

MEM100 ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ και ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Φυλλάδιο Προβλημάτων 5

Μετασχηματισμοί. Αλλαγή συστήματος αναφοράς.
Μιγαδικοί αριθμοί.

Πριν ασχοληθείτε με τις επόμενες Ασκήσεις, βεβαιωθείτε ότι έχετε αποσαφηνίσει όλες σας τις απορίες σχετικά με τις Δραστηριότητες 2.18 έως 2.23.

Άσκηση 5.1 Στο ευκλείδειο επίπεδο E^2 με σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$, θεωρήστε σημεία $P : (-1, 2)$, $Q : (1, 1)$ και $R : (3, 2)$, την ευθεία ε που περνάει από τα σημεία Q, R και τον κύκλο C με κέντρο στο σημείο R και ακτίνα 2.

Δίδεται ο γεωμετρικός μετασχηματισμός $\varphi : E^2 \rightarrow E^2$ που κάνει μεταφορά κατά το διάνυσμα $\vec{a} = (2, 3)$.

α'. Βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων $\varphi(Q)$ και $\varphi(R)$.

β'. Βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

γ'. Βρείτε την εξίσωση της ευθείας $\varphi(\varepsilon)$ ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

δ'. Βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνάει από τα σημεία $\varphi(Q), \varphi(R)$ ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Τι σχέση έχουν αυτές οι δύο εξισώσεις;

Δίδεται και δεύτερο σύστημα αναφοράς $(P, \vec{i}, \vec{j})$.

ε'. Βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Q και R ως προς το σύστημα αναφοράς $(P, \vec{i}, \vec{j})$.

ς'. Βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων $\varphi(Q)$ και $\varphi(R)$ ως προς το σύστημα αναφοράς $(P, \vec{i}, \vec{j})$.

ζ'. Βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε ως προς το σύστημα αναφοράς $(P, \vec{i}, \vec{j})$.

η'. Βρείτε την εξίσωση του κύκλου $\varphi(C)$ ως προς το σύστημα αναφοράς $(P, \vec{i}, \vec{j})$.

Θεωρήστε ένα τρίτο σύστημα αναφοράς $(O, \vec{m}, \vec{n})$, όπου $\vec{m} = \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$ και $\vec{n} = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$.

θ'. Βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Q και R ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{m}, \vec{n})$.

ι'. Βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων $\varphi(Q)$ και $\varphi(R)$ ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{m}, \vec{n})$.

ια'. Βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{m}, \vec{n})$.

ιβ'. Βρείτε την εξίσωση του κύκλου $\varphi(C)$ ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{m}, \vec{n})$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

α'. $\varphi(x, y) = (x, y) + (2, 3)$. Άρα $\varphi(Q) = (1, 1) + (2, 3) = (3, 4)$.

β'. $x - 2y + 1 = 0$.

γ'. $\varepsilon = \{(x, y) : x - 2y + 1 = 0\}$. Άρα $\varphi(\varepsilon) = \{(u, w) : \text{υπάρχουν } x, y \text{ τέτοια ώστε } (u, w) = \varphi(x, y) \text{ και } x - 2y + 1 = 0\}$. Εάν $(u, w) = \varphi(x, y)$, τότε $(x, y) = (u - 2, w - 3)$. Άρα (u, w) βρίσκεται στην ευθεία $\varphi(\varepsilon)$ όταν $(u - 2) - 2(w - 3) + 1 = 0$. Δηλαδή η εξίσωση της $\varphi(\varepsilon)$ είναι $u - 2w + 5 = 0$.

δ'. Οι συντεταγμένες του σημείου Q ως προς το σύστημα αναφοράς $(P, \vec{i}, \vec{j})$ είναι (v, z) τέτοια ώστε $\overrightarrow{PQ} = v\vec{i} + z\vec{j}$. Αλλά $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = -\vec{i} + 2\vec{j} - (\vec{i} + \vec{j})$. Άρα $(v, z) = (2, -1)$.

ε'. Οι συντεταγμένες του σημείου $\varphi(Q)$ ως προς το σύστημα αναφοράς $(P, \vec{i}, \vec{j})$ είναι $(3, 4) - (-1, 2) = (4, 2)$.

θ'. Οι συντεταγμένες του σημείου Q ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{m}, \vec{n})$ είναι (v, z) τέτοια ώστε $\overrightarrow{OQ} = v\vec{m} + z\vec{n}$. Αλλά $\overrightarrow{OQ} = \vec{i} + \vec{j}$. Άρα θέλουμε v, z τέτοια ώστε $v\vec{m} + z\vec{n} = \vec{i} + \vec{j}$. Γνωρίζουμε ότι $\vec{m} = \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$ και $\vec{n} = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$. Άρα τα v, z ικανοποιούν την $v(\frac{1}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}) + z(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}) = \vec{i} + \vec{j}$. Αφού τα $\vec{i}, \vec{j}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, αυτό ισχύει μόνον όταν $(\frac{1}{2}v + \frac{\sqrt{3}}{2}z, -\frac{\sqrt{3}}{2}v + \frac{1}{2}z) = (1, 1)$. Το σύστημα έχει μοναδική λύση $(v, z) = (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2})$.

