

MEM100 ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ και ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Φυλλάδιο Προβλημάτων 4

Επίπεδο στο χώρο. Ευθεία στο χώρο.

Πριν ασχοληθείτε με τις επόμενες Ασκήσεις, βεβαιωθείτε ότι έχετε αποσαφηνίσει όλες σας τις απορίες σχετικά με τις Δραστηριότητες 2.9 έως 2.17.

Για τις επόμενες 3 ερωτήσεις, δίδονται τα σημεία
 $P : (2, 3, 1)$, $Q : (3, 1, 4)$ και $R : (2, 1, 5)$.

Άσκηση 4.1 Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που περνάει από τα σημεία P , Q , R .

Απάντηση - Υπόδειξη.

Η εξίσωση είναι της μορφής $Ax + By + Cz + D = 0$. Αντικαθιστώντας τις συντεταγμένες των P , Q , R έχουμε ένα σύστημα 3 εξισώσεων, από τις οποίες μπορούμε να προσδιορίσουμε τους συντελεστές A , B , C , D .

Εναλλακτικά, για το γενικό σημείο X του επιπέδου, το διάνυσμα $\overrightarrow{PX}$ είναι συγγραμμικό με τα $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$, άρα το μικτό γινόμενο $\overrightarrow{PX} \cdot \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = 0$. Αυτή η σχέση δίνει την εξίσωση του επιπέδου, $x + 2y + z = 9$.

Άσκηση 4.2 Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που περνάει από το σημείο P και είναι κάθετο στην ευθεία QR . Είναι το επίπεδο παράλληλο προς κάποιον άξονα συντεταγμένων;

Απάντηση - Υπόδειξη.

Η εξίσωση που ικανοποιεί το γενικό σημείο X του επιπέδου προκύπτει από τη διανυσματική εξίσωση $\overrightarrow{PX} \cdot \overrightarrow{QR} = 0$.

Άσκηση 4.3 Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου Π_s που περιέχει την ευθεία QR και τέμνει τον άξονα Oy στο σημείο $(0, s, 0)$, για $s \in \mathbb{R}$,

Άσκηση 4.4 Βρείτε δύο εξισώσεις της μορφής $Ax + By + Cz + D = 0$ που αποτελούν (και οι δύο μαζί!) την αναλυτική περιγραφή της ευθείας ε στο χώρο, που έχει παραμετρική περιγραφή

$$(x, y, z) = (3, 7, -6) + t(5, -4, 1).$$

Απάντηση - Υπόδειξη.

Από την παραμετρική περιγραφή έχουμε $x = 3 + 5t$, $y = 7 - 4t$, $z = -6 + t$. Από την πρώτη

και την τρίτη σχέση έχουμε $x - 5(z + 6) - 3 = 0$. Από τη δεύτερη και την τρίτη έχουμε $y + 4(z + 6) - 7 = 0$. Η αναλυτική περιγραφή της ευθείας ε δίδεται από τις δύο εξισώσεις

$$x - 5z - 33 = 0, \quad y + 4z + 17 = 0.$$

Άσκηση 4.5 Έστω ε η ευθεία στο χώρο με παραμετρική περιγραφή

$$(x, y, z) = (2 + 2t, 2, 2 - 2t)$$

Θεωρήστε τις ευθείες

$$\delta_1 : (x, y, z) = (1, -1, 0) + r(1, 1, 0) \quad \text{και} \quad \delta_2 : (x, y, z) = (1, -1, 1) + s(-4, 0, 4).$$

Για $i = 1, 2$, να εξετάσετε αν η ε και η δ_i , έχουν κοινά σημεία, είναι παράλληλες ή είναι ασύμβατες.

Άσκηση 4.6 Εξετάστε εάν η ευθεία ε με παραμετρική περιγραφή $(x, y, z) = (3, -1, 4) + t(2, 5, 2)$ είναι παράλληλη προς το επίπεδο $\Pi : 2x - 2y + 3z - 5 = 0$. Εάν όχι, βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής.

Άσκηση 4.7 Βρείτε την παραμετρική παράσταση της κοινής κάθετου των ευθειών $\varepsilon_1 : (x, y, z) = (1, 3, 1) + s(1, 1, -1)$ και $\varepsilon_2 : (x, y, z) = (1, 0, 1) + t(1, 0, -2)$. Υπολογίστε την απόσταση μεταξύ των δύο ευθειών.

Απάντηση - Υπόδειξη.

Η κοινή κάθετος έχει διάνυσμα διεύθυνσης $\vec{n} = (1, 1, -1) \times (1, 0, -2) = (-2, 1, -1)$. Για να βρούμε ένα σημείο (x_0, y_0, z_0) της κοινής κάθετου χρησιμοποιούμε τη σχέση $(x_0, y_0, z_0) = (1, 3, 1) + s(1, 1, -1)$, όπου r, s, t ικανοποιούν την

$$(1, 0, 1) - (1, 3, 1) = s(1, 1, -1) + r(-2, 1, -1) + t(1, 0, -2).$$

Βρίσκουμε $s = -\frac{5}{2}$ και $(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{2}(-3, 1, 7)$. Άρα η κοινή κάθετος είναι η $\kappa : (x, y, z) = \frac{1}{2}(-3, 1, 7) + u(-2, 1, -1)$.

