Μιγαδική Ανάλυση I

1. Μιγαδικοί αριθμοί, γεωμετρία και βασικές απεικονίσεις

1 Οι μιγαδικοί αριθμοί

Η μετάβαση από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{C}$ μπορεί να ιδωθεί ως ένα ακόμη βήμα στην επέκταση των αριθμητικών συστημάτων. Για παράδειγμα, η εξίσωση

$$x^2 = 2$$

δεν έχει λύση στο $\mathbb{Q}$, αλλά έχει λύση στο $\mathbb{R}$. Αντίθετα, η εξίσωση

$$x^2 = -1$$

δεν έχει λύση στο $\mathbb{R}$. Εισάγουμε λοιπόν ένα νέο σύμβολο i με την ιδιότητα

$$i^2 = -1.$$

Ορισμός 1.1. Το σύνολο των *μιγαδικών αριθμών* είναι

$$\mathbb{C} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Αν $z = x + iy$, ορίζουμε

$$\operatorname{Re} z = x, \qquad \operatorname{Im} z = y.$$

Η γραφή $z = x + iy$ είναι μοναδική. Η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός γίνονται με τους συνηθισμένους αλγεβρικούς κανόνες, χρησιμοποιώντας τη σχέση $i^2 = -1$:

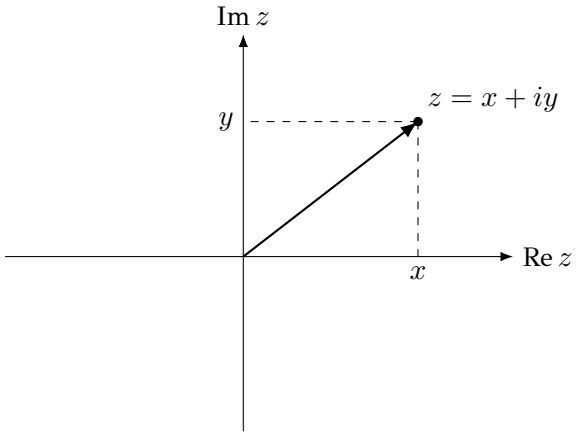
$$(x + iy) + (u + iv) = (x + u) + i(y + v),$$

και

$$(x + iy)(u + iv) = (xu - yv) + i(xv + yu).$$

Το μιγαδικό επίπεδο

Ταυτίζουμε τον μιγαδικό αριθμό $z = x + iy$ με το σημείο $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Έτσι ο οριζόντιος άξονας είναι ο πραγματικός άξονας και ο κατακόρυφος ο φανταστικός άξονας.



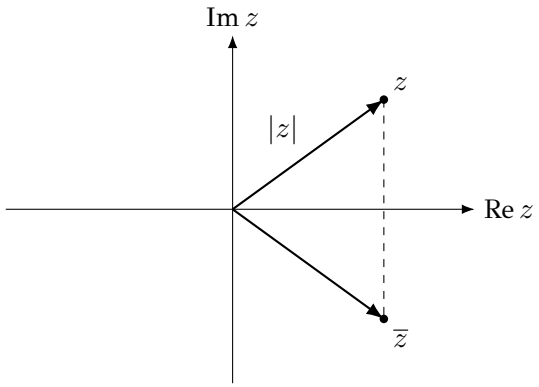
Ορισμός 1.2. Αν $z = x + iy$, ο *συζυγής* του z είναι

$$\overline{z} = x - iy,$$

και το *μέτρο* του z είναι

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Γεωμετρικά, το $\overline{z}$ είναι η ανάκλαση του z ως προς τον πραγματικό άξονα, ενώ το $|z|$ είναι η απόσταση του z από το 0.



Οι βασικές ταυτότητες είναι

$$z\overline{z} = |z|^2, \qquad \operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2}, \qquad \operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$

Ειδικότερα, αν $z \neq 0$, τότε

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Άρα κάθε μη μηδενικός μιγαδικός έχει πολλαπλασιαστικό αντίστροφο.

Πρόταση 1.3 (Βασικές ιδιότητες του μέτρου). *Για κάθε $z, w \in \mathbb{C}$ ισχύουν*

$$|zw| = |z|\,|w|$$

και

$$|z + w| \leq |z| + |w|.$$

Απόδειξη. Η πρώτη σχέση προκύπτει από

$$|zw|^2 = zw\,\overline{zw} = zw\,\overline{z}\,\overline{w} = |z|^2|w|^2.$$

Για τη δεύτερη,

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w)(\overline{z} + \overline{w}) \\ &= |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re}(z\overline{w}) \\ &\leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z\overline{w}| \\ &= (|z| + |w|)^2. \end{aligned}$$

Παίρνοντας τετραγωνικές ρίζες παίρνουμε την τριγωνική ανισότητα. □

Το μέτρο ως απόσταση

Αν $z_1 = x_1 + iy_1$ και $z_2 = x_2 + iy_2$, τότε

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Επομένως $|z_1 - z_2|$ είναι ακριβώς η ευκλείδεια απόσταση των δύο σημείων στο επίπεδο.

Παράδειγμα 1.4 (Απόσταση δύο μιγαδικών)**.** Θεωρούμε

$$z_1 = 2 + 4i, \qquad z_2 = 5 + i.$$

Τότε

$$|z_1| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}, \qquad |z_2| = \sqrt{26},$$

ενώ

$$|z_1 - z_2| = |-3 + 3i| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

Άρα το z_2 βρίσκεται μακρύτερα από το 0, και η μεταξύ τους απόσταση είναι $3\sqrt{2}$.

Παρατήρηση 1.5. Στο $\mathbb{C}$ δεν υπάρχει φυσική διάταξη συμβατή με τις πράξεις όπως στο $\mathbb{R}$. Έτσι εκφράσεις όπως $z_1 < z_2$ δεν έχουν γενικά νόημα. Μπορούμε όμως να συγκρίνουμε τα πραγματικά μεγέθη $|z_1|$ και $|z_2|$.

Κύκλοι, δίσκοι και ελλείψεις

Η γεωμετρική ερμηνεία του $|z - z_0|$ κάνει πολλές εξισώσεις στο $\mathbb{C}$ άμεσα αναγνωρίσιμες.

Παράδειγμα 1.6. Να περιγραφούν γεωμετρικά τα παρακάτω σύνολα:

1. $|z + 4 - i| = 2$,
2. $|z + 4 - i| \leq 2$,
3. $|z + 2 + 2i| + |z + 1 + i| = 3\sqrt{2}$.

Για τα δύο πρώτα γράφουμε

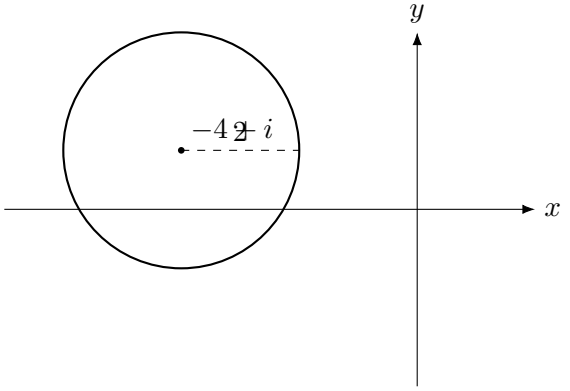
$$|z + 4 - i| = |z - (-4 + i)|.$$

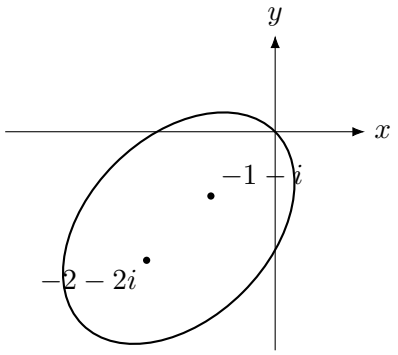
Άρα το πρώτο σύνολο είναι ο κύκλος με κέντρο $-4 + i$ και ακτίνα 2, ενώ το δεύτερο είναι ο αντίστοιχος κλειστός δίσκος.

Για το τρίτο,

$$|z - (-2 - 2i)| + |z - (-1 - i)| = 3\sqrt{2}.$$

Πρόκειται για τα σημεία των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από τα δύο σταθερά σημεία $-2 - 2i$ και $-1 - i$ είναι σταθερό. Άρα είναι έλλειψη με εστίες αυτά τα δύο σημεία.





2 Πολική μορφή

Η καρτεσιανή γραφή $z = x + iy$ είναι χρήσιμη για πρόσθεση και αφαίρεση. Για πολλαπλασιασμό, δυνάμεις και ρίζες είναι συχνά καλύτερη η πολική μορφή.

Για $\theta \in \mathbb{R}$ χρησιμοποιούμε τη σημειογραφία

$$e^{i\theta} := \cos\theta + i\sin\theta.$$

Προς το παρόν αυτό είναι απλώς συντομογραφία. Η μιγαδική εκθετική συνάρτηση θα μελετηθεί αργότερα συστηματικά.

Αν $z = x + iy \neq 0$, γράφουμε

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

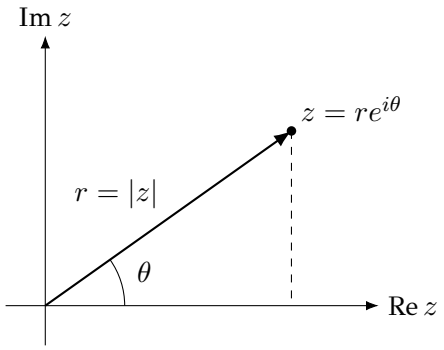
Υπάρχει $\theta \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta.$$

Άρα

$$\boxed{z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}.}$$

Ο αριθμός θ λέγεται *όρισμα* του z και γράφουμε $\theta = \arg(z)$. Δεν είναι μοναδικός: αν θ είναι όρισμα, τότε και $\theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, είναι όρισμα.



Θεώρημα 2.1. *Για κάθε $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$,*

$$e^{i\theta}e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)}.$$

Απόδειξη. Από τους τύπους πρόσθεσης,

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\varphi + i\sin\varphi) &= \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi + i(\sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi)\\ &= \cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi).\end{aligned}$$

□

Άρα αν

$$z = re^{i\theta}, \qquad w = se^{i\varphi},$$

τότε

$$zw = rs\,e^{i(\theta+\varphi)}.$$

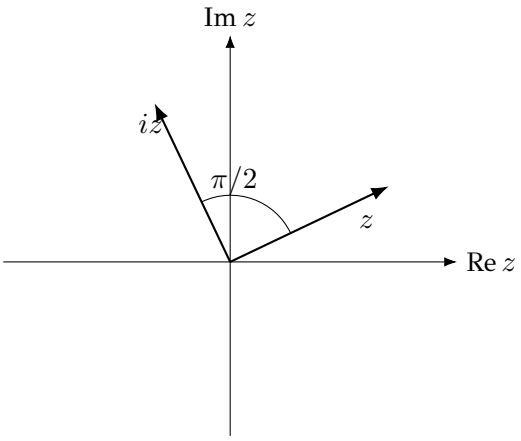
Δηλαδή στον πολλαπλασιασμό *πολλαπλασιάζονται τα μέτρα και προστίθενται τα ορίσματα.*

Παρατήρηση 2.2 (Μια πρώτη γεωμετρική πράξη). Ο πολλαπλασιασμός με $i = e^{i\pi/2}$ στρέφει κάθε σημείο κατά γωνία $\pi/2$ αριστερόστροφα γύρω από το 0:

$$z = x + iy \quad \Longrightarrow \quad iz = -y + ix.$$

Στις συντεταγμένες,

$$(x, y) \longmapsto (-y, x).$$



Παράδειγμα 2.3 (Πολική μορφή). Για τους αριθμούς

$$5, \qquad -3i, \qquad \sqrt{3}+i, \qquad 1+i, \qquad 1-i, \qquad -1-i,$$

βρίσκουμε το μέτρο και ένα όρισμα και τους γράφουμε σε πολική μορφή:

z	$\lvert z\rvert$	θ	$z = \lvert z\rvert e^{i\theta}$
5	5	0	$5e^{i0}$
$-3i$	3	$-\pi/2$	$3e^{-i\pi/2}$
$\sqrt{3}+i$	2	$\pi/6$	$2e^{i\pi/6}$
$1+i$	$\sqrt{2}$	$\pi/4$	$\sqrt{2}e^{i\pi/4}$
$1-i$	$\sqrt{2}$	$-\pi/4$	$\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$
$-1-i$	$\sqrt{2}$	$-3\pi/4$	$\sqrt{2}e^{-3i\pi/4}$

Φυσικά, σε κάθε γραμμή μπορούμε να αντικαταστήσουμε το θ με $\theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

3 Εκθετική μορφή και γινόμενο μιγαδικών

Θυμόμαστε ότι για $\theta \in \mathbb{R}$ ορίζουμε

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Η σημειογραφία αυτή δεν είναι τυχαία: η μιγαδική εκθετική ικανοποιεί τον ίδιο βασικό κανόνα με την πραγματική εκθετική.

Πρόταση 3.1. *Για κάθε $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$,*

$$e^{i(\theta+\varphi)} = e^{i\theta}e^{i\varphi}.$$

Απόδειξη. Από τον ορισμό,

$$e^{i(\theta+\varphi)} = \cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi).$$

Χρησιμοποιώντας τους τύπους πρόσθεσης,

$$\cos(\theta+\varphi) = \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi$$

και

$$\sin(\theta+\varphi) = \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi.$$

Άρα

$$\begin{aligned} e^{i(\theta+\varphi)} &= \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi \\ &\quad + i\big(\sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi\big) \\ &= (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ &= e^{i\theta}e^{i\varphi}. \end{aligned}$$

□

Τώρα, αν

$$\alpha = a + ib \in \mathbb{C},$$

ορίζουμε

$$e^{\alpha} = e^{a}e^{ib}.$$

Πρόταση 3.2. *Για κάθε* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

$$\boxed{e^{\alpha+\beta} = e^{\alpha}e^{\beta}.}$$

Απόδειξη. Γράφουμε

$$\alpha = a_1 + ia_2, \qquad \beta = b_1 + ib_2.$$

Τότε

$$\alpha + \beta = (a_1 + b_1) + i(a_2 + b_2),$$

οπότε

$$\begin{aligned} e^{\alpha+\beta} &= e^{a_1+b_1}e^{i(a_2+b_2)} \\ &= e^{a_1}e^{b_1}e^{ia_2}e^{ib_2} \\ &= \big(e^{a_1}e^{ia_2}\big)\big(e^{b_1}e^{ib_2}\big) \\ &= e^{\alpha}e^{\beta}. \end{aligned}$$

□

Η γεωμετρία του γινομένου

Έστω

$$z_1 = r_1e^{i\theta_1}, \qquad z_2 = r_2e^{i\theta_2}.$$

Τότε

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1r_2e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} \\ &= r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}. \end{aligned}$$

Άρα

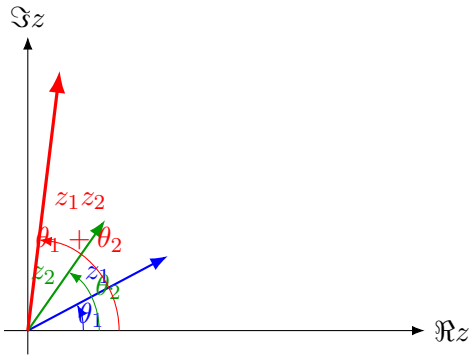
$$\boxed{|z_1z_2| = |z_1||z_2|}$$

και

$$\boxed{\arg(z_1z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \pmod{2\pi}.}$$

Δηλαδή:

στο γινόμενο πολλαπλασιάζουμε τα μήκη και προσθέτουμε τις γωνίες.



Ένα ιδιαίτερα απλό παράδειγμα είναι ο πολλαπλασιασμός με i:

$$i = e^{i\pi/2}.$$

Άρα

$$iz$$

έχει το ίδιο μέτρο με το z, ενώ η γωνία του αυξάνεται κατά $\pi/2$.

Ο πολλαπλασιασμός με i είναι στροφή κατά 90°.

Από τον ίδιο κανόνα προκύπτει αμέσως ότι

$$\left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta}.$$

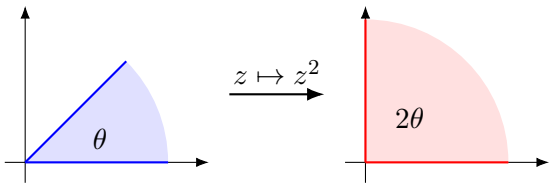
Επομένως η απεικόνιση

$$z \longmapsto z^n$$

κάνει δύο πράγματα:

$$r \longmapsto r^n, \qquad \theta \longmapsto n\theta.$$

Έτσι η γωνία πολλαπλασιάζεται επί n.



