

MEM100 ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ και ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Παρατηρήσεις

1. ΑΠΑΓΟΡΕΥΕΤΑΙ να έχετε ΚΙΝΗΤΑ ή ΚΟΜΠΙΟΥΤΕΡΑΚΙΑ στο χώρο της εξέτασης. Σύμφωνα με τον κανονισμό του Τμήματος εάν κατά τη διάρκεια της εξέτασης έχετε πάνω ή δίπλα σας, τσάντες, σημειώσεις, βιβλία, κινητό (έστω και απενεργοποιημένο) ή άλλη ηλεκτρονική συσκευή, αποκλείεστε από όλες τις εξετάσεις της πρώτης εξεταστικής περιόδου του επόμενου εξαμήνου.
2. Διαβάστε προσεκτικά τα θέματα πριν αρχίσετε να απαντάτε. Οι απαντήσεις πρέπει να είναι σαφείς, σύντομες και αιτιολογημένες.
3. Γράψτε σε διαφορετική σελίδα την απάντηση κάθε θέματος. Συνιστάται να γράφετε τις απαντήσεις μόνο στη δεξιά σελίδα, και να χρησιμοποιείτε την αριστερή για πρόχειρους υπολογισμούς (ή το αντίθετο αν είστε αριστερόχειρες).
4. Πρέπει να παραδώσετε όλες τις κόλλες που χρησιμοποιήσατε και να επιδείξετε πάσο ή ταυτότητα.
5. Η εξέταση διαρκεί 150 λεπτά. Τα πρώτα 30 λεπτά της εξέτασης απαγορεύεται η έξοδος ή η αποχώρηση από την εξέταση. Εάν αποχωρήσετε από την εξέταση σε λιγότερο από 90 λεπτά μετά την έναρξη, το γραπτό σας δεν θα βαθμολογηθεί.
6. Οι βαθμοί δίδονται σε παρένθεση. Ο μέγιστος βαθμός είναι 100.

ΘΕΜΑ 1. (20)

1. Δίδονται τρία διαφορετικά σημεία A, B, C , και διανύσματα $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{w} = \overrightarrow{BC}$, τέτοια ώστε
 $\vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{w}) = 0$ και $|\vec{w}| = 2|\vec{u}|$. Είναι οι ακόλουθες σχέσεις αληθείς ή ψευδείς; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

α'. $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{w}$

β'. $\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$

γ'. $|2\vec{u} + \vec{w}| > |\vec{w}|$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

Πρέπει να σχεδιάσετε το τρίγωνο ABC . Τι σχήμα πρέπει να έχει για να ικανοποιούνται οι υποθέσεις του ερωτήματος; Με βάση αυτό θα δώσετε τις απαντήσεις και την αιτιολόγηση.

α') ψευδής, β') αληθής, γ') ψευδής.

2. Βρείτε την εικόνα της ευθείας $\varepsilon : 2x + y = 2$ από το μετασχηματισμό $f(x, y) = (2x + y - 1, x + y + 1)$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

Πρέπει να βρείτε τον αντίστροφο μετασχηματισμό του $(x', y') = (2x + y - 1, x + y + 1)$, και να αντικαταστήσετε στην εξίσωση της ε τα x και y από τις εκφράσεις τους συναρτήσει των x' και y' .

ΘΕΜΑ 2. (25)

Δίδονται οι ευθείες $\varepsilon : (2, 1, 3) + t(1, 0, 2)$ και $\delta : (-1, 0, 1) + s(2, 1, 0)$ και το σημείο $A : (2, 2, 1)$.

α'. Δείξτε ότι οι ευθείες ε και δ βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο.

β'. Βρείτε την παραμετρική έκφραση της ευθείας η που περνάει από το σημείο A και είναι κάθετη στο επίπεδο των ευθειών ε και δ .

γ'. Βρείτε την απόσταση της ευθείας η από την ευθεία ε .

Απάντηση - Υπόδειξη.

1. Υπολογίζουμε το μεικτό γινόμενο των διανυσμάτων $(1, 0, 2)$, $(2, 1, 0)$ και $(2, 1, 3) - (-1, 0, 1)$.

2. Το διάνυσμα διεύθυνσης της η είναι το εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $(1, 0, 2)$ και $(2, 1, 0)$.

3. Δείτε την Διάλεξη 7, σελίδα 77.

ΘΕΜΑ 3. (25)

1. Βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $z^6 = -4(1 - \sqrt{3}i)$.

2. Βρείτε ένα ισόπλευρο τρίγωνο του οποίου μία κορυφή είναι το σημείο $a = -4(1 + \sqrt{3}i)$. Εκφράστε τις κορυφές του τριγώνου ως μιγαδικούς αριθμούς.

3. Βρείτε την εξίσωση, σε μιγαδική μορφή, του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου που βρήκατε στο 2.

4. Βρείτε τα σταθερά σημεία του μετασχηματισμού Möbius $f(z) = \frac{z-3}{3z-2}$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

1. $z_k = \sqrt[6]{2}(\cos(\pi/9 + 2k\pi/6) + i\sin(\pi/9 + 2k\pi/6))$, $k = 0, \dots, 5$.

2. Εάν θεωρήσουμε το τρίγωνο με κέντρο βάρους στο 0, οι κορυφές είναι $-4(1 - \sqrt{3}i)$, $-4(1 + \sqrt{3}i)$ και 8.

3. Για αυτό το τρίγωνο, ο περιγεγραμμένος κύκλος έχει εξίσωση $z\bar{z} = 64$.

4. Είναι οι ρίζες της εξίσωσης $z - 3 = z^3z - 2$.

ΘΕΜΑ 4. (25)

1. Δείξτε ότι εάν η ευθεία με εξίσωση $y = \lambda x + \kappa$ εφάπτεται στην έλλειψη με εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

τότε

$$\kappa = \pm \sqrt{a^2 \lambda^2 + b^2}.$$

2. Βρείτε τη γωνία μεταξύ των ασυμπτώτων της υπερβολής όταν η εκκεντρότητα είναι $e = \frac{c}{a} = 2$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

1. Φέρτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο (x_1, y_1) στη μορφή $y = \lambda x + \kappa$, και επαληθεύστε τη σχέση μεταξύ των κ και λ .

ΘΕΜΑ 5. (15)

1. Βρείτε την εξίσωση της οικογένειας σφαιρών που έχουν κέντρο στο επίπεδο με εξίσωση $2x - y + z = 1$ και εφάπτονται στο επίπεδο $z = -1$.

2. Δίδεται η εξίσωση

$$4x^2 - y^2 - 8x + 4y + 4z = 0.$$

α'. Συμπληρώστε τα τετράγωνα για να προσδιορίσετε την επιφάνεια που παριστάνει η εξίσωση.

β'. Βρείτε τις εξισώσεις της τομής της επιφάνειας με το (y, z) -επίπεδο, και προσδιορίστε τι είδος καμπύλης είναι η τομή.

Απάντηση - Υπόδειξη.

1. Τα κέντρα των σφαιρών έχουν συντεταγμένες $(x, y, 1 - 2x + y)$, και η ακτίνα κάθε σφαίρας είναι η απόσταση του κέντρου από το επίπεδο $z = -1$, δηλαδή $r = 2 - 2x + y$.

2. Συμπληρώνοντας τα τετράγωνα βρίσκουμε εξίσωση της μορφής $4X^2 - Y^2 + 4Z = 0$, άρα η επιφάνεια είναι υπερβολικό παραβολοειδές.

Η τομή με επίπεδο $x = 0$ είναι παραβολή.