vartheta).$$

Άσκηση 6.10 Εάν $|z| = 1$ και $z \neq -1$, βρείτε το μέτρο και το όρισμα του $\frac{1+z}{1+\bar{z}}$ και υπολογίστε το μιγαδικό αριθμό $w = \left(\frac{1+z}{1+\bar{z}}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

Το μέτρο των $1+z$ και $1+\bar{z}$ είναι ίσο, άρα το μέτρο του $\frac{1+z}{1+\bar{z}}$ είναι 1. Εάν $z = \cos \vartheta + i \sin \vartheta$, το πραγματικό μέρος του $\frac{1+z}{1+\bar{z}}$ είναι $(1+2\cos \vartheta + \cos 2\vartheta)/(2+2\cos \vartheta)$, που απλοποιείται σε $\cos \vartheta$. Παρόμοια, το φανταστικό μέρος του $\frac{1+z}{1+\bar{z}}$ απλοποιείται σε $\sin \vartheta$. Άρα τό όρισμα του z είναι ϑ .

Παρατηρούμε ότι $\frac{1+z}{1+\bar{z}} = z$, και συνεπώς $w = z^n$.

Άσκηση 6.11 Υπολογίστε και σημειώστε σε ένα σχέδιο στο μιγαδικό επίπεδο τις τρίτες ρίζες του αριθμού $-4(\sqrt{2} - i\sqrt{2})$.

Άσκηση 6.12 Υπολογίστε και σημειώστε σε ένα σχέδιο στο μιγαδικό επίπεδο τις πέμπτες ρίζες του αριθμού -32 .

Άσκηση 6.13 Εάν ο αριθμός $2+i$ είναι ρίζα του πολυωνύμου $3z^3 - 10z^2 + 7z + 10$, να

βρείτε τις άλλες ρίζες του πολυωνύμου.

Άσκηση 6.14 Δείξτε ότι οι δυνάμεις οποιασδήποτε πέμπτης ρίζας της μονάδας διαφορετικής από το 1, παράγουν και τις 5 πέμπτες ρίζες.

Δείξτε ότι αυτό δεν ισχύει για τις 6 έκτες ρίζες: βρείτε δύο έκτες ρίζες της μονάδας τέτοιες ώστε καμία δύναμη της μίας να μην είναι ίση με την άλλη.