4 Οι n-οστές ρίζες ενός μιγαδικού αριθμού

Έστω

$$z = re^{i\theta}, \qquad r > 0.$$

Θέλουμε να βρούμε όλους τους $w \in \mathbb{C}$ για τους οποίους

$$w^n = z.$$

Γράφουμε

$$w = te^{i\varphi}, \qquad t \geq 0.$$

Τότε

$$w^n = t^n e^{in\varphi}.$$

Η εξίσωση

$$w^n = re^{i\theta}$$

ισοδυναμεί με

$$t^n = r$$

και

$$e^{in\varphi} = e^{i\theta}.$$

Η πρώτη εξίσωση δίνει

$$t = r^{1/n}.$$

Για τη δεύτερη πρέπει

$$n\varphi = \theta + 2\pi k, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Άρα

$$\varphi = \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}.$$

Έτσι οι λύσεις είναι

$$\boxed{w_k = r^{1/n} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.}$$

Δεν χρειάζονται άλλες τιμές του k, επειδή η αντικατάσταση $k \mapsto k + n$ προσθέτει 2π στη γωνία και επομένως δίνει το ίδιο σημείο.

Οι ρίζες της μονάδας

Θέτουμε τώρα

$$z = 1 = e^{2\pi i m}.$$

Η εξίσωση

$$w^n = 1$$

δίνει

$$|w|^n = 1,$$

άρα

$$|w| = 1.$$

Επομένως γράφουμε

$$w = e^{i\varphi}.$$

Τότε

$$w^n = e^{in\varphi} = 1.$$

Αλλά

$$1 = e^{2\pi i k}, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

οπότε

$$n\varphi = 2\pi k.$$

Άρα

$$\varphi = \frac{2\pi k}{n}.$$

Συνεπώς οι n-οστές ρίζες της μονάδας είναι

$$\boxed{\omega_k = e^{2\pi i k/n}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.}$$

Είναι ακριβώς n διαφορετικοί αριθμοί.

Πράγματι, αν

$$e^{2\pi ik/n} = e^{2\pi i\ell/n},$$

τότε

$$\frac{2\pi(k-\ell)}{n} \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

Άρα

$$n \mid (k-\ell).$$

Για

$$0 \leq k, \ell \leq n-1$$

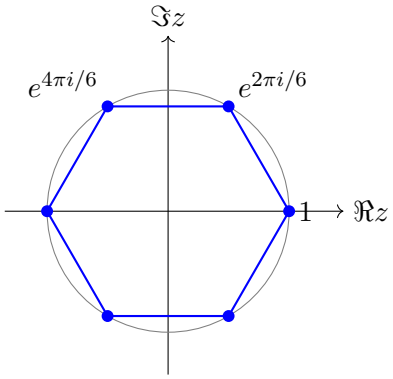
αυτό συνεπάγεται

$$k = \ell.$$

Γεωμετρικά, οι ρίζες αυτές βρίσκονται στον μοναδιαίο κύκλο και οι διαδοχικές γωνίες τους διαφέρουν κατά

$$\frac{2\pi}{n}.$$

Επομένως αποτελούν τις κορυφές κανονικού n-γώνου.



Αν θέσουμε

$$\omega = e^{2\pi i/n},$$

τότε όλες οι ρίζες της μονάδας γράφονται

$$\boxed{1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}.}$$

Επιπλέον,

$$\omega^n = 1.$$

5 Όρια και συμπαγή σύνολα

Για να ορίσουμε τη μιγαδική παράγωγο θα χρειαστούμε πρώτα την έννοια του ορίου στο μιγαδικό επίπεδο.

Επειδή

$$\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2,$$

οι βασικές τοπολογικές έννοιες εκφράζονται μέσω της απόστασης

$$|z-w|.$$

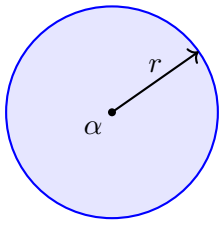
Ανοικτοί και κλειστοί δίσκοι

Ορισμός 5.1. Για $\alpha \in \mathbb{C}$ και $r > 0$, ο *ανοικτός δίσκος* με κέντρο α και ακτίνα r είναι

$$D(\alpha, r) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z - \alpha| < r\}.$$

Ο αντίστοιχος κλειστός δίσκος είναι

$$\overline{D}(\alpha, r) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z - \alpha| \leq r\}.$$

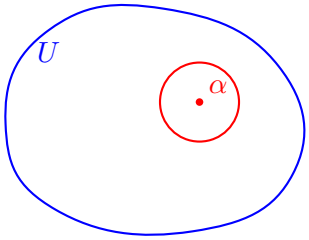


$D(\alpha, r)$

Ορισμός 5.2. Ένα σύνολο $U \subset \mathbb{C}$ λέγεται *ανοικτό* αν για κάθε $\alpha \in U$ υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε

$$D(\alpha, r) \subset U.$$

Η ακτίνα r επιτρέπεται να εξαρτάται από το σημείο α.



$D(\alpha, r) \subset U$

Παραδείγματα ανοικτών συνόλων είναι:

$$\{z = x + iy : \ y > 0\}$$

και

$$\{z = x + iy : \ x > 0, \ y > 0\}.$$

Αν όμως προσθέσουμε στο πρώτο τεταρτημόριο τους δύο άξονες, το σύνολο δεν είναι πλέον ανοικτό.

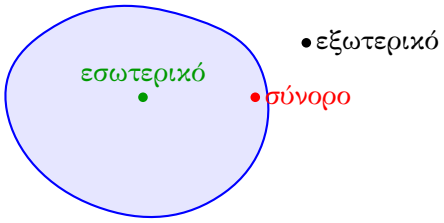
Ορισμός 5.3. Έστω $S \subset \mathbb{C}$.

Ένα σημείο α λέγεται *εσωτερικό σημείο* του S αν υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε

$$D(\alpha, r) \subset S.$$

Ένα σημείο α λέγεται *συνοριακό σημείο* του S αν κάθε δίσκος $D(\alpha, r)$ περιέχει τόσο σημεία του S όσο και σημεία του $\mathbb{C} \setminus S$.

Ένα σημείο α λέγεται *σημείο προσκόλλησης* (adherent point) του S αν κάθε δίσκος $D(\alpha, r)$ περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο του S.



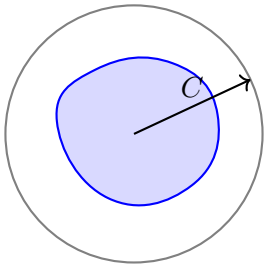
Ορισμός 5.4. Το S λέγεται *κλειστό* αν περιέχει όλα τα συνοριακά σημεία του.

Η *κλειστότητα* του S, συμβολικά $\overline{S}$, είναι το S μαζί με όλα τα συνοριακά του σημεία.

Ορισμός 5.5. Ένα σύνολο $S \subset \mathbb{C}$ λέγεται *φραγμένο* αν υπάρχει $C > 0$ τέτοιο ώστε

$$|z| \leq C \qquad \text{για κάθε } z \in S.$$

Ισοδύναμα, ολόκληρο το S χωρά μέσα σε κάποιον κλειστό δίσκο με κέντρο το 0.



$S \subset \overline{D}(0, C)$

Όρια

Ορισμός 5.6. Έστω $f : S \to \mathbb{C}$, και έστω α σημείο προσκόλλησης του S. Λέμε ότι

$$\lim_{z \to \alpha} f(z) = w$$

αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

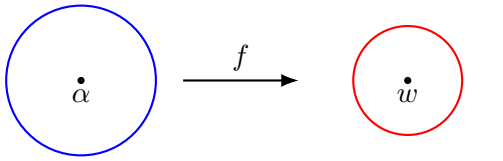
$$z \in S, \qquad |z - \alpha| < \delta$$

να συνεπάγεται

$$|f(z) - w| < \varepsilon.$$

Δηλαδή:

$$\boxed{z \text{ κοντά στο } \alpha \quad \Longrightarrow \quad f(z) \text{ κοντά στο } w.}$$



$|z - \alpha| < \delta$ $\qquad$ $|f(z) - w| < \varepsilon$

Ορισμός 5.7. Αν $\alpha \in S$, η f λέγεται *συνεχής στο* α αν

$$\lim_{z \to \alpha} f(z) = f(\alpha).$$

Οι συνηθισμένοι κανόνες των ορίων ισχύουν όπως στον πραγματικό λογισμό:

$$\lim(f+g) = \lim f + \lim g,$$
$$\lim(fg) = (\lim f)(\lim g),$$

και, όταν ο παρονομαστής δεν μηδενίζεται,

$$\lim \frac{f}{g} = \frac{\lim f}{\lim g}.$$

Ακολουθίες στο $\mathbb{C}$

Λέμε ότι

$$z_n \longrightarrow z$$

αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει N τέτοιο ώστε

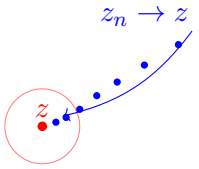
$$n \geq N \quad \Longrightarrow \quad |z_n - z| < \varepsilon.$$

Αν

$$z_n = x_n + iy_n, \qquad z = x + iy,$$

τότε

$$\boxed{z_n \to z \iff x_n \to x \text{ και } y_n \to y.}$$



Πρόταση 5.8. *Αν*

$$z_n \to z,$$

τότε

$$\boxed{|z_n| \to |z|.}$$

Απόδειξη. Από την αντίστροφη τριγωνική ανισότητα,

$$\big||z_n| - |z|\big| \leq |z_n - z|.$$

Εφόσον $z_n \to z$, έχουμε

$$|z_n - z| \to 0,$$

και επομένως

$$\big||z_n| - |z|\big| \to 0.$$

Άρα

$$|z_n| \to |z|.$$

□

Ορισμός 5.9. Μια ακολουθία (z_n) λέγεται *ακολουθία Cauchy* αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει N τέτοιο ώστε

$$m, n \geq N \quad \Longrightarrow \quad |z_m - z_n| < \varepsilon.$$

Αν

$$z_n = x_n + iy_n,$$

τότε

$$(z_n) \text{ είναι Cauchy } \iff (x_n) \text{ και } (y_n) \text{ είναι Cauchy.}$$

Επειδή κάθε πραγματική ακολουθία Cauchy συγκλίνει, παίρνουμε:

Πρόταση 5.10. *Κάθε ακολουθία Cauchy στο $\mathbb{C}$ συγκλίνει.*

Με άλλα λόγια, ο μετρικός χώρος $\mathbb{C}$ είναι *πλήρης*.

6 Συμπαγή σύνολα

Ορισμός 6.1. Ένα σημείο $v \in \mathbb{C}$ λέγεται *σημείο συσσώρευσης* μιας ακολουθίας (z_n) αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν άπειρα n τέτοια ώστε

$$|z_n - v| < \varepsilon.$$

Ισοδύναμα, κάποια υπακολουθία της (z_n) συγκλίνει στο v.

Ορισμός 6.2. Ένα σύνολο $K \subset \mathbb{C}$ λέγεται *συμπαγές* αν κάθε ακολουθία $(z_n) \subset K$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία με όριο που ανήκει στο K.

Η κρίσιμη πρόταση στο $\mathbb{C}$ είναι η εξής.

Θεώρημα 6.3 (Heine–Borel). *Ένα σύνολο $K \subset \mathbb{C}$ είναι συμπαγές αν και μόνο αν είναι κλειστό και φραγμένο.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε πρώτα ότι το K είναι συμπαγές.

Αν το K δεν ήταν φραγμένο, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θα μπορούσαμε να επιλέξουμε $z_n \in K$ τέτοιο ώστε

$$|z_n| > n.$$

Επειδή το K είναι συμπαγές, η ακολουθία (z_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία:

$$z_{n_k} \to z \qquad \text{για κάποιο } z \in K.$$

Από την προηγούμενη πρόταση,

$$|z_{n_k}| \to |z| < \infty.$$

Από την άλλη,

$$|z_{n_k}| > n_k \to \infty,$$

που είναι άτοπο.

Άρα το K είναι φραγμένο.

Για να δείξουμε ότι είναι κλειστό, έστω

$$z \in \overline{K}.$$

Τότε για κάθε n μπορούμε να επιλέξουμε $z_n \in K$ ώστε

$$|z_n - z| < \frac{1}{n}.$$

Άρα

$$z_n \to z.$$

Επειδή το K είναι συμπαγές, υπάρχει υπακολουθία

$$z_{n_k} \to w \qquad \text{για κάποιο } w \in K.$$

Όμως, ως υπακολουθία της (z_n), έχουμε επίσης

$$z_{n_k} \to z.$$

Από τη μοναδικότητα του ορίου,

$$w = z.$$

Επομένως

$$z \in K,$$

και άρα το K είναι κλειστό.

Αντίστροφα, έστω ότι το K είναι κλειστό και φραγμένο. Για κάθε ακολουθία

$$z_n = x_n + iy_n \in K$$

οι πραγματικές ακολουθίες (x_n) και (y_n) είναι φραγμένες.

Από το θεώρημα Bolzano–Weierstrass υπάρχει υπακολουθία (x_{n_k}) που συγκλίνει σε κάποιο $a \in \mathbb{R}$. Από την αντίστοιχη υπακολουθία (y_{n_k}) επιλέγουμε υπο-υπακολουθία $(y_{n_{k_j}})$ που συγκλίνει σε κάποιο $b \in \mathbb{R}$.

Τότε

$$x_{n_{k_j}} \to a, \qquad y_{n_{k_j}} \to b,$$

και επομένως

$$z_{n_{k_j}} = x_{n_{k_j}} + iy_{n_{k_j}} \longrightarrow a + ib.$$

Επειδή το K είναι κλειστό και όλα τα $z_{n_{k_j}}$ ανήκουν στο K, έχουμε

$$a + ib \in K.$$

Άρα κάθε ακολουθία στο K έχει συγκλίνουσα υπακολουθία με όριο στο K, οπότε το K είναι συμπαγές. □

Γιατί μας ενδιαφέρει η συμπάγεια;

Πρόταση 6.4. *Αν $K \subset \mathbb{C}$ είναι συμπαγές και*

$$f : K \to \mathbb{C}$$

είναι συνεχής, τότε το $f(K)$ είναι συμπαγές.

Απόδειξη. Έστω $(w_n) \subset f(K)$. Για κάθε n υπάρχει $z_n \in K$ ώστε

$$w_n = f(z_n).$$

Επειδή K είναι συμπαγές, υπάρχει υπακολουθία

$$z_{n_k} \to z \in K.$$

Λόγω συνέχειας,

$$w_{n_k} = f(z_{n_k}) \longrightarrow f(z).$$

Άρα $f(K)$ είναι συμπαγές. □

Μια ιδιαίτερα σημαντική συνέπεια είναι η εξής.

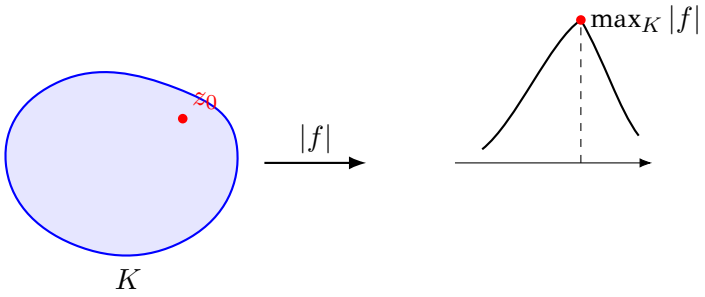
Πόρισμα 6.5. *Αν K είναι συμπαγές και $f : K \to \mathbb{C}$ συνεχής, τότε η συνάρτηση*

$$z \longmapsto |f(z)|$$

παίρνει μέγιστη τιμή στο K.

Δηλαδή υπάρχει $z_0 \in K$ τέτοιο ώστε

$$|f(z)| \leq |f(z_0)| \qquad \text{για κάθε } z \in K.$$



Αυτός είναι ένας από τους βασικούς λόγους για τους οποίους τα συμπαγή σύνολα θα εμφανίζονται συνεχώς στη μιγαδική ανάλυση.

Πόρισμα 6.6. *Αν K είναι συμπαγές και $f : K \to \mathbb{C}$ συνεχής, τότε η συνάρτηση*

$$z \longmapsto |f(z)|$$

παίρνει μέγιστη τιμή στο K.

Δηλαδή υπάρχει $z_0 \in K$ τέτοιο ώστε

$$|f(z)| \leq |f(z_0)| \qquad \text{για κάθε } z \in K.$$

Απόδειξη. Η συνάρτηση

$$g : K \to \mathbb{R}, \qquad g(z) = |f(z)|,$$

είναι συνεχής, αφού η f είναι συνεχής και η συνάρτηση

$$w \longmapsto |w|$$

είναι συνεχής στο $\mathbb{C}$.

Επειδή το K είναι συμπαγές, η συνεχής πραγματική συνάρτηση g παίρνει τη μέγιστη τιμή της στο K. Άρα υπάρχει $z_0 \in K$ τέτοιο ώστε

$$g(z) \leq g(z_0) \qquad \text{για κάθε } z \in K.$$

Δηλαδή

$$|f(z)| \leq |f(z_0)| \qquad \text{για κάθε } z \in K.$$

□

Ομοιόμορφη συνέχεια σε συμπαγή σύνολα

Υπενθυμίζουμε ότι μια συνάρτηση

$$f : S \to \mathbb{C}$$

λέγεται *ομοιόμορφα συνεχής* στο S αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$z, w \in S, \qquad |z - w| < \delta$$

να συνεπάγεται

$$|f(z) - f(w)| < \varepsilon.$$

Η διαφορά με τη συνήθη συνέχεια είναι ότι εδώ το δ εξαρτάται μόνο από το ε, και όχι από το σημείο του S.

