

MEM100 ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ και ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Φυλλάδια Προβλημάτων 3

Ευθείες στο Επίπεδο, Διανύσματα στο χώρο.

Πριν ασχοληθείτε με τις επόμενες Ασκήσεις, βεβαιωθείτε ότι έχετε αποσαφηνίσει όλες σας τις απορίες σχετικά με τις Δραστηριότητες 1.30 έως 1.35.

Άσκηση 3.1 Περιγράψτε γεωμετρικά τα ακόλουθα σύνολα στο επίπεδο

- α') $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - 3y + \sqrt{2} = 0\}$
- β') $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -1\}$
- γ') $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (y - 1)(2x - y) = 0\}$
- δ') $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0\}$

Απάντηση - Υπόδειξη.

γ'. Η ένωση δύο ευθειών, με εξισώσεις $y - 1 = 0$ και $2x - y = 0$.

ε'. Η ευθεία $x - y = 0$.

Άσκηση 3.2 Θεωρήστε την ευθεία ε_t που περνάει από τα σημεία $P : (3, 2)$ και $Q_t : (t, 4)$ για $t \in \mathbb{R}$.

α'. Βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_t .

β'. Για ποιά τιμή του t είναι η ευθεία ε_t κάθετη στην ευθεία $\zeta : 2x - y + 5 = 0$;

γ'. Βρείτε την τιμή t_0 για την οποία η ευθεία ε_{t_0} είναι παράλληλη προς την ζ .

δ'. Για $t \neq t_0$, βρείτε το σημείο τομής της ε_t με την ζ .

Απάντηση - Υπόδειξη.

β'. Για $t = -1$.

δ'. $y = \frac{7+2t}{t-4}$, $x = \frac{27-3t}{2t-8}$.

Άσκηση 3.3 Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που είναι παράλληλες προς την ευθεία $2x + 3y + 5 = 0$ και μαζί με τους άξονες του συστήματος αναφοράς περικλείουν τρίγωνο με εμβαδόν 6.

Απάντηση - Υπόδειξη.

$2x + 3y + \kappa = 0$, για $\kappa = \pm 6\sqrt{2}$.

Άσκηση 3.4 Σχεδιάστε τις ευθείες με τις ακόλουθες εξισώσεις ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$:

$$\alpha') \quad 2x + 3y + 6 = 0$$

$$\beta') \quad 2x + 3y - 6 = 0$$

$$\gamma') \quad 3x - 2y + 6 = 0$$

$$\delta') \quad 3x - 2y - 6 = 0$$

Άσκηση 3.5 Βρείτε ένα κάθετο διάνυσμα, ένα διάνυσμα διεύθυνσης και την κλίση, για την ευθεία ε στο επίπεδο με παραμετρική περιγραφή $(x, y) = (1 - 2t, 3 + t)$. Γράψτε την εξίσωση της ευθείας ε .

Απάντηση - Υπόδειξη.

Κάθετο διάνυσμα $(1, 2)$

Διάνυσμα διεύθυνσης $(-2, 1)$.

Κλίση $-1/2$.

Εξίσωση ευθείας $x + 2y - 7 = 0$.

Άσκηση 3.6 Βρείτε το ύψος από το A του τριγώνου ABC , με $A : (-1, 3)$, $B : (1, -1)$, $C : (4, 1)$.

Πριν ασχοληθείτε με τις επόμενες Ασκήσεις, βεβαιωθείτε ότι έχετε αποσαφηνίσει όλες σας τις απορίες σχετικά με τις Δραστηριότητες 2.1 έως 2.8.

Άσκηση 3.7 Σχεδιάστε τρία διανύσματα $\vec{x} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{y} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{z} = \overrightarrow{AD}$ που δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο.

Συμπληρώστε στο σχέδιο το παραλληλεπίπεδο που κατασκευάζεται με ακμές AB , AC και AD (προσέξτε να μην δείχνει ορθογώνιο) έτσι ώστε AA' , BB' , CC' και DD' να είναι οι διαγώνιοι του παραλληλεπίπεδου.