Άσκηση 5.2 Εάν $z = 3 - 5i$ και $w = 3i - 2$, υπολογίστε τους ακόλουθους μιγαδικούς αριθμούς, και σημειώστε τους στο μιγαδικό επίπεδο.

α'. $z + w$	β'. $z - w$
γ'. $z + \bar{w}$	δ'. $z - \bar{z}$
ε'. zw	ς'. $z\bar{w}$
ζ'. $z\bar{z}$	η'. $\frac{1}{z}$
θ'. $\frac{1}{\bar{w}}$	ι'. $\frac{\bar{w}}{w}$
ια'. $\frac{w}{z}$	ιβ'. $\frac{w - 2z}{z\bar{w}}$

Απάντηση - Υπόδειξη.

ε'. $z\bar{w} = (3 - 5i)(-2 - 3i) = -21 + i$.

ιβ'. $\frac{w - 2z}{z\bar{w}} = \frac{-2 + 3i - 6 + 10i}{-21 + i} = \frac{(-8 + 13i)(-21 - i)}{21^2 + 1^2} = \frac{168 + 8i - 273i + 13}{442} = \frac{181 - 265i}{442}$.

Άσκηση 5.3 Εάν $z = x + yi$ και $w = u + vi$, εκφράστε το πραγματικό μέρος, το φανταστικό μέρος και το μέτρο των ακόλουθων μιγαδικών παραστάσεων συναρτήσει των x, y, u, v .

α'. $z + 3i$	β'. $z + \bar{w}$
γ'. $\frac{z - 2i}{wi}$	δ'. $\frac{z(2 - i)}{w + i}$
ε'. $\frac{1}{z}$	ς'. $\frac{z}{\bar{w}}$

Απάντηση - Υπόδειξη.

γ'. $\frac{z - 2i}{wi} = \frac{x + yi - 2i}{ui - v} = \frac{(x + (y - 2)i)(-v - ui)}{u^2 + v^2} = \frac{-xv + uy - 2u}{u^2 + v^2} - \frac{xu + yv - 2v}{u^2 + v^2}i$.

$$\begin{aligned} \text{Άρα } \operatorname{Re} \frac{z-2i}{wi} &= \frac{-xv+uy-2u}{u^2+v^2}, \operatorname{Im} \frac{z-2i}{wi} = -\frac{xu+yv-2v}{u^2+v^2}, \\ \left| \frac{z-2i}{wi} \right| &= \frac{\sqrt{(-xv+uy-2u)^2+(xu+yv-2v)^2}}{u^2+v^2}. \\ \text{ε'. } \frac{1}{z} &= \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x-yi}{x^2+y^2}. \text{ Άρα } \operatorname{Re} \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2}, \operatorname{Im} \frac{1}{z} = \frac{-y}{x^2+y^2}, \left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{aligned}$$

Άσκηση 5.4 Εκφράστε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος των ακόλουθων παραστάσεων συναρτήσει του z και του $\bar{z}$. Για παράδειγμα, $\operatorname{Re}(2z) = z + \bar{z}$, $\operatorname{Im}(2z^2) = -i(z^2 - \bar{z}^2)$.

$$\begin{array}{ll} \alpha'. & z + 3i \\ \gamma'. & \frac{z-2i}{i-1} \\ \epsilon'. & \frac{1}{z} \end{array} \quad \begin{array}{ll} \beta'. & z(2-i) \\ \delta'. & \frac{z(2-i)}{2+i} \\ \zeta'. & \frac{\bar{z}}{\bar{z}} \end{array}$$

Απάντηση - Υπόδειξη.

$$\alpha'. \operatorname{Re}(z + 3i) = \frac{1}{2}((z + 3i) + (\bar{z} - 3i)) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}).$$

$$\operatorname{Im}(z + 3i) = \frac{1}{2i}((z + 3i) - (\bar{z} - 3i)) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z} + 6i).$$

γ' .

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\frac{z-2i}{i-1} \right) &= \frac{1}{2} \left(\frac{z-2i}{i-1} + \frac{\bar{z}+2i}{-i-1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{(z-2i)(-i-1) + (\bar{z}+2i)(i-1)}{1+1} \\ &= \frac{1}{4}((z + \bar{z}) + i(z - \bar{z}) + 4). \\ \operatorname{Im} \left(\frac{z-2i}{i-1} \right) &= \frac{1}{2i} \left(\frac{z-2i}{i-1} - \frac{\bar{z}+2i}{-i-1} \right) \\ &= \frac{1}{2i} \frac{(z-2i)(-i-1) - (\bar{z}+2i)(i-1)}{1+1} \\ &= \frac{1}{4i}(-i(z + \bar{z}) - (z - \bar{z}) + 4i) \\ &= \frac{1}{4}(i(z - \bar{z}) - (z + \bar{z}) + 4). \end{aligned}$$