Θεώρημα 6.7. *Έστω $K \subset \mathbb{C}$ συμπαγές και*

$$f : K \to \mathbb{C}$$

συνεχής. Τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο K.

Απόδειξη. Υποθέτουμε προς άτοπο ότι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Τότε υπάρχει $\varepsilon_0 > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\delta > 0$ να υπάρχουν $z, w \in K$ με

$$|z - w| < \delta,$$

αλλά

$$|f(z) - f(w)| \geq \varepsilon_0.$$

Ειδικότερα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να επιλέξουμε $z_n, w_n \in K$ τέτοια ώστε

$$|z_n - w_n| < \frac{1}{n}$$

και

$$|f(z_n) - f(w_n)| \geq \varepsilon_0.$$

Επειδή το K είναι συμπαγές, η ακολουθία (z_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία:

$$z_{n_k} \to z \qquad \text{για κάποιο } z \in K.$$

Όμως

$$|w_{n_k} - z| \leq |w_{n_k} - z_{n_k}| + |z_{n_k} - z|.$$

Και τα δύο μέλη στο δεξί μέρος τείνουν στο 0. Άρα

$$w_{n_k} \to z.$$

Από τη συνέχεια της f στο z,

$$f(z_{n_k}) \to f(z) \qquad \text{και} \qquad f(w_{n_k}) \to f(z).$$

Επομένως

$$|f(z_{n_k}) - f(w_{n_k})| \to 0,$$

σε αντίφαση με

$$|f(z_{n_k}) - f(w_{n_k})| \geq \varepsilon_0.$$

Άρα η f είναι ομοιόμορφα συνεχής. □

Πεπερασμένες καλύψεις συμπαγών συνόλων

Η συμπάγεια έχει και μια πολύ χρήσιμη γεωμετρική συνέπεια.

Θεώρημα 6.8. *Έστω $K \subset \mathbb{C}$ συμπαγές και $r > 0$. Τότε υπάρχουν πεπερασμένα σημεία*

$$z_1, \ldots, z_N \in K$$

τέτοια ώστε

$$\boxed{K \subset D(z_1, r) \cup \cdots \cup D(z_N, r).}$$

Δηλαδή, για κάθε σταθερή ακτίνα $r > 0$, ένα συμπαγές σύνολο μπορεί να καλυφθεί από πεπερασμένους ανοικτούς δίσκους ακτίνας r.

Απόδειξη. Υποθέτουμε προς άτοπο ότι αυτό δεν ισχύει.

Επιλέγουμε αρχικά ένα σημείο

$$z_1 \in K$$

και θεωρούμε τον δίσκο

$$D(z_1, r).$$

Αφού ένας μόνο τέτοιος δίσκος δεν καλύπτει το K, υπάρχει

$$z_2 \in K \setminus D(z_1, r).$$

Στη συνέχεια, αφού ούτε οι δύο δίσκοι

$$D(z_1, r), \qquad D(z_2, r)$$

καλύπτουν το K, μπορούμε να επιλέξουμε

$$z_3 \in K \setminus \big(D(z_1, r) \cup D(z_2, r)\big).$$

Συνεχίζοντας επαγωγικά, κατασκευάζουμε ακολουθία $(z_n) \subset K$ τέτοια ώστε

$$z_{n+1} \notin D(z_1, r) \cup \cdots \cup D(z_n, r).$$

Άρα για $m \neq n$,

$$|z_n - z_m| \geq r.$$

Επειδή το K είναι συμπαγές, η (z_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία

$$z_{n_k} \to z \in K.$$

Μια συγκλίνουσα ακολουθία είναι Cauchy, άρα για αρκετά μεγάλα k, ℓ θα έχουμε

$$|z_{n_k} - z_{n_\ell}| < r,$$

σε αντίφαση με

$$|z_{n_k} - z_{n_\ell}| \geq r.$$

Άρα υπάρχει πεπερασμένη κάλυψη του K από ανοικτούς δίσκους ακτίνας r. □

Ανοικτές καλύψεις

Έστω $S \subset \mathbb{C}$ και έστω

$$\{U_i\}_{i \in I}$$

μια οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{C}$.

Λέμε ότι η οικογένεια αυτή είναι μια *ανοικτή κάλυψη* του S αν

$$S \subset \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Αν υπάρχουν πεπερασμένοι δείκτες

$$i_1, \ldots, i_N \in I$$

τέτοιοι ώστε

$$S \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_N},$$

τότε τα σύνολα

$$U_{i_1}, \ldots, U_{i_N}$$

λέγονται *πεπερασμένη υποκάλυψη* της αρχικής κάλυψης.

Θεώρημα 6.9. *Έστω $K \subset \mathbb{C}$ συμπαγές και*

$$\{U_i\}_{i\in I}$$

μια ανοικτή κάλυψη του K. Τότε υπάρχουν $i_1, \dots, i_N \in I$ τέτοια ώστε

$$K \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_N}.$$

Απόδειξη. Για $z \in K$ θέτουμε

$$\rho(z) = \sup\{r \in [0,1] : B(z,r) \subset U_i \text{ για κάποιο } i \in I\}.$$

Επειδή η οικογένεια $\{U_i\}_{i\in I}$ καλύπτει το K και κάθε U_i είναι ανοικτό, έχουμε

$$\rho(z) > 0 \qquad \text{για κάθε } z \in K.$$

Επιπλέον, η ρ είναι 1-Lipschitz. Πράγματι, αν $z, w \in K$, τότε

$$|\rho(z) - \rho(w)| \le |z - w|.$$

Για να το δούμε, έστω $s < \rho(z)$. Τότε υπάρχει $r > s$ και $i \in I$ τέτοια ώστε

$$B(z,r) \subset U_i.$$

Από την τριγωνική ανισότητα,

$$B\big(w, r - |z-w|\big) \subset B(z,r),$$

όποτε $r > |z-w|$. Άρα

$$\rho(w) \ge s - |z-w|.$$

Αφήνοντας $s \uparrow \rho(z)$, παίρνουμε

$$\rho(w) \ge \rho(z) - |z-w|.$$

Ανταλλάσσοντας z και w, προκύπτει η ζητούμενη ανισότητα.

Άρα η ρ είναι συνεχής. Επειδή το K είναι συμπαγές, η ρ παίρνει την ελάχιστη τιμή της στο K. Θέτουμε

$$\delta = \min_{z\in K} \rho(z).$$

Εφόσον $\rho(z) > 0$ για κάθε $z \in K$, έχουμε

$$\delta > 0.$$

Από το προηγούμενο θεώρημα, υπάρχουν $z_1, \dots, z_N \in K$ τέτοια ώστε

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{N} B\left(z_j, \frac{\delta}{2}\right).$$

Για κάθε j,

$$\frac{\delta}{2} < \rho(z_j),$$

οπότε, από τον ορισμό της ρ, υπάρχει $i_j \in I$ τέτοιο ώστε

$$B\left(z_j, \frac{\delta}{2}\right) \subset U_{i_j}.$$

Επομένως

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{N} B\left(z_j, \frac{\delta}{2}\right) \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_N}.$$

Άρα η ανοικτή κάλυψη έχει πεπερασμένη υποκάλυψη. □

Πριν περάσουμε στη μιγαδική παράγωγο, ένα απλό παράδειγμα δείχνει γιατί η ιδιότητα της πεπερασμένης υποκάλυψης είναι ουσιαστική και δεν ισχύει για κάθε σύνολο.

Παράδειγμα 6.10 (Ανοικτή κάλυψη χωρίς πεπερασμένη υποκάλυψη). Θεωρούμε το $\mathbb{C}$ και, για $n \geq 1$, τους ανοικτούς δίσκους

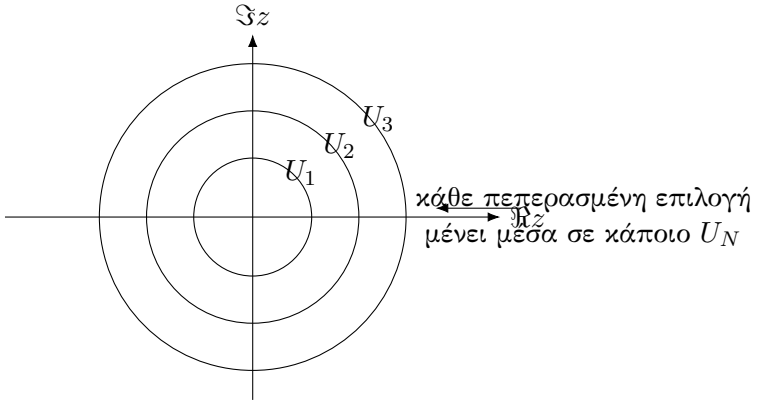
$$U_n = D(0, n) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < n\}.$$

Τότε

$$\mathbb{C} = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n,$$

άρα $(U_n)_{n\geq 1}$ είναι ανοικτή κάλυψη του $\mathbb{C}$. Δεν έχει όμως πεπερασμένη υποκάλυψη: αν επιλέξουμε πεπερασμένα πολλά $U_{n_1}, \ldots, U_{n_k}$ και $N = \max\{n_1, \ldots, n_k\}$, τότε

$$U_{n_1} \cup \cdots \cup U_{n_k} = U_N \neq \mathbb{C}.$$



Η συμπάγεια επιβάλλει ακριβώς την αντίθετη συμπεριφορά: κάθε ανοικτή κάλυψη ενός συμπαγούς συνόλου έχει πεπερασμένη υποκάλυψη. Από εδώ και πέρα επιστρέφουμε στη βασική αναλυτική δομή του $\mathbb{C}$.

7 Μιγαδικές συναρτήσεις και βασικές απεικονίσεις

Ορισμός 7.1. Έστω $S \subseteq \mathbb{C}$. Μια μιγαδική συνάρτηση είναι μια απεικόνιση

$$f : S \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Αν $z = x + iy$, μπορούμε να γράψουμε

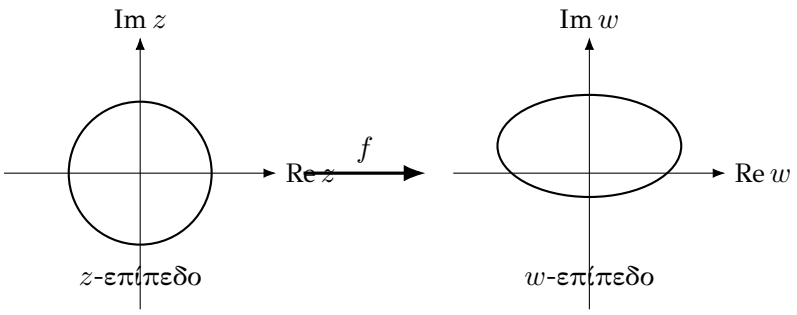
$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

όπου $u, v : S \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της f.

Έτσι, από τη σκοπιά του Λογισμού πολλών μεταβλητών, μια μιγαδική συνάρτηση είναι μια απεικόνιση

$$(x, y) \longmapsto (u(x, y), v(x, y))$$

από ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ σε ένα άλλο. Για να την οπτικοποιήσουμε χρησιμοποιούμε δύο επίπεδα, το z-επίπεδο και το w-επίπεδο.



Μεταφορά

Για σταθερό $a \in \mathbb{C}$, η απεικόνιση

$$f(z) = z + a$$

μεταφέρει κάθε σημείο κατά το διάνυσμα a. Για παράδειγμα,

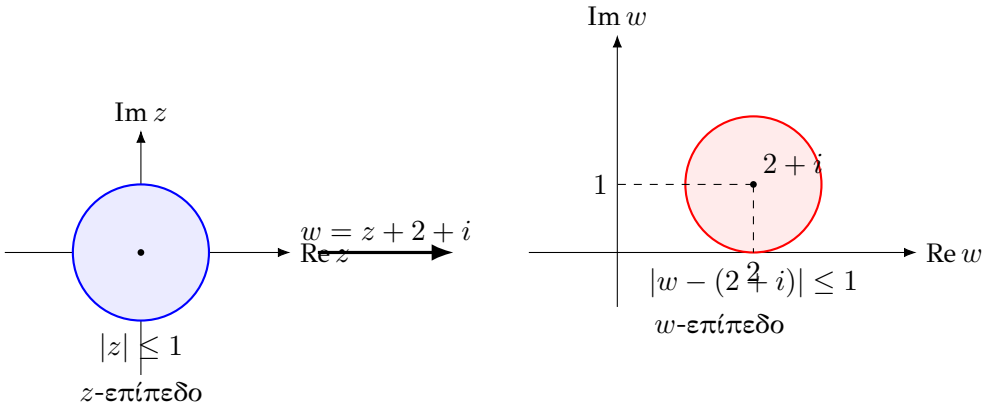
$$f(z) = z + 2 + i$$

μεταφέρει τον μοναδιαίο δίσκο

$$D = \{z : |z| \leq 1\}$$

στον δίσκο

$$f(D) = \{w : |w - (2 + i)| \leq 1\}.$$



Διαστολή: η απεικόνιση $f(z) = 3z$

Θεωρούμε το τετράγωνο

$$S = \{x + iy : 1 \leq x \leq 3,\ -1 \leq y \leq 1\}.$$

Έχει πλευρά 2 και κέντρο το σημείο 2.

Η απεικόνιση

$$f(z) = 3z$$

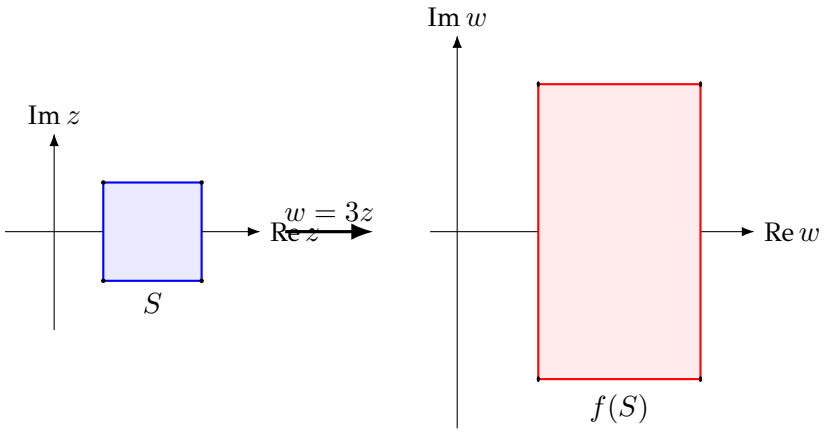
τριπλασιάζει όλες τις αποστάσεις από το 0 χωρίς να αλλάζει τις γωνίες. Οι κορυφές

$$1 + i, \quad 1 - i, \quad 3 + i, \quad 3 - i$$

στέλνονται αντίστοιχα στις

$$3 + 3i, \quad 3 - 3i, \quad 9 + 3i, \quad 9 - 3i.$$

Άρα η εικόνα είναι τετράγωνο πλευράς 6 και κέντρο το 6.



Διαστολή και περιστροφή: η απεικόνιση $f(z) = 2iz$

Στο ίδιο τετράγωνο S, θεωρούμε τώρα

$$f(z) = 2iz.$$

Επειδή

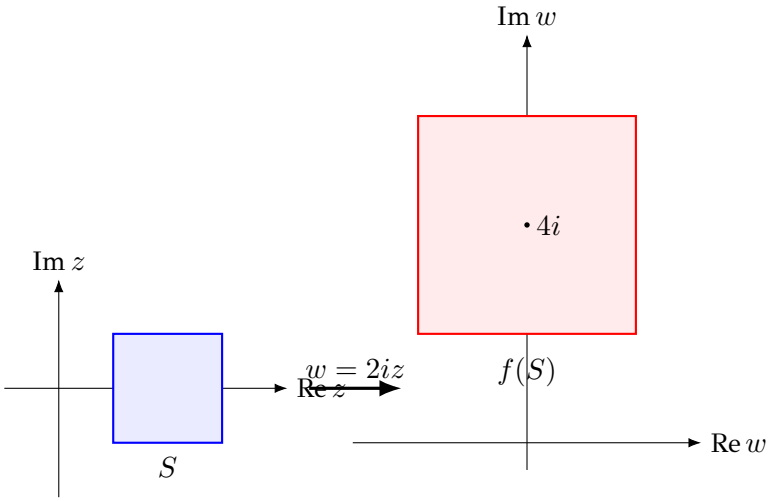
$$2i = 2e^{i\pi/2},$$

η απεικόνιση πρώτα διαστέλλει κατά παράγοντα 2 και στη συνέχεια περιστρέφει αριστερόστροφα κατά $\pi/2$.

Οι κορυφές μετασχηματίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned} 1 + i &\longmapsto -2 + 2i, \\ 1 - i &\longmapsto 2 + 2i, \\ 3 + i &\longmapsto -2 + 6i, \\ 3 - i &\longmapsto 2 + 6i. \end{aligned}$$

Άρα η εικόνα είναι τετράγωνο πλευράς 4 με κέντρο το $4i$.



