

MEM100 ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ και ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Φυλλάδια Προβλημάτων 1 & 2

Διανύσματα στο Επίπεδο

Πριν ασχοληθείτε με τις επόμενες Ασκήσεις, βεβαιωθείτε ότι έχετε αποσαφηνίσει όλες σας τις απορίες σχετικά με τις Δραστηριότητες 1.1 έως 1.16.

Άσκηση 1.1 Έστω $ABCD$ παραλληλόγραμμο, E σημείο στην πλευρά AB και F σημείο στην πλευρά CD τέτοια ώστε $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{FC}$. Έστω, επίσης σημείο G στην πλευρά AD και H σημείο στην πλευρά BC , τέτοια ώστε $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{HC}$. Αποδείξτε ότι το $EGFH$ είναι παραλληλόγραμμο.

Υπόδειξη: Μπορείτε να προσεγγίσετε αυτή την άσκηση με πολλούς τρόπους. Προσπαθήστε αρχικά να χρησιμοποιήσετε τον ορισμό του παραλληλογράμμου που δώσαμε στο μάθημα.

Απάντηση - Υπόδειξη.

Σχεδιάστε το παραλληλόγραμμο και τα σημεία E, F, G, H .

Αρκεί να δείξουμε ότι οι EF και HG διχοτομούνται. Αφού $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{FC}$, $AECF$ είναι παραλληλόγραμμο, άρα οι AC και EF διχοτομούνται. Αφού $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{HC}$, $AGCH$ είναι παραλληλόγραμμο, άρα οι AC και GH διχοτομούνται. Συνεπώς οι EF και HG τέμνονται στο μέσο της AC , και διχοτομούνται.

Άσκηση 1.2 Σχεδιάστε τρία σημεία A, B, C , που δεν βρίσκονται όλα στην ίδια ευθεία, τέτοια ώστε $|\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}|$.

Άσκηση 1.3 Αποδείξτε με χρήση διανυσμάτων ότι η ευθεία που ενώνει τα μέσα M, N των πλευρών AB και AC ενός τριγώνου ABC είναι παράλληλη προς την πλευρά BC και έχει μήκος το μισό της BC .

Απάντηση - Υπόδειξη.

Σχεδιάστε το τρίγωνο και τα σημεία M, N .

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$$

Άσκηση 1.4 Σχεδιάστε το τραπέζιο $ABCD$ με βάσεις AD και BC . Έστω M, N τα μέσα των πλαγίων πλευρών AB και CD . Αποδείξτε ότι

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}).$$

Άσκηση 1.5 Σημειώστε τρία σημεία O, A, B που δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Γνωρίζουμε ότι για κάθε σημείο X του επιπέδου το διάνυσμα $\vec{OX}$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός $\vec{OX} = a\vec{OA} + b\vec{OB}$. Δείξτε ότι το σημείο X βρίσκεται στην ευθεία που περνάει από τα A και B εάν και μόνον εάν $a + b = 1$.

Πού νομίζετε ότι βρίσκεται το X εάν $a + b = 3$;

Απάντηση - Υπόδειξη.

Πρέπει να αποδείξουμε και τις δύο κατευθύνσεις, $\Rightarrow$ και $\Leftarrow$.

$\Rightarrow$: Εάν το X βρίσκεται στην ευθεία που περνάει από τα A και B , τότε υπάρχει πραγματικός αριθμός b τέτοιος ώστε $\vec{AX} = b\vec{AB}$. Αλλά $\vec{AX} = \vec{OX} - \vec{OA}$ και $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$. Άρα $\vec{OX} - \vec{OA} = b\vec{OB} - b\vec{OA}$, δηλαδή $\vec{OX} = (1 - b)\vec{OA} + b\vec{OB}$.

$\Leftarrow$: Αντίστροφα, εάν $\vec{OX} = (1 - b)\vec{OA} + b\vec{OB}$, τότε $\vec{AX} = \vec{OX} - \vec{OA} = -b\vec{OA} + b\vec{OB} = b(\vec{OB} - \vec{OA}) = b\vec{AB}$, δηλαδή X βρίσκεται στην ευθεία που περνάει από τα A και B .

Πριν ασχοληθείτε με τις επόμενες Ασκήσεις, βεβαιωθείτε ότι έχετε αποσαφηνίσει όλες σας τις απορίες σχετικά με τις Δραστηριότητες 1.17 έως 1.29.

Άσκηση 2.1 Θεωρήστε δύο μη συγγραμμικά διανύσματα, $\vec{u}$ και $\vec{w}$, τέτοια ώστε $|\vec{u} + 2\vec{w}| = |\vec{u}|$. Δείξτε ότι $\vec{w} \cdot (\vec{u} + \vec{w}) = 0$. (Συγκρίνατε με την Άσκηση 1.2)

Παρατηρήστε ότι $\vec{w} \cdot (\vec{u} + \vec{w}) = 0$ μπορεί να ισχύει, παρ' όλο που $\vec{w} \neq 0$ και $\vec{u} + \vec{w} \neq 0$!

Άσκηση 2.2 Σημειώστε δύο σημεία A, B , στο επίπεδο, και βρείτε σημεία C, D, E τέτοια ώστε:

α'. $|\vec{AC}| = 2|\vec{AB}|$ και $\vec{AC} \cdot \vec{AB} = 0$.