Εκφράστε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB'}$, $\overrightarrow{AC'}$, $\overrightarrow{AD'}$ και τα διανύσματα $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$, $\overrightarrow{DD'}$ ως γραμμικούς συνδυασμούς των $\vec{x}$, $\vec{y}$ και $\vec{z}$.

Άσκηση 3.8 Σχεδιάστε ένα κανονικό τετράεδρο $ABCD$ με μήκος πλευράς 1, και θεωρήστε τα διανύσματα $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$. Ποιές από τις ακόλουθες τριάδες είναι δεξιόστροφες, και ποιές δεν είναι;

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}), \quad (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}), \quad (\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}), \quad (\vec{w}, -\vec{v}, \vec{u}).$$

Απάντηση - Υπόδειξη.

Οι απαντήσεις εξαρτώνται από το σχήμα, δηλαδή από τη διάταξη των κορυφών του τετραέδρου.

Άσκηση 3.9 Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ με κοινό σημείο εφαρμογής O . Δείξτε ότι $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ είναι δεξιόστροφο σύστημα εάν και μόνον εάν $(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z} > 0$.

Άσκηση 3.10 Δείξτε ότι

$$[\vec{x} \vec{y} \vec{z}] = [\vec{y} \vec{z} \vec{x}] = [\vec{z} \vec{x} \vec{y}],$$

$$[\vec{z} \vec{y} \vec{x}] = [\vec{y} \vec{x} \vec{z}] = [\vec{x} \vec{z} \vec{y}].$$

Άσκηση 3.11 Εάν $\vec{a} \neq 0$ και $\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{a} \times \vec{a}) \times \vec{b}$, τί συμπέρασμα μπορείτε να βγάλετε για το $\vec{b}$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Απάντηση - Υπόδειξη.

Το διάνυσμα $\vec{b}$ είναι πολλαπλάσιο του διανύσματος $\vec{a}$.

Άσκηση 3.12 Υπολογίστε το εξωτερικό γινόμενο $\vec{v} \times \vec{u}$ των διανυσμάτων (με συντεταγμένες ως προς ορθοκανονικό δεξιόστροφο σύστημα αναφοράς) $\vec{v} = (1, 2, 1)$, $\vec{u} = (3, 1, 2)$.

Εξετάστε αν τα διανύσματα $\vec{v}$, $\vec{u}$ και $\vec{w} = (4, 5, 0)$ είναι συνεπίπεδα.

Άσκηση 3.13 Έστω ορθοκανονικό σύστημα του χώρου $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Να βρεθεί ένα άλλο σύστημα του χώρου $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, με $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$, τέτοιο ώστε τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ να είναι ορθογώνια ανά δύο.

Απάντηση - Υπόδειξη.

Το διάνυσμα $\vec{b}$ πρέπει να ικανοποιεί $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Εάν $\vec{b} = r\vec{i} + s\vec{j} + t\vec{k}$, οι συντεταγμένες (r, s, t) πρέπει να ικανοποιούν $(1, 1, 2) \cdot (r, s, t) = 0$. Επιλέγουμε κατάλληλα r, s, t . Για παράδειγμα, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$. Το διάνυσμα $\vec{c}$ πρέπει να είναι κάθετο τόσο στο $\vec{a}$ όσο και στο $\vec{b}$. Χρησιμοποιούμε το εξωτερικό γινόμενο για να υπολογίσουμε ένα τέτοιο διάνυσμα.

Άσκηση 3.14 Για το εξωτερικό γινόμενο δεν ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα: $\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z})$ δεν είναι πάντα ίσο με $(\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z}$. Υπάρχει όμως μία άλλη σχέση, **η ταυτότητα Jacobi**.

Δείξτε ότι, για τυχαία διανύσματα $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ στο χώρο,

$$\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) + \vec{z} \times (\vec{x} \times \vec{y}) + \vec{y} \times (\vec{z} \times \vec{x}) = \vec{0}.$$

Απάντηση - Υπόδειξη.

Χρησιμοποιήστε την έκφραση για το δις εξωτερικό γινόμενο.