Αντιστροφή: η απεικόνιση $f(z) = 1/z$

Αν

$$z = re^{i\theta} \neq 0,$$

τότε

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}.$$

Άρα η αντιστροφή κάνει

$$r \longmapsto \frac{1}{r}, \qquad \theta \longmapsto -\theta.$$

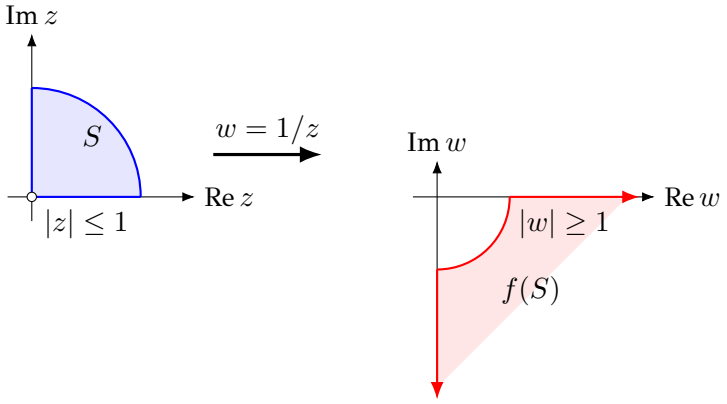
Θεωρούμε το τεταρτοκυκλικό χωρίο

$$S = \left\{ z : 0 < |z| \leq 1, \quad 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Τότε

$$f(S) = \left\{ w : |w| \geq 1, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \arg w \leq 0 \right\}.$$

Δηλαδή το εσωτερικό του μοναδιαίου τεταρτοκυκλίου στον πρώτο τεταρτημόριο μεταφέρεται στο εξωτερικό του μοναδιαίου κύκλου στον τέταρτο τεταρτημόριο.



Η απεικόνιση $f(z) = z^2$

Θεωρούμε την κατακόρυφη λωρίδα

$$S = \{z = x + iy : 1 \leq x \leq 2\}.$$

Αν

$$w = z^2 = u + iv,$$

τότε

$$u = x^2 - y^2, \qquad v = 2xy.$$

Για σταθερό $x = x_0$ έχουμε

$$y = \frac{v}{2x_0},$$

οπότε

$$u = x_0^2 - \frac{v^2}{4x_0^2}.$$

Άρα κάθε κατακόρυφη ευθεία $x = x_0$ μετασχηματίζεται σε παραβολή που ανοίγει προς τα αριστερά.

Οι δύο συνοριακές ευθείες $x = 1$ και $x = 2$ μετασχηματίζονται στις παραβολές

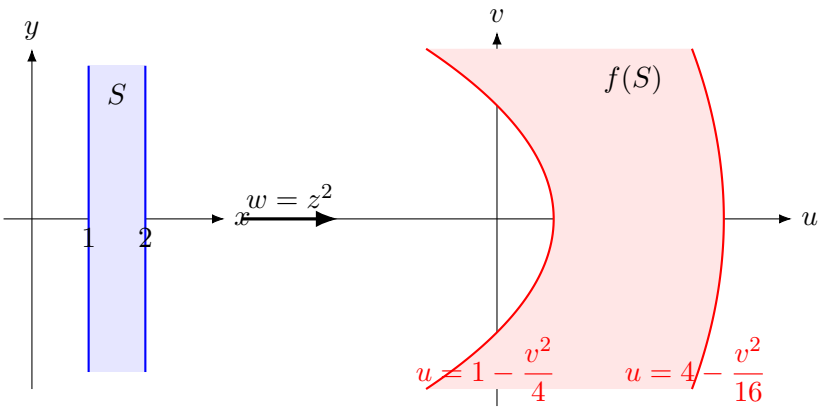
$$u = 1 - \frac{v^2}{4}$$

και

$$u = 4 - \frac{v^2}{16},$$

αντίστοιχα. Επομένως

$$f(S) = \left\{ u + iv : 1 - \frac{v^2}{4} \le u \le 4 - \frac{v^2}{16} \right\}.$$



Η εκθετική ως απεικόνιση

Για

$$z = x + iy$$

έχουμε

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Επομένως

$$|e^z| = e^x, \qquad \arg(e^z) = y \pmod{2\pi}.$$

Θεωρούμε το ορθογώνιο

$$S = \{x + iy : -1 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le \pi\}.$$

Για σταθερό $x = x_0$,

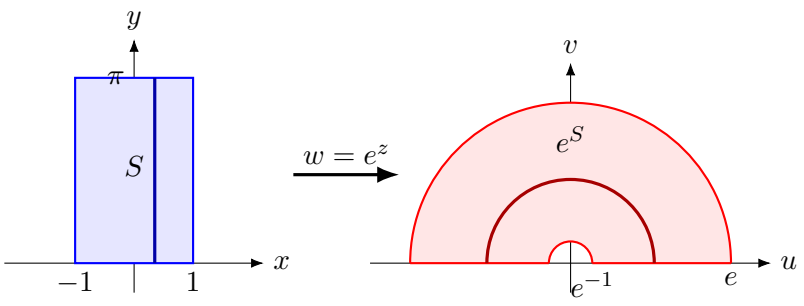
$$e^{x_0+iy} = e^{x_0} e^{iy}, \qquad 0 \le y \le \pi,$$

οπότε το κατακόρυφο ευθύγραμμο τμήμα $x = x_0$ μετασχηματίζεται στο άνω ημικύκλιο ακτίνας e^{x_0}.

Καθώς το x_0 μεταβάλλεται από -1 έως 1, η ακτίνα e^{x_0} μεταβάλλεται από e^{-1} έως e. Άρα

$$\boxed{e^S = \left\{ w : e^{-1} \le |w| \le e, \quad 0 \le \arg w \le \pi \right\}.}$$

Η εικόνα είναι λοιπόν ένα άνω ημιδακτύλιο.



Παρατήρηση 7.2. Η ταύτιση $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ μας επιτρέπει να βλέπουμε τις μιγαδικές συναρτήσεις ως απεικονίσεις του επιπέδου. Το ουσιαστικά νέο στοιχείο της Μιγαδικής Ανάλυσης θα εμφανιστεί όταν ορίσουμε τη *μιγαδική παράγωγο*: εκεί η δομή του $\mathbb{C}$ θα επιβάλει πολύ ισχυρότερους περιορισμούς από ό,τι η συνήθης διαφορισιμότητα μιας απεικόνισης $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

1. Η μιγαδική παράγωγος

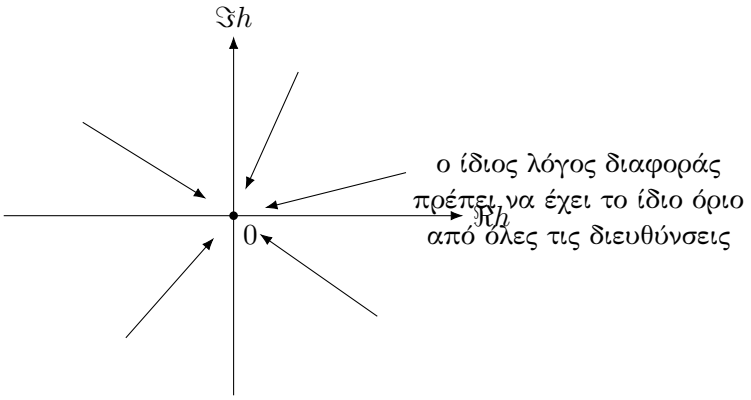
Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοικτό, $z_0 \in U$, και $f : U \to \mathbb{C}$.

Ορισμός 7.3. Η f λέγεται *μιγαδικά διαφορίσιμη* στο z_0 αν υπάρχει το όριο

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

Αν η f είναι μιγαδικά διαφορίσιμη σε κάθε σημείο του ανοικτού U, λέγεται *ολομορφική* στο U. Αν είναι ολομορφική σε όλο το $\mathbb{C}$, λέγεται *ακέραια* (entire).

Η διαφορά με την πραγματική παράγωγο μιας συνάρτησης μιας μεταβλητής είναι κρίσιμη: το $h \to 0$ μέσα στο $\mathbb{C}$ μπορεί να γίνει από *οποιαδήποτε* διεύθυνση.



Πρόταση 7.4. *Αν η f είναι μιγαδικά διαφορίσιμη στο z_0, τότε είναι συνεχής στο z_0.*

Απόδειξη. Γράφουμε

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = h \, \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

Καθώς $h \to 0$, ο πρώτος παράγοντας τείνει στο 0 και ο δεύτερος στο $f'(z_0)$. Άρα $f(z_0 + h) - f(z_0) \to 0$. □

Οι κανόνες του λογισμού

Όπως και στον πραγματικό λογισμό, αν f, g είναι μιγαδικά διαφορίσιμες, τότε

$$(f + g)' = f' + g',$$
$$(fg)' = f'g + fg',$$

και, όπου $g \neq 0$,

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Επίσης ισχύει ο κανόνας αλυσίδας

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z).$$

Μια χρήσιμη ισοδύναμη μορφή της διαφορισιμότητας είναι

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = f'(z_0)h + o(|h|), \qquad h \to 0. \tag{1}$$

Η σχέση αυτή είναι η σωστή γέφυρα προς τη διαφορισιμότητα συναρτήσεων $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

2. Σύγκριση με την πραγματική διαφορισιμότητα

Ταυτίζουμε

$$z = x + iy \longleftrightarrow (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

και γράφουμε

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Τότε η f αντιστοιχεί στην πραγματική απεικόνιση

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad F(x, y) = (u(x, y), v(x, y)).$$

Αν η F είναι πραγματικά διαφορίσιμη στο (x_0, y_0), τότε

$$F(p + h) - F(p) = Ah + o(\|h\|),$$

όπου A είναι ένας αυθαίρετος πραγματικός πίνακας 2×2:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Αν όμως η f είναι *μιγαδικά* διαφορίσιμη και

$$f'(z_0) = a + ib,$$

τότε ο γραμμικός όρος στη (1) είναι πολλαπλασιασμός με $a + ib$:

$$(a + ib)(h + ik) = (ah - bk) + i(bh + ak).$$

Άρα ο πραγματικός διαφορικός πίνακας πρέπει να έχει την ειδική μορφή

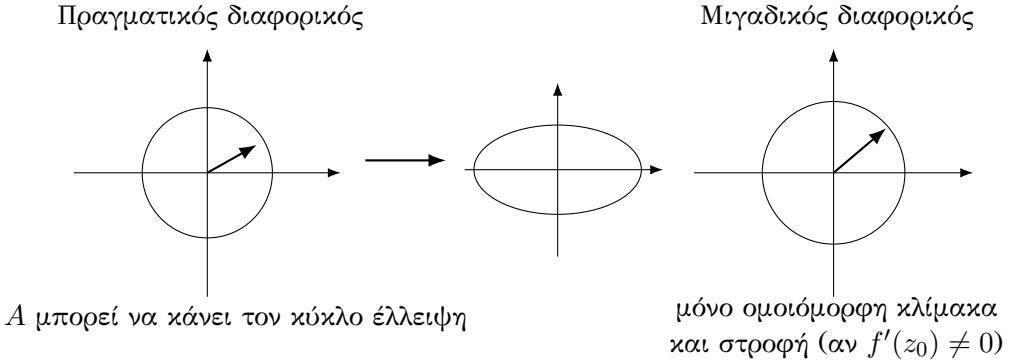
$$DF(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Αυτό είναι το ουσιαστικό σημείο:

πραγματική διαφορισιμότητα: αυθαίρετος 2×2 πίνακας

ενώ

μιγαδική διαφορισιμότητα: πολλαπλασιασμός με έναν μιγαδικό αριθμό.



Πράγματι, αν $a + ib = re^{i\theta}$, τότε ο πίνακας (2) είναι

$$r \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Τοπικά, λοιπόν, μια ολομορφική απεικόνιση με $f'(z_0) \neq 0$ μοιάζει με στροφή και ομοιόμορφη αλλαγή κλίμακας.

3. Οι εξισώσεις Cauchy–Riemann

Έστω

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$

και υποθέτουμε ότι η f είναι μιγαδικά διαφορίσιμη στο $z_0 = x_0 + iy_0$. Γράφουμε

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \frac{u(x_0+h,y_0)-u(x_0,y_0)}{h} + i\frac{v(x_0+h,y_0)-v(x_0,y_0)}{h}.$$

Το όριο του αριστερού μέλους υπάρχει, αν και μόνο αν υπάρχει το όριο του πραγματικού και φανταστικού μέρους. Πλησιάζουμε πρώτα το z_0 οριζόντια, δηλαδή με $h \in \mathbb{R}$. Τότε

$$f'(z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{u(x_0+h,y_0)-u(x_0,y_0)}{h} + i \lim_{h\to 0} \frac{v(x_0+h,y_0)-v(x_0,y_0)}{h},$$

οπότε

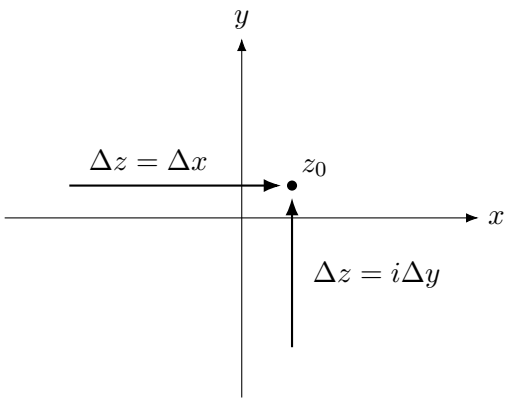
$$f'(z_0) = u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0). \tag{3}$$

Αν πλησιάσουμε κατακόρυφα, γράφουμε την αύξηση ως ih, $h \in \mathbb{R}$:

$$f'(z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+ih)-f(z_0)}{ih}.$$

Επειδή $1/i = -i$, παίρνουμε

$$f'(z_0) = v_y(x_0,y_0) - iu_y(x_0,y_0). \tag{4}$$



Εξισώνοντας τα πραγματικά και φανταστικά μέρη των (3) και (4), προκύπτουν οι *εξισώσεις Cauchy–Riemann*:

$$\boxed{u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x.} \tag{5}$$

Επιπλέον,

$$\boxed{f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y.} \tag{6}$$

Θεώρημα 7.5 (Cauchy–Riemann). *Έστω $U \subset \mathbb{R}^2$ ανοικτό και*

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y).$$

Αν η f είναι ολόμορφη στο U, τότε οι u, v είναι πραγματικά διαφορίσιμες και ικανοποιούν τις εξισώσεις Cauchy–Riemann.

Αντίστροφα, αν οι u, v είναι πραγματικά διαφορίσιμες σε ένα ανοικτό σύνολο U και ικανοποιούν τις Cauchy–Riemann, τότε η f είναι ολομορφική. Ειδικότερα, αρκεί οι πρώτες μερικές παράγωγοι να είναι συνεχείς και να ικανοποιούν τις Cauchy–Riemann.

Απόδειξη. Έστω

$$z = x + iy, \qquad w = h + ik,$$

και υποθέτουμε ότι $F = (u, v)$ είναι πραγματικά διαφορίσιμη στο (x, y). Αν

$$F(x, y) = (u(x, y), v(x, y)),$$

η πραγματική διαφορισιμότητα στο (x, y) σημαίνει

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\|F(x+h, y+k) - F(x, y) - DF(x, y)(h, k)\|_{\mathbb{R}^2}}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

Εδώ

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix},$$

οπότε

$$DF(x, y)(h, k) = \big(u_x h + u_y k,\ v_x h + v_y k\big).$$

Άρα ο ορισμός γράφεται

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left\| \begin{pmatrix} u(x+h, y+k) - u(x, y) \\ v(x+h, y+k) - v(x, y) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_x h + u_y k \\ v_x h + v_y k \end{pmatrix} \right\|}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

Τώρα χρησιμοποιούμε την ταύτιση

$$(a, b) \longleftrightarrow a + ib.$$

Υπό αυτή την ταύτιση,

$$\|(a, b)\|_{\mathbb{R}^2} = |a + ib|.$$

Επίσης, αν $z = x + iy$ και $w = h + ik$,

$$F(x + h, y + k) - F(x, y) \longleftrightarrow f(z + w) - f(z),$$

ενώ

$$\big(u_x h + u_y k,\ v_x h + v_y k\big) \longleftrightarrow u_x h + u_y k + i(v_x h + v_y k).$$

Έτσι μόνο μετά την ταύτιση παίρνουμε

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\big|f(z + w) - f(z) - \big(u_x h + u_y k + i(v_x h + v_y k)\big)\big|}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

Και επειδή

$$|w| = \sqrt{h^2 + k^2},$$

οι Cauchy–Riemann μετατρέπουν τον γραμμικό όρο σε

$$\begin{aligned} u_x h + u_y k + i(v_x h + v_y k) &= u_x h - v_x k + i(v_x h + u_x k) \\ &= (u_x + i v_x)(h + ik) \\ &= (u_x + i v_x) w. \end{aligned}$$

Οπότε

$$\frac{|f(z + w) - f(z) - (u_x + i v_x) w|}{|w|} \to 0,$$

και συνεπώς

$$\frac{f(z + w) - f(z)}{w} \to u_x + i v_x.$$

□

Παρατήρηση 7.6 (Προσοχή). Οι Cauchy–Riemann σε ένα μόνο σημείο, μαζί μόνο με την ύπαρξη των μερικών παραγώγων, δεν αρκούν γενικά για μιγαδική διαφορισιμότητα. Χρειάζεται κάποια υπόθεση που να εξασφαλίζει πραγματική διαφορισιμότητα (π.χ. συνέχεια των πρώτων μερικών παραγώγων σε γειτονιά).