β'. $\vec{AD} = 2\vec{AB}$. Παρατηρήστε ότι τότε $\vec{AD} \cdot \vec{AB} = 2|\vec{AB}|^2$.

γ'. $|\vec{AE}| = 2|\vec{AB}|$ και $\vec{AE} \cdot \vec{AB} = -|\vec{AB}|^2$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

γ'. Τα $\vec{AB}$ και $\vec{AE}$ σχηματίζουν γωνία $2\pi/3$.

Άσκηση 2.3 Αν τα $\vec{u}, \vec{v}$ είναι κάθετα και έχουν ίδιο μήκος, δείξτε ότι και τα $2\vec{u} + 3\vec{v}$, $6\vec{u} - 4\vec{v}$ είναι κάθετα.

Άσκηση 2.4 Θεωρήστε τρία σημεία O, A, B που δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Εάν το σημείο X βρίσκεται στην ευθεία που περνάει από τα A και B , και ο απλός λόγος $(A B X) = \mu$, βρείτε a και b τέτοια ώστε $\vec{OX} = a\vec{OA} + b\vec{OB}$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

$$a = \frac{\mu}{1+\mu}, b = \frac{1}{1-\mu}.$$

Άσκηση 2.5 Αποδείξτε ότι για κάθε τρίγωνο ABC ισχύει: $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = 0$.

Εάν για τα διανύσματα $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ισχύει ότι $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = 0$, τότε αποδείξτε πως υπάρχει τρίγωνο ABC τέτοιο ώστε $\vec{AB} = \vec{u}$, $\vec{BC} = \vec{v}$, $\vec{CA} = \vec{w}$.

Άσκηση 2.6 Αν το τρίγωνο ABC είναι ισόπλευρο, a είναι το μήκος της πλευράς του, $\vec{u} = \vec{AB}$, και $\vec{v} = \vec{BC}$, υπολογίστε το μήκος του $\vec{u} + 3\vec{v}$ ως συνάρτηση του a .

Απάντηση - Υπόδειξη.

$$|\vec{u} + 3\vec{v}| = \sqrt{9a^2 - 6(\frac{1}{2})a^2 + a^2} = a\sqrt{7}.$$

Άσκηση 2.7 Δείξτε ότι εάν $\vec{OA}$ και $\vec{OB}$ είναι μη συγγραμμικά διανύσματα και $a\vec{OA} = b\vec{OB}$, τότε $a = 0$ και $b = 0$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

Το πέρας του διανύσματος $a\vec{OA}$ βρίσκεται στον φορέα του $\vec{OA}$. Το πέρας του διανύσματος $b\vec{OB}$ βρίσκεται στον φορέα του $\vec{OB}$. Οι δύο ευθείες έχουν ένα κοινό σημείο, στο O . Αφού δεν συμπίπτουν δεν έχουν άλλο κοινό σημείο. Εάν $a\vec{OA} = b\vec{OB}$, το κοινό πέρας των δύο διανυσμάτων πρέπει να είναι το O , συνεπώς $a = 0$ και $b = 0$.

Άσκηση 2.8 Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 2.7 για να δείξετε ότι οι συντεταγμένες ενός σημείου P του επιπέδου ως προς ένα σύστημα αναφοράς $(O, \vec{u}, \vec{v})$ είναι μοναδικές: εάν (s, t) και (x, y) είναι συντεταγμένες του ίδιου σημείου P , τότε $s = x$ και $t = y$.

Άσκηση 2.9 Σχεδιάστε ένα ισόπλευρο τρίγωνο ABC . Θεωρήστε το (μη ορθοκανονικό) σύστημα αναφοράς $(A, \vec{u}, \vec{w})$, όπου $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ και $\vec{w} = -\overrightarrow{AC}$.

Σημειώστε στο σχήμα τα σημεία P και Q με συντεταγμένες ως προς $(A, \vec{u}, \vec{w})$, $P : (2, 1)$ και $Q : (1, 1)$.

Σχεδιάστε τις προβολές $\vec{r} = \text{pr}_{\vec{u}} \overrightarrow{AP}$ και $\vec{t} = \text{pr}_{\vec{w}} \overrightarrow{AP}$, και βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{r}$ και $\vec{t}$ ως προς το σύστημα αναφοράς $(A, \vec{u}, \vec{w})$.

Υπολογίστε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων με συντεταγμένες (s, t) και (x, y) ως προς το σύστημα αναφοράς $(A, \vec{u}, \vec{w})$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

$$\vec{r} = \frac{3}{2}\vec{u}, \quad \vec{t} = 0.$$

$$(p\vec{u} + s\vec{w}) \cdot (x\vec{u} + y\vec{w}) = |\vec{u}|^2(px + sy - \frac{1}{2}(py + sx)).$$

Άσκηση 2.10 Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς θεωρήστε τα διανύσματα $\vec{u} = (s, t)$, $\vec{v} = (-t, s)$ και $\vec{w} = (x, y)$. Υπολογίστε τα μέτρα των προβολών $\text{pr}_{\vec{u}}\vec{w}$ και $\text{pr}_{\vec{v}}\vec{w}$.