Η απόσταση μεταξύ των δύο ευθειών, από Διάλεξη 9, είναι

$$d = \frac{|(0, 3, 0) \cdot (-2, 1, -1)|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

Άσκηση 4.8 Έστω Π το επίπεδο με παραμετρική περιγραφή

$$(x, y, z) = (1, 0, 1) + s(1, 2, 3) + t(1, 1, 1).$$

Βρείτε την εξίσωση του Π , με δύο τρόπους:

α'. απαλείφοντας πρώτα την παράμετρο t και κατόπιν την παράμετρο s .

β'. χρησιμοποιώντας το εξωτερικό γινόμενο.

Ελέγξτε ότι οι δύο διαδικασίες καταλήγουν σε ισοδύναμες εξισώσεις.

Άσκηση 4.9 Θεωρούμε το επίπεδο Π στο E^3 που περνάει από τα σημεία $Q : (2, 1, 3)$, $R : (2, 4, 0)$ και $S : (-3, 0, 4)$. Στο επίπεδο Π ορίζουμε το (μη ορθοκανονικό) σύστημα αναφοράς $(Q, \vec{v}, \vec{w})$, όπου $\vec{v} = \overrightarrow{QR}$ και $\vec{w} = \overrightarrow{QS}$. Να βρείτε:

- α'. Τις συντεταγμένες στο E^3 του σημείου του Π που έχει συντεταγμένες $(5, 3)$ ως προς το $(Q, \vec{v}, \vec{w})$.
- β'. Τις συντεταγμένες ως προς το $(Q, \vec{v}, \vec{w})$ του σημείου στο οποίο το επίπεδο Π τέμνει τον άξονα Oz .

Απάντηση - Υπόδειξη.

α'. Το σημείο Y που έχει συντεταγμένες $(5, 3)$ ως προς το $(Q, \vec{v}, \vec{w})$ έχει διάνυσμα θέσης ως προς το σημείο αναφοράς του E^3 , $\overrightarrow{OY} = \overrightarrow{OQ} + 5\overrightarrow{QR} + 3\overrightarrow{QS} = (-13, 13, -9)$.

β'. Το σημείο X που έχει συντεταγμένες (a, b) ως προς το $(Q, \vec{v}, \vec{w})$, έχει διάνυσμα θέσης ως προς το σημείο αναφοράς του E^3 , $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OQ} + a\overrightarrow{QR} + b\overrightarrow{QS}$. Εάν βρίσκεται στον άξονα Oz , $\overrightarrow{OX} = (0, 0, z)$. Άρα $(0, 0, z) = (2, 1, 3) + a(0, 3, -3) + b(-5, -1, 1)$. Βρίσκουμε $b = 2/5$, $a = -1/5$, και $z = 4$.

Άσκηση 4.10 Θεωρήστε το επίπεδο Π με εξίσωση $2x + 3y + z + 1 = 0$, και τα επίπεδα $\Sigma_1: x + y + z + 1 = 0$ και $\Sigma_2: -4x - 6y - 2z - 2 = 0$.

- α'. Βρείτε μία παραμετρική περιγραφή του συνόλου των κοινών σημείων του Π και του Σ_1 και του συνόλου των κοινών σημείων του Π και του Σ_2 .
- β'. Υπολογίστε την απόσταση του σημείου $(1, 1, 1)$ από το επίπεδο Π , και την απόσταση του σημείου $(1, 1, 1)$ από την τομή των επιπέδων Π και Σ_1 .

Απάντηση - Υπόδειξη.

α'. Γεωμετρική προσέγγιση: Τα επίπεδα Π και Σ_1 έχουν κάθετα διανύσματα $\vec{u} = (2, 3, 1)$ και $\vec{w} = (1, 1, 1)$ αντίστοιχα. Άρα τέμνονται σε μία ευθεία με διάνυσμα διεύθυνσης $\vec{u} \times \vec{w} = (2, -1, -1)$. Παρατηρούμε ότι το σημείο $(0, 0, 1)$ ικανοποιεί τις εξισώσεις των Π και Σ_1 . Άρα τα δύο επίπεδα τέμνονται στην ευθεία με παραμετρική περιγραφή

$$(x, y, z) = (0, 0, 1) + t(2, -1, -1).$$

Αλγεβρική προσέγγιση: Λύνουμε το σύστημα εξισώσεων $2x + 3y + z + 1 = 0$ και $x + y + z + 1 = 0$ με απαλοιφή Gauss, και βρίσκουμε $(x, y, z) = (-2, 1, 0) + t(-2, 1, 1)$.

Παρατηρούμε ότι οι δύο παραμετρικές περιγραφές δίδουν την ίδια ευθεία!

Τα επίπεδα Π και Σ_2 συμπίπτουν.

β'. Έστω $X : (1, 1, 1)$. Η απόσταση του σημείου X από το επίπεδο Π , από Διάλεξη 9, είναι $d(X, \Pi) = \frac{7}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$. Η απόσταση του σημείου X από την ευθεία $\delta = \Pi \cap \Sigma_1$, από Διάλεξη 9, είναι

$$d(X, \delta) = \frac{|(1, 1, 1) \times (2, -1, -1)|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{6}}.$$