4. Παραδείγματα

Παράδειγμα: η εκθετική συνάρτηση

Για $z = x + iy$,

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y),$$

οπότε

$$u(x, y) = e^x \cos y, \qquad v(x, y) = e^x \sin y.$$

Έχουμε

$$u_x = e^x \cos y, \qquad u_y = -e^x \sin y,$$

και

$$v_x = e^x \sin y, \qquad v_y = e^x \cos y.$$

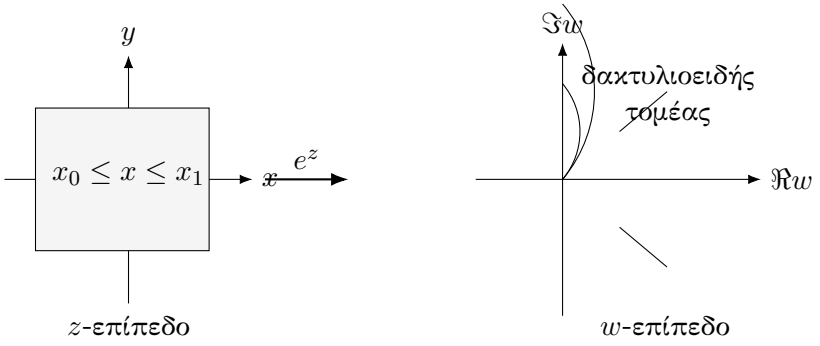
Άρα

$$u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x$$

σε κάθε σημείο του $\mathbb{C}$. Οι μερικές παράγωγοι είναι συνεχείς, συνεπώς η e^z είναι ακέραια και

$$\boxed{(e^z)' = u_x + iv_x = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z.}$$

Η γεωμετρία του τύπου $e^{x+iy} = e^x e^{iy}$ είναι επίσης χαρακτηριστική: η μεταβολή του x αλλάζει το μέτρο, ενώ η μεταβολή του y αλλάζει τη γωνία.



Οι μιγαδικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Αφού έχουμε ορίσει τη μιγαδική εκθετική, ορίζουμε για κάθε $z \in \mathbb{C}$

$$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Οι ορισμοί αυτοί επεκτείνουν τις συνήθεις πραγματικές συναρτήσεις $\cos x$ και $\sin x$. Πράγματι, αν $x \in \mathbb{R}$, τότε από τον τύπο του Euler

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

παίρνουμε τις παραπάνω εκφράσεις.

Επίσης,

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z.$$

Για $z = x + iy$, έχουμε

$$iz = ix - y,$$

και επομένως

$$e^{iz} = e^{-y}(\cos x + i \sin x), \qquad e^{-iz} = e^y(\cos x - i \sin x).$$

Άρα

$$\begin{aligned}\cos(x+iy) &= \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\\ &= \cos x\,\frac{e^{y}+e^{-y}}{2} - i\sin x\,\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\\ &= \cos x\,\cosh y - i\sin x\,\sinh y,\end{aligned}$$

ενώ

$$\begin{aligned}\sin(x+iy) &= \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\\ &= \sin x\,\frac{e^{y}+e^{-y}}{2} + i\cos x\,\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\\ &= \sin x\,\cosh y + i\cos x\,\sinh y.\end{aligned}$$

Παρατήρηση 7.7. Σε αντίθεση με την πραγματική περίπτωση, οι συναρτήσεις $\sin z$ και $\cos z$ δεν είναι φραγμένες στο $\mathbb{C}$. Για παράδειγμα,

$$\cos(iy) = \cosh y, \qquad \sin(iy) = i\sinh y,$$

και οι $\cosh y, \sinh y$ είναι μη φραγμένες καθώς $|y| \to \infty$.

Παράδειγμα 7.8. Η συνάρτηση $\sin z$ είναι ολόμορφη σε όλο το $\mathbb{C}$ και

$$(\sin z)' = \cos z.$$

Πράγματι, από τον ορισμό

$$\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

και τον κανόνα της αλυσίδας,

$$\begin{aligned}(\sin z)' &= \frac{1}{2i}\left(ie^{iz} - (-i)e^{-iz}\right)\\ &= \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\\ &= \cos z.\end{aligned}$$

Ομοίως,

$$(\cos z)' = -\sin z.$$

Παρατήρηση 7.9. Η παραπάνω απόδειξη χρησιμοποιεί μόνο την εκθετική και τον κανόνα της αλυσίδας. Εναλλακτικά, μπορούμε να επαληθεύσουμε τη μιγαδική διαφορισιμότητα της $\sin z$ μέσω των εξισώσεων Cauchy–Riemann. Πράγματι,

$$\sin(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y),$$

όπου

$$u(x,y) = \sin x\,\cosh y, \qquad v(x,y) = \cos x\,\sinh y.$$

Τότε

$$u_x = \cos x\,\cosh y, \qquad u_y = \sin x\,\sinh y,$$

και

$$v_x = -\sin x\,\sinh y, \qquad v_y = \cos x\,\cosh y.$$

Άρα

$$u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x.$$

Επομένως οι εξισώσεις Cauchy–Riemann ισχύουν παντού και

$$(\sin z)' = u_x + iv_x = \cos x\,\cosh y - i\sin x\,\sinh y = \cos z.$$

Παράδειγμα: αποτυχία αναλυτικότητας

Θεωρούμε

$$f(x+iy) = x^2 + i(2y+x).$$

Τότε

$$u(x,y) = x^2, \qquad v(x,y) = 2y + x.$$

Έχουμε

$$u_y = 0, \qquad v_x = 1.$$

Η δεύτερη εξίσωση Cauchy–Riemann θα απαιτούσε

$$u_y = -v_x,$$

δηλαδή

$$0 = -1,$$

που είναι αδύνατο. Άρα η f δεν είναι μιγαδικά διαφορίσιμη σε κανένα σημείο του $\mathbb{C}$.

5. Ένα χρήσιμο αντιπαράδειγμα για τις Cauchy–Riemann

Για να φανεί γιατί στην αντίστροφη κατεύθυνση χρειάζεται πραγματική διαφορισιμότητα και όχι μόνο ύπαρξη μερικών παραγώγων, ορίζουμε

$$f(x+iy) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} + i\dfrac{y^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Στο $(0,0)$ υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι και

$$u_x(0,0) = 1 = v_y(0,0), \qquad u_y(0,0) = 0 = -v_x(0,0),$$

άρα οι Cauchy–Riemann ισχύουν στο 0. Όμως

$$\frac{f(t)}{t} = 1$$

κατά μήκος του πραγματικού άξονα, ενώ για $z = t(1+i)$,

$$f(z) = \frac{t}{2}(1+i), \qquad \frac{f(z)}{z} = \frac{1}{2}.$$

Επομένως $f'(0)$ δεν υπάρχει.

Παράδειγμα: αποτυχία ολομορφίας

Παράδειγμα 7.10. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x+iy) = x^2 + i(2y+x).$$

Θα δείξουμε ότι η f δεν είναι μιγαδικά διαφορίσιμη σε κανένα σημείο του $\mathbb{C}$.

Γράφουμε

$$u(x,y) = x^2, \qquad v(x,y) = 2y + x.$$

Τότε

$$u_x = 2x, \qquad u_y = 0,$$

και

$$v_x = 1, \qquad v_y = 2.$$

Για να είναι η f μιγαδικά διαφορίσιμη σε ένα σημείο, είναι αναγκαίο να ισχύουν εκεί οι εξισώσεις Cauchy–Riemann:

$$u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x.$$

Όμως

$$u_y = 0 \qquad \text{ενώ} \qquad -v_x = -1.$$

Άρα η δεύτερη εξίσωση Cauchy–Riemann δεν ισχύει σε κανένα σημείο.

Επομένως η f δεν είναι μιγαδικά διαφορίσιμη πουθενά και, ειδικότερα, δεν είναι ολόμορφη σε κανένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$.

Γωνίες υπό ολομορφικές απεικονίσεις

Ένα από τα πρώτα εντυπωσιακά γεωμετρικά χαρακτηριστικά των ολομορφικών συναρτήσεων είναι ότι, στα σημεία όπου η παράγωγός τους δεν μηδενίζεται, διατηρούν τις γωνίες.

Έστω

$$\gamma : (a, b) \longrightarrow U$$

μια διαφορίσιμη καμπύλη, όπου $U \subset \mathbb{C}$ είναι ανοικτό. Αν

$$\gamma(t) = x(t) + iy(t),$$

τότε

$$\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t).$$

Όταν $\gamma'(t_0) \neq 0$, ο μιγαδικός αριθμός $\gamma'(t_0)$ παριστάνει το εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης στο σημείο $\gamma(t_0)$.

Αν τώρα $f : U \to \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη, τότε από τον κανόνα της αλυσίδας

$$(f \circ \gamma)'(t_0) = f'(\gamma(t_0))\, \gamma'(t_0).$$

Άρα το εφαπτόμενο διάνυσμα της εικόνας της καμπύλης προκύπτει από το αρχικό εφαπτόμενο διάνυσμα με πολλαπλασιασμό επί τον μιγαδικό αριθμό $f'(z_0)$.

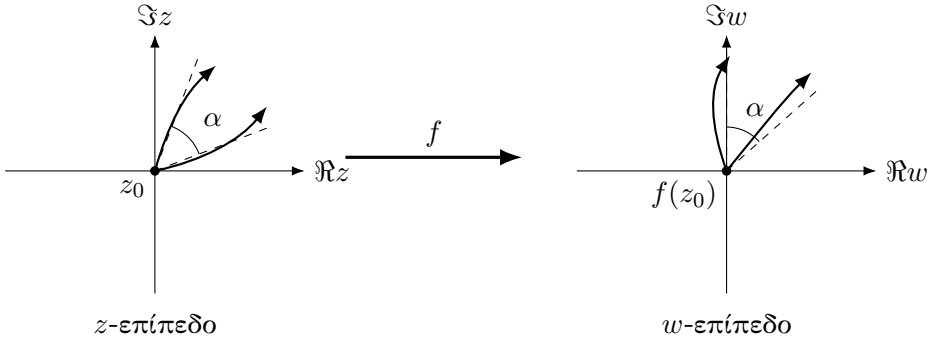
Αν

$$f'(z_0) = \rho e^{i\theta}, \qquad \rho > 0,$$

τότε ο πολλαπλασιασμός με $f'(z_0)$

- πολλαπλασιάζει τα μήκη επί $\rho = |f'(z_0)|$,
- στρέφει όλα τα διανύσματα κατά την ίδια γωνία $\theta = \arg f'(z_0)$.

Επομένως οι γωνίες μεταξύ δύο διανυσμάτων δεν αλλάζουν.



Θεώρημα 7.11 (Διατήρηση γωνιών). *Έστω f ολόμορφη σε μια γειτονιά του z_0 και*

$$f'(z_0) \neq 0.$$

Τότε η f διατηρεί τις προσανατολισμένες γωνίες μεταξύ διαφορίσιμων καμπυλών που τέμνονται στο z_0 και έχουν μη μηδενικά εφαπτόμενα διανύσματα.

Απόδειξη. Έστω δύο καμπύλες γ_1, γ_2 που περνούν από το z_0:

$$\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2) = z_0.$$

Τα εφαπτόμενα διανύσματά τους είναι

$$\gamma_1'(t_1), \qquad \gamma_2'(t_2).$$

Οι εικόνες τους μέσω της f έχουν εφαπτόμενα διανύσματα

$$(f \circ \gamma_1)'(t_1) = f'(z_0)\gamma_1'(t_1),$$

και

$$(f \circ \gamma_2)'(t_2) = f'(z_0)\gamma_2'(t_2).$$

Γράφοντας

$$f'(z_0) = \rho e^{i\theta}, \qquad \rho > 0,$$

βλέπουμε ότι και τα δύο εφαπτόμενα διανύσματα στρέφονται κατά την ίδια γωνία θ και πολλαπλασιάζονται κατά τον ίδιο θετικό παράγοντα ρ.

Άρα η γωνία μεταξύ τους παραμένει η ίδια. □

Ορισμός 7.12. Μια απεικόνιση που διατηρεί τις προσανατολισμένες γωνίες λέγεται *σύμμορφη* (*conformal*).

Έτσι, μια ολόμορφη συνάρτηση είναι σύμμορφη σε κάθε σημείο z_0 στο οποίο

$$f'(z_0) \neq 0.$$

Παρατήρηση 7.13. Η υπόθεση $f'(z_0) \neq 0$ είναι ουσιαστική.

Για παράδειγμα, για

$$f(z) = z^2$$

έχουμε

$$f'(0) = 0.$$

Κοντά στο 0, μια ημιευθεία

$$z = re^{i\theta}$$

απεικονίζεται στην

$$f(z) = r^2 e^{2i\theta}.$$

Άρα η γωνία θ γίνεται 2θ. Στο 0, λοιπόν, η απεικόνιση δεν διατηρεί τις γωνίες.

Παράδειγμα: η αντιστροφή $w = 1/z$

Μια βασική γεωμετρική απεικόνιση είναι

$$f(z) = \frac{1}{z}, \qquad z \neq 0.$$

Αν

$$z = re^{i\theta},$$

τότε

$$\boxed{\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}.}$$

Επομένως η αντιστροφή

$$r \longmapsto \frac{1}{r}, \qquad \theta \longmapsto -\theta.$$

Άρα:

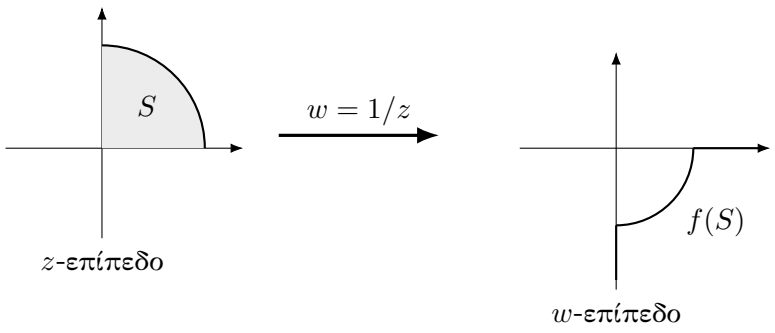
- το εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου, εκτός του 0, απεικονίζεται στο εξωτερικό του μοναδιαίου κύκλου,
- το άνω ημιεπίπεδο απεικονίζεται στο κάτω ημιεπίπεδο,
- οι γωνίες ως προς τον θετικό πραγματικό άξονα αλλάζουν πρόσημο.

Για παράδειγμα, έστω

$$S = \left\{ z : 0 < |z| < 1, \quad 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Τότε

$$f(S) = \left\{ w : |w| > 1, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \arg w \leq 0 \right\}.$$



Παρατηρούμε επίσης ότι

$$f'(z) = -\frac{1}{z^2} \neq 0, \qquad z \neq 0.$$

Άρα η αντιστροφή είναι σύμμορφη σε κάθε σημείο του $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Το όρισμα ενός μιγαδικού αριθμού

Έστω $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Από την πολική μορφή μπορούμε να γράψουμε

$$z = |z|e^{i\theta}$$

για κάποιο $\theta \in \mathbb{R}$.

Αν θ είναι μία τέτοια γωνία, τότε

$$e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta} \qquad \text{για κάθε } k \in \mathbb{Z}.$$

Επομένως όλες οι γωνίες

$$\theta + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

δίνουν τον ίδιο μιγαδικό αριθμό.

Ορισμός 7.14. Το *όρισμα* του $z \neq 0$, που συμβολίζεται με

$$\arg z,$$

είναι το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών θ για τους οποίους

$$z = |z|e^{i\theta}.$$

Αν θ_0 είναι μία τιμή του ορίσματος, τότε

$$\boxed{\arg z = \{\theta_0 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.}$$

Άρα το $\arg z$ δεν είναι πραγματική συνάρτηση: σε κάθε $z \neq 0$ αντιστοιχούν άπειρες τιμές.

Για να επιλέξουμε μία μόνο τιμή του ορίσματος, περιοριζόμαστε σε ένα διάστημα μήκους 2π.

Ορισμός 7.15. Το *κύριο όρισμα* του $z \neq 0$, που συμβολίζεται με

$$\operatorname{Arg} z,$$

είναι η μοναδική τιμή του $\arg z$ που ανήκει στο διάστημα

$$(-\pi, \pi].$$

Δηλαδή

$$\boxed{-\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi.}$$

Για παράδειγμα,

$$\operatorname{Arg}(1) = 0, \qquad \operatorname{Arg}(i) = \frac{\pi}{2}, \qquad \operatorname{Arg}(-1) = \pi, \qquad \operatorname{Arg}(-i) = -\frac{\pi}{2}.$$

Παρατήρηση 7.16. Η συνάρτηση

$$\operatorname{Arg} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow (-\pi, \pi]$$

είναι καλά ορισμένη, αλλά δεν είναι συνεχής πάνω στον αρνητικό πραγματικό ημιάξονα.

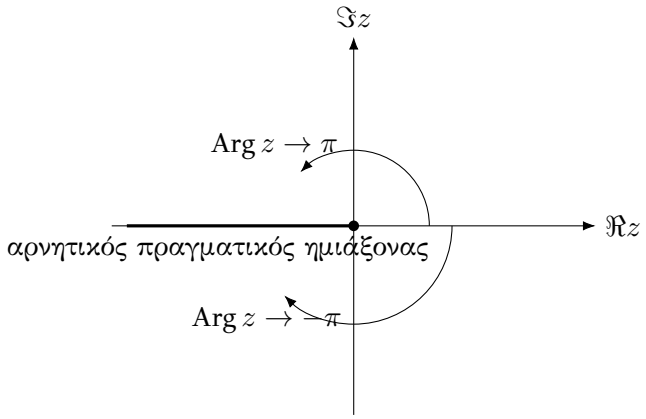
Πράγματι, αν $x < 0$, τότε

$$\operatorname{Arg}(x + iy) \longrightarrow \pi \qquad \text{καθώς } y \downarrow 0,$$

ενώ

$$\operatorname{Arg}(x + iy) \longrightarrow -\pi \qquad \text{καθώς } y \uparrow 0.$$

Έτσι εμφανίζεται φυσικά η ανάγκη για μια *τομή κλάδου*.



Ο μιγαδικός λογάριθμος

Στους πραγματικούς αριθμούς, ο λογάριθμος είναι η αντίστροφη συνάρτηση της εκθετικής. Στο $\mathbb{C}$, όμως, η εκθετική δεν είναι ένα προς ένα, αφού

$$e^{z+2\pi i} = e^z.$$

Για $z \neq 0$, θέλουμε να βρούμε όλους τους $w \in \mathbb{C}$ που ικανοποιούν

$$e^w = z.$$

Γράφουμε

$$w = u + iv.$$

Τότε

$$e^w = e^u e^{iv}.$$

Επομένως

$$e^u = |z|, \qquad v \in \arg z.$$

Άρα

$$u = \ln|z|.$$

Ορισμός 7.17. Ο *μιγαδικός λογάριθμος* του $z \neq 0$ είναι το σύνολο

$$\boxed{\log z = \{\ln|z| + i\theta : \theta \in \arg z\}.}$$

Ισοδύναμα, αν θ_0 είναι μία τιμή του ορίσματος του z, τότε

$$\boxed{\log z = \{\ln|z| + i(\theta_0 + 2k\pi) : k \in \mathbb{Z}\}.}$$

Ο μιγαδικός λογάριθμος είναι επομένως *πλειότιμος*: κάθε $z \neq 0$ έχει άπειρες τιμές λογαρίθμου, οι οποίες διαφέρουν μεταξύ τους κατά ακέραια πολλαπλάσια του $2\pi i$.

Για να πάρουμε μία μονοτίμη συνάρτηση, χρησιμοποιούμε το κύριο όρισμα.

Ορισμός 7.18. Η *κύρια τιμή του μιγαδικού λογαρίθμου* ορίζεται από

$$\boxed{\Log z = \ln|z| + i\,\Arg z, \qquad z \neq 0.}$$

Έχουμε πάντοτε

$$e^{\Log z} = z.$$

Αντίθετα, γενικά

$$\Log(e^z) \neq z,$$

επειδή η εκθετική είναι $2\pi i$-περιοδική. Πιο συγκεκριμένα,

$$\Log(e^z) = z \qquad \Longleftrightarrow \qquad -\pi < \Im z \leq \pi.$$

Παράδειγμα: υπολογισμός λογαρίθμων

Παράδειγμα 7.19. Να υπολογιστούν

$$\log i, \qquad \log(1+i), \qquad \log(-2).$$

Για το i,

$$|i| = 1, \qquad \arg i = \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

Άρα

$$\boxed{\log i = i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \qquad k \in \mathbb{Z}.}$$

Για το $1+i$,

$$|1+i| = \sqrt{2}, \qquad \arg(1+i) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi.$$

Επομένως

$$\boxed{\log(1+i) = \frac{1}{2}\ln 2 + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right), \qquad k \in \mathbb{Z}.}$$

Τέλος,

$$|-2| = 2, \qquad \arg(-2) = \pi + 2k\pi,$$

οπότε

$$\boxed{\log(-2) = \ln 2 + i(2k+1)\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.}$$

Παρατηρούμε ότι όλες οι τιμές του λογαρίθμου ενός συγκεκριμένου $z \neq 0$ έχουν το ίδιο πραγματικό μέρος και τα φανταστικά τους μέρη διαφέρουν κατά ακέραια πολλαπλάσια του 2π.

Επίσης οι γνωστές ταυτότητες του πραγματικού λογαρίθμου δεν ισχύουν πάντοτε για τον κύριο μιγαδικό λογάριθμο. Για παράδειγμα,

$$\mathrm{Log}((-1)(-1)) = \mathrm{Log}(1) = 0,$$

ενώ

$$\mathrm{Log}(-1) + \mathrm{Log}(-1) = 2\pi i.$$

Κλάδοι του ορίσματος και του λογαρίθμου

Δεν υπάρχει λόγος να επιλέξουμε υποχρεωτικά το διάστημα $(-\pi, \pi]$.

Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$. Για κάθε $z \neq 0$, ορίζουμε

$$\arg_\alpha z$$

ως τη μοναδική τιμή του $\arg z$ που ικανοποιεί

$$\boxed{\alpha < \arg_\alpha z \leq \alpha + 2\pi.}$$

Ο αντίστοιχος κλάδος του λογαρίθμου είναι

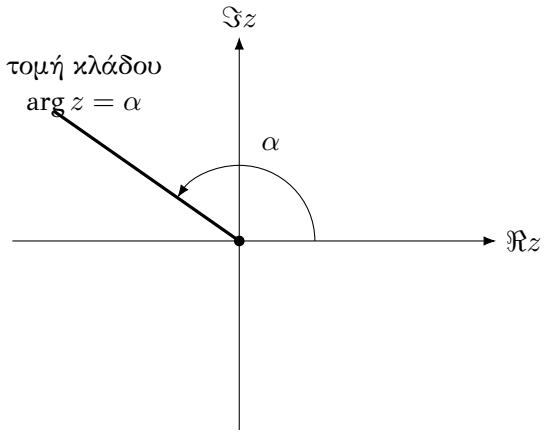
$$\boxed{\log_\alpha z = \ln|z| + i\arg_\alpha z.}$$

Η ημιευθεία

$$\{re^{i\alpha} : r \geq 0\}$$

είναι η *τομή κλάδου* (*branch cut*).

Περνώντας από τη μία πλευρά της τομής στην άλλη, η επιλεγμένη τιμή του ορίσματος μεταβάλλεται κατά 2π.



Για $\alpha = -\pi$, παίρνουμε τον κύριο κλάδο:

$$\log_{-\pi} z = \operatorname{Log} z,$$

και η τομή κλάδου είναι ο αρνητικός πραγματικός ημιάξονας.

Παράδειγμα: διαφορετικοί κλάδοι

Παράδειγμα 7.20. Να υπολογιστούν

$$\log_0 i, \qquad \log_{\pi/2} i, \qquad \log_{\pi/2}(-2).$$

Για τον κλάδο $\arg_0$, πρέπει

$$0 < \arg_0 z \leq 2\pi.$$

Επειδή

$$\frac{\pi}{2} \in (0, 2\pi],$$

έχουμε

$$\arg_0 i = \frac{\pi}{2},$$

και επομένως

$$\boxed{\log_0 i = \frac{\pi i}{2}.}$$

Για τον κλάδο $\arg_{\pi/2}$, πρέπει

$$\frac{\pi}{2} < \arg_{\pi/2} z \leq \frac{5\pi}{2}.$$

Η τιμή $\pi/2$ δεν ανήκει στο διάστημα, οπότε για το i πρέπει να επιλέξουμε

$$\arg_{\pi/2} i = \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}.$$

Άρα

$$\boxed{\log_{\pi/2} i = \frac{5\pi i}{2}.}$$

Τέλος,

$$\pi \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right],$$

οπότε

$$\arg_{\pi/2}(-2) = \pi$$

και

$$\boxed{\log_{\pi/2}(-2) = \ln 2 + i\pi.}$$

Το παράδειγμα δείχνει ότι δύο διαφορετικοί κλάδοι του λογαρίθμου μπορούν να δώσουν διαφορετικές τιμές στο ίδιο σημείο.

Γιατί δεν υπάρχει ένας καθολικός κλάδος στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

Το πρόβλημα του λογαρίθμου δεν είναι απλώς ότι «δεν έχουμε επιλέξει τη σωστή τιμή». Υπάρχει ένα πραγματικό τοπολογικό εμπόδιο.

Θεώρημα 7.21. *Δεν υπάρχει συνεχής συνάρτηση*

$$\Theta : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

τέτοια ώστε

$$e^{i\Theta(z)} = \frac{z}{|z|} \qquad \text{για κάθε } z \neq 0.$$

Με άλλα λόγια, δεν υπάρχει συνεχής επιλογή του ορίσματος σε ολόκληρο το $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Απόδειξη. Αν υπήρχε τέτοια συνάρτηση Θ, τότε πάνω στον μοναδιαίο κύκλο, για $0 \leq t \leq 2\pi$, θα είχαμε

$$e^{i\Theta(e^{it})} = e^{it}.$$

Επομένως

$$\Theta(e^{it}) - t \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

Άρα η συνάρτηση

$$t \longmapsto \frac{\Theta(e^{it}) - t}{2\pi}$$

είναι συνεχής και παίρνει τιμές στο $\mathbb{Z}$. Εφόσον το διάστημα $[0, 2\pi]$ είναι συνεκτικό, η συνάρτηση αυτή είναι σταθερή. Υπάρχει λοιπόν $k \in \mathbb{Z}$ τέτοιο ώστε

$$\Theta(e^{it}) = t + 2k\pi \qquad \text{για κάθε } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Για $t = 0$ παίρνουμε

$$\Theta(1) = 2k\pi,$$

ενώ για $t = 2\pi$,

$$\Theta(1) = 2\pi + 2k\pi,$$

άτοπο. □

Επομένως δεν μπορούμε να ορίσουμε έναν συνεχή λογάριθμο σε ολόκληρο το

$$\mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Χρειάζεται να αφαιρέσουμε μια καμπύλη που εμποδίζει το να περιστρέφεται κανείς πλήρως γύρω από το 0. Η απλούστερη επιλογή είναι μια ημιευθεία από το 0 προς το άπειρο.

Θεώρημα 7.22. *Η συνάρτηση του κύριου ορίσματος*

$$\operatorname{Arg} : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \longrightarrow (-\pi, \pi)$$

είναι συνεχής και, μάλιστα, πραγματικά διαφορίσιμη.

Αν

$$z = x + iy,$$

τότε

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Arg} z = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Arg} z = \frac{x}{x^2 + y^2}.}$$

Απόδειξη. Έστω

$$z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$$

και θέτουμε

$$\theta = \operatorname{Arg} z \in (-\pi, \pi).$$

Αν

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

τότε από την πολική μορφή

$$z = re^{i\theta}$$

έχουμε

$$\cos\theta = \frac{x}{r}, \qquad \sin\theta = \frac{y}{r}.$$

Επειδή $-\pi < \theta < \pi$, έχουμε

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2},$$

οπότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta}.$$

Άρα

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{y/r}{1 + x/r} = \frac{y}{x + r} = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Στο σύνολο $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ ισχύει

$$x + \sqrt{x^2 + y^2} > 0,$$

άρα η παραπάνω παράσταση είναι καλά ορισμένη.

Τέλος, επειδή

$$\frac{\theta}{2} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

η arctan είναι η αντίστροφη της tan σε αυτό το διάστημα. Επομένως

$$\frac{\theta}{2} = \arctan\left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\right),$$

και συνεπώς

$$\boxed{\operatorname{Arg}(x + iy) = 2\arctan\left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\right).}$$

□

Στο κομμένο επίπεδο μπορούμε επομένως να γράψουμε

$$\boxed{\operatorname{Arg}(x + iy) = 2\arctan\left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\right).}$$

Ο δεξιός όρος είναι συνεχής, άρα η $\operatorname{Arg} z$ είναι συνεχής στο

$$\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].$$

Επιπλέον, η ίδια παράσταση δείχνει ότι η $\operatorname{Arg} z$ είναι πραγματικά διαφορίσιμη. Υπολογίζοντας τις μερικές παραγώγους, παίρνουμε

$$\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{Arg}(x+iy) = -\frac{y}{x^2+y^2},$$

και

$$\frac{\partial}{\partial y}\operatorname{Arg}(x+iy) = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Παρατήρηση 7.23. Δεν μπορούμε γενικά να γράψουμε γενικά ότι

$$\operatorname{Arg}(x+iy) = \arctan\frac{y}{x},$$

εκτός αν $x > 0$, καθώς η arctan παίρνει τιμές μόνο στο

$$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

και επομένως δεν διακρίνει σωστά το δεύτερο και το τρίτο τεταρτημόριο. Για παράδειγμα,

$$\operatorname{Arg}(-1+i) = \frac{3\pi}{4},$$

ενώ

$$\arctan\frac{1}{-1} = -\frac{\pi}{4}.$$

Επιπλέον, η παράσταση $\arctan(y/x)$ δεν ορίζεται όταν $x = 0$.

Στο κομμένο επίπεδο

$$\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$$

είναι προτιμότερο να χρησιμοποιούμε τον ενιαίο τύπο

$$\operatorname{Arg}(x+iy) = 2\arctan\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right),$$

ο οποίος δίνει σωστά το κύριο όρισμα χωρίς διάκριση περιπτώσεων.

Ο κύριος λογάριθμος ως ολόμορφη συνάρτηση

Για τον κύριο κλάδο αφαιρούμε τον αρνητικό πραγματικό ημιάξονα και θεωρούμε

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].$$

Στο Ω,

$$\operatorname{Log} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z$$

είναι συνεχής.

Θεώρημα 7.24. *Η συνάρτηση*

$$\operatorname{Log} z$$

είναι ολόμορφη στο

$$\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$$

και

$$\boxed{(\operatorname{Log} z)' = \frac{1}{z}.}$$

Απόδειξη. Θα επαληθεύσουμε τις εξισώσεις Cauchy–Riemann.

Γράφουμε

$$z = x + iy.$$

Τότε

$$u(x,y) = \ln|z| = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2),$$

ενώ

$$v(x,y) = \operatorname{Arg} z.$$

Σε κάθε σημείο του $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, το $\operatorname{Arg} z$ είναι τοπικά μια λεία επιλογή του ορίσματος. Οι μερικές παράγωγοί του είναι

$$v_x = -\frac{y}{x^2+y^2}, \qquad v_y = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Από την άλλη,

$$u_x = \frac{x}{x^2+y^2}, \qquad u_y = \frac{y}{x^2+y^2}.$$

Άρα

$$u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x.$$

Οι πρώτες μερικές παράγωγοι είναι συνεχείς, επομένως η $\operatorname{Log} z$ είναι ολόμορφη.

Τέλος,

$$\begin{aligned}(\operatorname{Log} z)' &= u_x + iv_x \\ &= \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} \\ &= \frac{x-iy}{x^2+y^2} \\ &= \frac{1}{x+iy} \\ &= \frac{1}{z}.\end{aligned}$$

□

Παρατήρηση 7.25. Η $\operatorname{Log} z$ δεν μπορεί να είναι ολόμορφη πάνω στην τομή κλάδου. Μάλιστα, εκεί δεν είναι καν συνεχής: καθώς πλησιάζουμε έναν αρνητικό πραγματικό αριθμό από πάνω και από κάτω, το $\operatorname{Arg} z$ τείνει αντίστοιχα στις τιμές

$$\pi \qquad \text{και} \qquad -\pi.$$

Πιο γενικά, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, ο κλάδος

$$\log_\alpha z = \ln|z| + i \arg_\alpha z$$

είναι ολόμορφος στο επίπεδο από το οποίο έχουμε αφαιρέσει την αντίστοιχη τομή κλάδου, και

$$\boxed{(\log_\alpha z)' = \frac{1}{z}.}$$

Η γεωμετρία του λογαρίθμου

Ο τύπος

$$\operatorname{Log} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$$

δείχνει ότι ο λογάριθμος μετατρέπει

$$\text{μέτρο} \longmapsto \text{πραγματικό μέρος},$$

και

$$\text{γωνία} \longmapsto \text{φανταστικό μέρος}.$$

Έτσι, οι κύκλοι

$$|z| = r$$

απεικονίζονται σε κατακόρυφες ευθείες

$$\Re w = \ln r,$$

ενώ οι ημιευθείες

$$\arg z = \theta$$

απεικονίζονται σε οριζόντιες ευθείες

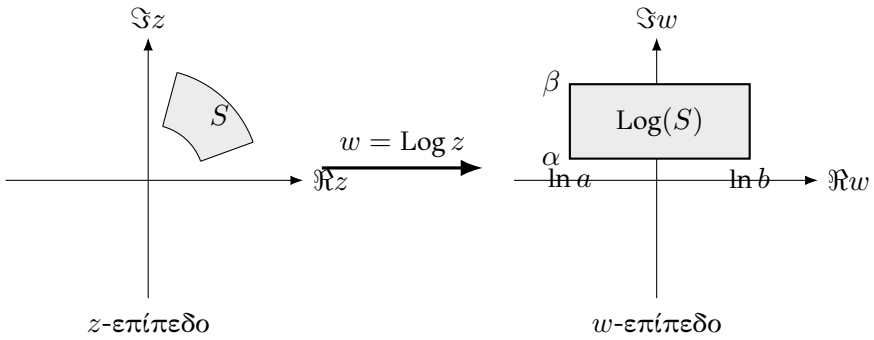
$$\Im w = \theta.$$

Για παράδειγμα, η περιοχή

$$S = \{z : a < |z| < b, \quad \alpha < \operatorname{Arg} z < \beta\}$$

απεικονίζεται στο ορθογώνιο

$$\boxed{\ln a < \Re w < \ln b, \qquad \alpha < \Im w < \beta.}$$



Η εικόνα αυτή είναι ιδιαίτερα σημαντική: η εκθετική μετατρέπει ορθογώνιες περιοχές σε κυκλικούς τομείς, ενώ ο λογάριθμος κάνει την αντίστροφη μετατροπή.

Σύνοψη

- Αν f είναι ολόμορφη και $f'(z_0) \neq 0$, τότε τοπικά συμπεριφέρεται σαν πολλαπλασιασμός με τον μιγαδικό αριθμό $f'(z_0)$: περιστροφή και ομοιοθεσία.
- Επομένως διατηρεί τις γωνίες στο z_0.
- Ο μιγαδικός λογάριθμος είναι φυσικά πολύτιμος:

$$\log z = \ln|z| + i(\theta + 2k\pi).$$

- Για να πάρουμε συνάρτηση, πρέπει να επιλέξουμε έναν κλάδο του επιχειρήματος.
- Δεν υπάρχει συνεχής καθολικός κλάδος του επιχειρήματος στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
- Ο κύριος κλάδος
$$\operatorname{Log} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z$$
είναι ολόμορφος στο
$$\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$$
και
$$(\operatorname{Log} z)' = \frac{1}{z}.$$

8 Δυναμοσειρές και αναλυτικές συναρτήσεις

Υπενθύμιση από την Ανάλυση

Πριν περάσουμε στις μιγαδικές δυναμοσειρές, υπενθυμίζουμε ορισμένα γνωστά αποτελέσματα για σειρές αριθμών και σειρές συναρτήσεων. Οι αποδείξεις είναι οι ίδιες με εκείνες που γίνονται στα μαθήματα της Ανάλυσης, με ελάχιστες μόνο προσαρμογές.

Σειρές μιγαδικών αριθμών

Έστω (z_n) μια ακολουθία μιγαδικών αριθμών. Για τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

ορίζουμε τα μερικά αθροίσματα

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} z_n.$$

Λέμε ότι η σειρά συγκλίνει και έχει άθροισμα $S \in \mathbb{C}$ αν

$$S_N \longrightarrow S.$$

Αν

$$z_n = x_n + iy_n,$$

τότε

$$\sum z_n \text{ συγκλίνει} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum x_n \text{ και } \sum y_n \text{ συγκλίνουν.}$$

Ορισμός 8.1. Η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

λέγεται *απολύτως συγκλίνουσα* αν

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < \infty.$$

Πρόταση 8.2. *Κάθε απολύτως συγκλίνουσα σειρά μιγαδικών αριθμών συγκλίνει.*

Υπενθύμιση. Αν $m > n$, τότε

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} z_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |z_k|.$$

Επομένως η απόλυτη σύγκλιση συνεπάγεται ότι τα μερικά αθροίσματα αποτελούν ακολουθία Cauchy στο $\mathbb{C}$.

Πρόταση 8.3 (Κριτήριο σύγκρισης). *Αν*

$$|z_n| \leq c_n, \qquad c_n \geq 0,$$

και

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty,$$

τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

συγκλίνει απόλυτα.

Θα χρησιμοποιούμε επίσης χωρίς περαιτέρω απόδειξη τις γνωστές ιδιότητες των απολύτως συγκλινουσών σειρών:

- κάθε αναδιάταξη μιας απολύτως συγκλίνουσας σειράς έχει το ίδιο άθροισμα,
- σε μια απολύτως συγκλίνουσα διπλή σειρά μπορούμε να αλλάζουμε τη σειρά των αθροίσεων,
- το γινόμενο Cauchy δύο απολύτως συγκλινουσών σειρών συγκλίνει απολύτως και έχει άθροισμα το γινόμενο των δύο αθροισμάτων.

Δηλαδή, αν

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$$

συγκλίνουν απόλυτα, τότε

$$AB = \sum_{n=0}^{\infty} c_n, \qquad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Ομοιόμορφη σύγκλιση

Έστω E ένα σύνολο και $f : E \to \mathbb{C}$ φραγμένη. Θέτουμε

$$\|f\|_{\infty,E} = \sup_{z\in E} |f(z)|.$$

Λέμε ότι

$$f_n \longrightarrow f$$

ομοιόμορφα στο E αν

$$\|f_n - f\|_{\infty,E} \longrightarrow 0.$$

Ισοδύναμα, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει N τέτοιο ώστε

$$n \geq N \quad \Longrightarrow \quad |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$$

για κάθε $z \in E$.

Θεώρημα 8.4 (Κριτήριο Cauchy για ομοιόμορφη σύγκλιση). *Η ακολουθία (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στο E αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει N τέτοιο ώστε*

$$m, n \geq N \quad \Longrightarrow \quad \|f_n - f_m\|_{\infty,E} < \varepsilon.$$

Η απόδειξη είναι ακριβώς η γνωστή από την Πραγματική Ανάλυση, χρησιμοποιώντας την πληρότητα του $\mathbb{C}$.

Σειρές συναρτήσεων

Για μια σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

θέτουμε

$$S_N(z) = \sum_{n=1}^{N} f_n(z).$$

Λέμε ότι η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο E αν η ακολουθία (S_N) συγκλίνει ομοιόμορφα στο E.

Το βασικό εργαλείο που θα χρησιμοποιούμε είναι το κριτήριο Weierstrass.

Θεώρημα 8.5 (Κριτήριο Weierstrass). *Υποθέτουμε ότι*

$$|f_n(z)| \leq M_n \qquad \text{για κάθε } z \in E,$$

όπου

$$M_n \geq 0$$

και

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty.$$

Τότε η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

συγκλίνει απολύτως και ομοιόμορφα στο E.

Θεώρημα 8.6. *Αν οι f_n είναι συνεχείς στο E και*

$$f_n \longrightarrow f$$

ομοιόμορφα στο E, τότε η f είναι συνεχής.

Θεώρημα 8.7. *Έστω $E \subseteq \mathbb{C}$ και έστω (f_n) μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων στο E. Αν*

$$f_n \longrightarrow f$$

ομοιόμορφα στο E, τότε η f είναι συνεχής στο E.

Απόδειξη. Έστω $\alpha \in E$ και $\varepsilon > 0$.

Από την ομοιόμορφη σύγκλιση υπάρχει N τέτοιο ώστε, για κάθε $n \geq N$,

$$\|f - f_n\|_{\infty,E} < \varepsilon.$$

Fix $n \geq N$.

Επειδή η f_n είναι συνεχής στο α, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$z \in E, \qquad |z - \alpha| < \delta$$

να συνεπάγεται

$$|f_n(z) - f_n(\alpha)| < \varepsilon.$$

Τότε, για κάθε $z \in E$ με $|z - \alpha| < \delta$,

$$\begin{aligned} |f(z) - f(\alpha)| &\leq |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(\alpha)| + |f_n(\alpha) - f(\alpha)| \\ &< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Επειδή το $\varepsilon > 0$ είναι αυθαίρετο, έπεται ότι

$$f(z) \longrightarrow f(\alpha) \qquad \text{καθώς } z \longrightarrow \alpha,$$

άρα η f είναι συνεχής στο α.

Εφόσον το $\alpha \in E$ ήταν αυθαίρετο, η f είναι συνεχής σε ολόκληρο το E. □

Αυτά είναι ακριβώς τα αποτελέσματα που θα μας επιτρέψουν να μεταφέρουμε τις γνωστές ιδιότητες των πραγματικών δυναμοσειρών στο μιγαδικό επίπεδο.

Η βασική εφαρμογή στις δυναμοσειρές

Πρόταση 8.8. *Έστω $r > 0$. Αν*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n < \infty,$$

τότε

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

συγκλίνει απολύτως και ομοιόμορφα στον κλειστό δίσκο

$$|z| \leq r.$$

Απόδειξη. Για $|z| \leq r$,

$$|a_n z^n| \leq |a_n| r^n.$$

Το αποτέλεσμα ακολουθεί αμέσως από το κριτήριο Weierstrass. □

Η ίδια πρόταση, με μετάθεση του κέντρου, δίνει ότι αν

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n < \infty,$$

τότε

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

συγκλίνει απολύτως και ομοιόμορφα στον

$$|z - z_0| \leq r.$$

Υπενθύμιση για το $\limsup$

Για μια ακολουθία πραγματικών αριθμών (x_n), θέτουμε

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{m\geq n} x_m.$$

Αν

$$L = \limsup_{n\to\infty} x_n,$$

τότε:

- για κάθε $\varepsilon > 0$,

  $$x_n < L + \varepsilon$$

  για όλα τα αρκετά μεγάλα n,

- για κάθε $\varepsilon > 0$,

  $$x_n > L - \varepsilon$$

  για άπειρα πολλά n.

Αν το συνηθισμένο όριο υπάρχει, τότε

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Θα χρησιμοποιούμε επίσης ότι, αν

$$x_n \geq 0, \qquad y_n \geq 0, \qquad y_n \longrightarrow y,$$

τότε

$$\limsup_{n\to\infty}(x_n y_n) = y \limsup_{n\to\infty} x_n$$

όποτε οι ποσότητες είναι πεπερασμένες.

Ειδικότερα,

$$n^{1/n} \longrightarrow 1,$$

οπότε

$$\limsup_{n\to\infty} |na_n|^{1/n} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}.$$

Αυτή η απλή παρατήρηση θα χρησιμοποιηθεί αργότερα για να δείξουμε ότι μια δυναμοσειρά και η παράγωγός της έχουν την ίδια ακτίνα σύγκλισης.

Κριτήρια ρίζας και λόγου

Υπενθυμίζουμε τέλος τα γνωστά κριτήρια σύγκλισης.

Για μια σειρά

$$\sum c_n$$

αν

$$\limsup_{n\to\infty} |c_n|^{1/n} < 1,$$

τότε η σειρά συγκλίνει απόλυτα, ενώ αν

$$\limsup_{n\to\infty} |c_n|^{1/n} > 1,$$

τότε αποκλίνει.

Αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = L,$$

τότε η σειρά συγκλίνει απόλυτα για $L < 1$ και αποκλίνει για $L > 1$.

Δεν θα επαναλάβουμε τις αποδείξεις αυτών των αποτελεσμάτων.

Μιγαδικές δυναμοσειρές

Μια δυναμοσειρά με κέντρο $z_0 \in \mathbb{C}$ είναι μια σειρά της μορφής

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \qquad a_n \in \mathbb{C}.$$

Για κάθε σταθερό z, πρόκειται απλώς για μια σειρά μιγαδικών αριθμών. Τα γνωστά κριτήρια σύγκλισης από την Πραγματική Ανάλυση εφαρμόζονται χωρίς ουσιαστική αλλαγή.

Η βασική γεωμετρική διαφορά είναι ότι η περιοχή σύγκλισης δεν είναι διάστημα γύρω από το x_0, αλλά δίσκος γύρω από το z_0.

Ακτίνα σύγκλισης και τύπος Cauchy–Hadamard

Θεώρημα 8.9 (Cauchy–Hadamard). *Για τη δυναμοσειρά*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

θέτουμε

$$\boxed{\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n},}$$

με τις συμβάσεις

$$\frac{1}{0} = \infty, \qquad \frac{1}{\infty} = 0.$$

Τότε:

$$|z - z_0| < R \quad \Longrightarrow \quad \textit{η σειρά συγκλίνει απόλυτα},$$

ενώ

$$|z - z_0| > R \quad \Longrightarrow \quad \textit{η σειρά αποκλίνει.}$$

Επιπλέον, για κάθε $r < R$, η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στον κλειστό δίσκο

$$|z - z_0| \le r.$$

Ορισμός 8.10. Ο αριθμός R λέγεται *ακτίνα σύγκλισης* της δυναμοσειράς.

Το σύνολο

$$|z - z_0| < R$$

λέγεται *δίσκος σύγκλισης*, ενώ

$$|z - z_0| = R$$

λέγεται *κύκλος σύγκλισης*.

Σκιαγράφημα της απόδειξης. Η απόδειξη είναι ουσιαστικά η ίδια με την πραγματική περίπτωση. Θέτουμε

$$L = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}.$$

Για σταθερό z,

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n (z - z_0)^n|^{1/n} = L|z - z_0|.$$

Το κριτήριο της n-οστής ρίζας δίνει επομένως σύγκλιση όταν

$$L|z - z_0| < 1$$

και απόκλιση όταν

$$L|z - z_0| > 1.$$

Άρα

$$R = \frac{1}{L}.$$

Για την ομοιόμορφη σύγκλιση, αν

$$r < R,$$

επιλέγουμε

$$r < \rho < R.$$

Για όλα τα αρκετά μεγάλα n,

$$|a_n|^{1/n} < \frac{1}{\rho},$$

οπότε, όταν $|z - z_0| \le r$,

$$|a_n(z - z_0)^n| \le \left(\frac{r}{\rho}\right)^n.$$

Το αποτέλεσμα ακολουθεί από το κριτήριο Weierstrass.

Παρατήρηση 8.11. Το θεώρημα δεν λέει τίποτε για τα σημεία του κύκλου

$$|z - z_0| = R.$$

Εκεί η συμπεριφορά πρέπει να εξετάζεται χωριστά.

Παράδειγμα: γιατί χρειαζόμαστε το $\limsup$

Θεωρούμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

όπου

$$a_n = \begin{cases} 2^n, & n \text{ άρτιος}, \\ 2^{-n}, & n \text{ περιττός}. \end{cases}$$

Τότε

$$|a_n|^{1/n} = \begin{cases} 2, & n \text{ άρτιος}, \\ \dfrac{1}{2}, & n \text{ περιττός}. \end{cases}$$

Η ακολουθία $|a_n|^{1/n}$ δεν συγκλίνει, αλλά

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = 2.$$

Άρα

$$\boxed{R = \frac{1}{2}.}$$

Το παράδειγμα δείχνει γιατί στον γενικό τύπο εμφανίζεται το $\limsup$ και όχι ένα συνηθισμένο όριο.

Πράξεις με συγκλίνουσες δυναμοσειρές

Έστω

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \qquad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n,$$

με ακτίνες σύγκλισης R_f και R_g.

Μέσα στον δίσκο

$$|z - z_0| < \min\{R_f, R_g\}$$

οι δύο σειρές συγκλίνουν απόλυτα, και επομένως ισχύουν οι συνήθεις πράξεις με απολύτως συγκλίνουσες σειρές.

Για το άθροισμα,

$$\boxed{f(z) + g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(z - z_0)^n.}$$

Για το γινόμενο,

$$\boxed{f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,}$$

όπου

$$\boxed{c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.}$$

Αυτό είναι το γνωστό γινόμενο Cauchy.

Παρατήρηση 8.12. Η ακτίνα σύγκλισης του αθροίσματος ή του γινομένου είναι τουλάχιστον

$$\min\{R_f, R_g\},$$

αλλά μπορεί να είναι μεγαλύτερη λόγω απαλοιφών.

Πηλίκα δυναμοσειρών

Υποθέτουμε τώρα ότι

$$g(z_0) = b_0 \neq 0.$$

Τότε, για z αρκετά κοντά στο z_0,

$$g(z) = b_0\big(1 + h(z)\big),$$

όπου

$$h(z) = \frac{g(z) - b_0}{b_0}$$

και

$$h(z_0) = 0.$$

Επειδή η h είναι συνεχής, υπάρχει ένας μικρός δίσκος γύρω από το z_0 στον οποίο

$$|h(z)| < 1.$$

Εκεί μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη γεωμετρική σειρά:

$$\frac{1}{g(z)} = \frac{1}{b_0}\frac{1}{1 + h(z)} = \frac{1}{b_0}\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m h(z)^m.$$

Οι σειρές που εμφανίζονται συγκλίνουν απόλυτα και ομοιόμορφα σε έναν αρκετά μικρότερο κλειστό δίσκο, οπότε μπορούμε να αναπτύξουμε τα $h(z)^m$ και να αναδιατάξουμε τους όρους.

Έτσι,

$$\frac{1}{g(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

σε κάποια γειτονιά του z_0.

Οι συντελεστές μπορούν να υπολογιστούν αναδρομικά. Από

$$g(z)\frac{1}{g(z)} = 1$$

παίρνουμε

$$b_0 c_0 = 1,$$

άρα

$$c_0 = \frac{1}{b_0},$$

και για $n \geq 1$,

$$\boxed{c_n = -\frac{1}{b_0} \sum_{k=1}^{n} b_k c_{n-k}.}$$

Συνεπώς, αν $g(z_0) \neq 0$, τότε και

$$\frac{f(z)}{g(z)}$$

έχει ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά γύρω από το z_0.

Σύνθεση δυναμοσειρών

Έστω

$$f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (w - w_0)^n$$

με ακτίνα σύγκλισης $R > 0$, και έστω

$$g(z_0) = w_0.$$

Αν η g έχει ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά γύρω από το z_0, τότε, για z αρκετά κοντά στο z_0,

$$|g(z) - w_0| < R$$

και επομένως

$$\boxed{f(g(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \big(g(z) - w_0\big)^n.}$$

Κάθε δύναμη

$$\big(g(z) - w_0\big)^n$$

έχει ανάπτυγμα σε δυνάμεις του $z - z_0$. Χάρη στην απόλυτη και ομοιόμορφη σύγκλιση σε έναν αρκετά μικρό κλειστό δίσκο, μπορούμε να αναδιατάξουμε τα αθροίσματα και να πάρουμε μια δυναμοσειρά σε $z - z_0$.

Άρα η σύνθεση δύο συναρτήσεων που έχουν τοπικά αναπτύγματα σε δυναμοσειρές έχει και αυτή τοπικό ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά.

Αναλυτικές συναρτήσεις

Ορισμός 8.13. Έστω f ορισμένη σε μια γειτονιά του z_0. Λέμε ότι η f είναι *αναλυτική στο* z_0 αν υπάρχουν $r > 0$ και συντελεστές $a_n \in \mathbb{C}$ τέτοιοι ώστε

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n}$$

για κάθε

$$|z - z_0| < r.$$

Η f λέγεται *αναλυτική* σε ένα ανοικτό σύνολο U αν είναι αναλυτική σε κάθε σημείο του U.

Από όσα είδαμε για άθροισμα, γινόμενο, πηλίκο και σύνθεση προκύπτει αμέσως:

Πρόταση 8.14. *Αν f, g είναι αναλυτικές στο U, τότε οι*

$$f + g, \qquad fg$$

είναι αναλυτικές στο U.

Η

$$\frac{f}{g}$$

είναι αναλυτική στα σημεία όπου

$$g(z) \neq 0.$$

Αν

$$g : U \to V$$

και $f : V \to \mathbb{C}$ είναι αναλυτικές, τότε

$$f \circ g$$

είναι αναλυτική στο U.

Μια δυναμοσειρά είναι αναλυτική σε όλο τον δίσκο σύγκλισης

Το επόμενο σημείο είναι σημαντικό. Μια δυναμοσειρά που έχει γραφτεί γύρω από ένα κέντρο z_0 μπορεί να αναπτυχθεί ξανά γύρω από *οποιοδήποτε* σημείο του δίσκου σύγκλισής της.

Θεώρημα 8.15. *Έστω*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

με ακτίνα σύγκλισης $R > 0$.

Τότε η f είναι αναλυτική σε κάθε σημείο του δίσκου

$$D(z_0, R).$$

Απόδειξη. Έστω

$$w \in D(z_0, R).$$

Επειδή

$$|w - z_0| < R,$$

μπορούμε να επιλέξουμε $s > 0$ τόσο μικρό ώστε

$$D(w, s) \subseteq D(z_0, R).$$

Για παράδειγμα, μπορούμε να πάρουμε

$$s = \frac{R - |w - z_0|}{2}.$$

Θα δείξουμε ότι η f έχει ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά με κέντρο το w, η οποία συγκλίνει στο $D(w, s)$.

Για $z \in D(w, s)$, έχουμε

$$|z - z_0| \leq |z - w| + |w - z_0| < s + |w - z_0| < R.$$

Γράφουμε

$$z - z_0 = (w - z_0) + (z - w),$$

και επομένως

$$(z-z_0)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (w-z_0)^{n-k}(z-w)^k.$$

Άρα

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (w-z_0)^{n-k}(z-w)^k.$$

Η διπλή σειρά συγκλίνει απόλυτα, διότι

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |w-z_0|^{n-k}|z-w|^k \\ &\qquad = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \big(|w-z_0| + |z-w|\big)^n, \end{aligned}$$

και

$$|w-z_0| + |z-w| < |w-z_0| + s < R.$$

Μπορούμε επομένως να αλλάξουμε τη σειρά των αθροίσεων:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-w)^k,$$

όπου

$$b_k = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \binom{n}{k} (w-z_0)^{n-k}.$$

Άρα η f έχει ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά γύρω από το w. Επομένως είναι αναλυτική σε ολόκληρο τον δίσκο

$$D(z_0, R).$$

□

Παράδειγμα 8.16. Να βρεθούν οι όροι μέχρι και τρίτου βαθμού της ανάπτυξης της

$$f(z) = \frac{z^2}{z+2}$$

σε δυναμοσειρά με κέντρο το $z_0 = 1$.

Θέτουμε

$$w = z - 1, \qquad \text{οπότε} \qquad z = 1 + w.$$

Τότε

$$z^2 = (1+w)^2 = 1 + 2w + w^2$$

και

$$z + 2 = 3 + w = 3\left(1 + \frac{w}{3}\right).$$

Άρα, για

$$|w| < 3,$$

από τη γεωμετρική σειρά παίρνουμε

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{3}\frac{1}{1+w/3} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{w}{3} + \frac{w^2}{3^2} - \frac{w^3}{3^3} + \cdots\right).$$

Επομένως

$$\begin{aligned}\frac{z^2}{z+2} &= \frac{1}{3}(1+2w+w^2)\left(1-\frac{w}{3}+\frac{w^2}{9}-\frac{w^3}{27}+\cdots\right)\\ &= \frac{1}{3}+\frac{5}{9}w+\frac{4}{27}w^2-\frac{4}{81}w^3+\cdots.\end{aligned}$$

Επιστρέφοντας στη μεταβλητή z,

$$\boxed{\frac{z^2}{z+2} = \frac{1}{3}+\frac{5}{9}(z-1)+\frac{4}{27}(z-1)^2-\frac{4}{81}(z-1)^3+\cdots}$$

για

$$|z-1|<3.$$

Η ακτίνα σύγκλισης είναι πράγματι 3, αφού το πλησιέστερο σημείο στο $z_0=1$ όπου η f δεν είναι ολόμορφη είναι το $z=-2$.

Παραγώγιση δυναμοσειρών

Θεώρημα 8.17. *Έστω*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

με ακτίνα σύγκλισης $R>0$. Τότε η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z-z_0)^{n-1}$$

έχει την ίδια ακτίνα σύγκλισης R, και

$$\boxed{f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z-z_0)^{n-1}, \qquad |z-z_0|<R.}$$

Ειδικότερα, κάθε αναλυτική συνάρτηση είναι ολόμορφη.

Απόδειξη. Για την ακτίνα σύγκλισης χρησιμοποιούμε τον τύπο Cauchy–Hadamard. Επειδή

$$n^{1/n}\longrightarrow 1,$$

έχουμε

$$\limsup_{n\to\infty}|na_n|^{1/n}=\limsup_{n\to\infty}n^{1/n}|a_n|^{1/n}=\limsup_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}.$$

Άρα η παράγωγος σειρά έχει την ίδια ακτίνα σύγκλισης. Απομένει να δείξουμε ότι το άθροισμά της είναι πράγματι η *μιγαδική* παράγωγος της f. Θέτουμε

$$P_N(z)=\sum_{n=0}^{N} a_n(z-z_0)^n$$

και

$$g(z)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z-z_0)^{n-1}.$$

Σταθεροποιούμε z με

$$|z-z_0|<R.$$

Επιλέγουμε $r < R$ έτσι ώστε

$$|z - z_0| < r.$$

Για h αρκετά μικρό, ολόκληρο το ευθύγραμμο τμήμα

$$z + th, \qquad 0 \le t \le 1,$$

βρίσκεται στον δίσκο $|\zeta - z_0| \le r$.

Για κάθε N,

$$\begin{aligned} P_N(z+h) - P_N(z) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} P_N(z+th)\, dt \\ &= h \int_0^1 P_N'(z+th)\, dt. \end{aligned}$$

Οι σειρές P_N και P_N' συγκλίνουν ομοιόμορφα στον $|\zeta - z_0| \le r$. Περνώντας στο όριο $N \to \infty$, παίρνουμε

$$f(z+h) - f(z) = h \int_0^1 g(z+th)\, dt.$$

Άρα

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \int_0^1 g(z+th)\, dt.$$

Για κάθε $t \in [0,1]$ έχουμε

$$|z + th - z| = t|h| \le |h|.$$

Επομένως, από τη συνέχεια της g στο z, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$|\zeta - z| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |g(\zeta) - g(z)| < \varepsilon.$$

Αν $|h| < \delta$, τότε για κάθε $t \in [0,1]$,

$$|z + th - z| < \delta,$$

και συνεπώς

$$|g(z+th) - g(z)| < \varepsilon.$$

Άρα

$$\sup_{0 \le t \le 1} |g(z+th) - g(z)| \longrightarrow 0.$$

Τέλος,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 g(z+th)\, dt - g(z) \right| &= \left| \int_0^1 \big(g(z+th) - g(z) \big)\, dt \right| \\ &\le \int_0^1 |g(z+th) - g(z)|\, dt \\ &\le \sup_{0 \le t \le 1} |g(z+th) - g(z)| \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Επομένως

$$\boxed{\int_0^1 g(z+th)\, dt \longrightarrow g(z) \qquad (h \to 0).}$$

Επομένως

$$f'(z) = g(z),$$

όπως θέλαμε. □

Παρατήρηση 8.18. Η αντίστροφη κατεύθυνση,

$$\text{ολόμορφη} \quad \Longrightarrow \quad \text{αναλυτική},$$

είναι πολύ βαθύτερη.

Θα την αποδείξουμε αργότερα, χρησιμοποιώντας τον τύπο του Cauchy. Τότε οι έννοιες *ολόμορφη* και *αναλυτική* θα αποδειχθούν ισοδύναμες.

Ανώτερες παράγωγοι και συντελεστές Taylor

Μπορούμε να παραγωγίσουμε μια δυναμοσειρά επανειλημμένα. Για κάθε $k \geq 1$,

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(z-z_0)^{n-k}.$$

Θέτοντας

$$z = z_0,$$

όλοι οι όροι μηδενίζονται εκτός από εκείνον με $n = k$. Άρα

$$f^{(k)}(z_0) = k!a_k.$$

Επομένως

$$\boxed{a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}.}$$

Άρα, αν μια συνάρτηση είναι αναλυτική στο z_0, η ανάπτυξή της είναι αναγκαστικά

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n.}$$

Η δυναμοσειρά αυτή λέγεται *σειρά Taylor* της f στο z_0. Για $z_0 = 0$ λέγεται *σειρά Maclaurin*.

Πόρισμα 8.19 (Μοναδικότητα). *Αν*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$$

σε μια γειτονιά του z_0, τότε

$$a_n = b_n \qquad \textit{για κάθε } n.$$

Πρόταση 8.20. Αν η f είναι αναλυτική σε ένα ανοικτό σύνολο U, τότε

$$f \in C^{\infty}(U).$$

Μάλιστα, αν γύρω από $z_0 \in U$ έχουμε

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n,$$

τότε η σειρά μπορεί να παραγωγιστεί όρο προς όρο οποιονδήποτε πεπερασμένο αριθμό φορών και

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(z-z_0)^{n-k}.$$

Επομένως όλες οι παράγωγοι της f υπάρχουν και είναι συνεχείς.

Ολοκλήρωση κατά όρους

Αν

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

έχει ακτίνα σύγκλισης R, τότε η σειρά

$$F(z) = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1}$$

έχει επίσης ακτίνα σύγκλισης R.

Πράγματι,

$$(n+1)^{1/n} \longrightarrow 1,$$

οπότε ο τύπος Cauchy–Hadamard δίνει την ίδια ακτίνα.

Από το θεώρημα παραγώγισης,

$$\boxed{F'(z) = f(z), \qquad |z - z_0| < R.}$$

Άρα μπορούμε να ολοκληρώνουμε δυναμοσειρές κατά όρους μέσα στον δίσκο σύγκλισής τους.

Παράδειγμα: η σειρά του $\operatorname{Log}(1+z)$

Ξεκινάμε από τη γεωμετρική σειρά

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \qquad |z| < 1.$$

Ολοκληρώνοντας κατά όρους, ορίζουμε

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}.$$

Τότε

$$F'(z) = \frac{1}{1+z}.$$

Από την άλλη, όταν $|z| < 1$, το σημείο $1 + z$ βρίσκεται στο δεξί ημιεπίπεδο, οπότε ο κύριος λογάριθμος είναι ολόμορφος και

$$\frac{d}{dz} \operatorname{Log}(1+z) = \frac{1}{1+z}.$$

Άρα

$$\big(F(z) - \operatorname{Log}(1+z)\big)' = 0.$$

Επειδή

$$F(0) = 0 = \operatorname{Log} 1,$$

παίρνουμε

$$F(z) = \operatorname{Log}(1+z).$$

Επομένως

$$\boxed{\operatorname{Log}(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}, \qquad |z| < 1.}$$

Ισοδύναμα,

$$\boxed{\operatorname{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}, \qquad |z| < 1.}$$

Παράδειγμα: παραγώγιση της γεωμετρικής σειράς

Για

$$|z| < 1$$

έχουμε

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Παραγωγίζοντας κατά όρους,

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}.$$

Πολλαπλασιάζοντας επί z,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} n z^n = \frac{z}{(1-z)^2}, \qquad |z| < 1.}$$

Η ακτίνα σύγκλισης είναι

$$\boxed{R = 1}.$$

Οι σειρές Maclaurin των e^z, $\cos z$, $\sin z$

Θεωρούμε πρώτα τη δυναμοσειρά

$$E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Από τον τύπο Cauchy–Hadamard ή το κριτήριο λόγου έχει

$$R = \infty.$$

Άρα η E είναι ολόμορφη σε όλο το $\mathbb{C}$, και

$$E'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = E(z).$$

Επίσης

$$E(0) = 1.$$

Η μιγαδική εκθετική που έχουμε ήδη ορίσει ικανοποιεί

$$(e^z)' = e^z, \qquad e^0 = 1.$$

Θέτοντας

$$H(z) = E(z)e^{-z},$$

παίρνουμε

$$H'(z) = 0.$$

Άρα η H είναι σταθερή, και επειδή

$$H(0) = 1,$$

έχουμε

$$E(z) = e^z.$$

Συνεπώς

$$\boxed{e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \qquad z \in \mathbb{C}.}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

παίρνουμε

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iz)^n}{n!}\right) \\ &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots . \end{aligned}$$

Άρα

$$\boxed{\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \qquad z \in \mathbb{C}.}$$

Ομοίως,

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

και επομένως

$$\boxed{\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad z \in \mathbb{C}.}$$

Και οι τρεις σειρές έχουν ακτίνα σύγκλισης

$$R = \infty.$$

Παράδειγμα: χειρισμός γνωστών σειρών Taylor

(α) Η συνάρτηση ze^{z^2}. Από

$$e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}, \qquad w \in \mathbb{C},$$

θέτουμε

$$w = z^2.$$

Παίρνουμε

$$e^{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!}.$$

Πολλαπλασιάζοντας επί z,

$$\boxed{ze^{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{n!}.}$$

Η σειρά συγκλίνει για κάθε $z \in \mathbb{C}$, άρα

$$\boxed{R = \infty}.$$

(β) Η συνάρτηση $\dfrac{1}{1+z^2}$. Από τη γεωμετρική σειρά

$$\frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n, \qquad |w| < 1,$$

θέτουμε

$$w = -z^2.$$

Έτσι

$$\boxed{\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}, \qquad |z| < 1.}$$

Άρα

$$\boxed{R = 1}.$$

Παρατήρηση 8.21. Αυτό είναι ένα από τα πρώτα σημεία όπου η μιγαδική μεταβλητή εξηγεί κάτι που από την πραγματική σκοπιά φαίνεται παράξενο.

Η πραγματική συνάρτηση

$$\frac{1}{1+x^2}$$

είναι C^∞ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αλλά η σειρά Maclaurin της έχει ακτίνα σύγκλισης μόνο 1.

Στο μιγαδικό επίπεδο ο λόγος φαίνεται αμέσως:

$$1 + z^2 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad z = \pm i.$$

Τα δύο αυτά σημεία απέχουν από το 0 απόσταση 1.

Παράδειγμα: η $\sin z/z$ και αφαιρέσιμη ανωμαλία

Θεωρούμε

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{\sin z}{z}, & z \neq 0, \\ 1, & z = 0. \end{cases}$$

Από τη σειρά

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots$$

έχουμε

$$\sin z = z\left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \cdots\right).$$

Επομένως, για $z \neq 0$,

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \cdots.$$

Η σειρά στο δεξί μέλος έχει ακτίνα σύγκλισης ∞. Άρα ορίζει ολόμορφη συνάρτηση σε όλο το $\mathbb{C}$, και στο $z = 0$ η τιμή της είναι

$$1.$$

Συνεπώς

$$\boxed{g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!}}$$

για κάθε $z \in \mathbb{C}$, και επομένως η g είναι ολόμορφη σε όλο το $\mathbb{C}$.

Παρατήρηση 8.22. Το ίδιο επιχείρημα ισχύει γενικά. Αν η f είναι αναλυτική στο z_0 και

$$f(z_0) = 0,$$

τότε

$$f(z) = (z - z_0)g(z)$$

για κάποια αναλυτική g, και

$$g(z_0) = f'(z_0).$$

Έτσι το πηλίκο

$$\frac{f(z)}{z - z_0}$$

έχει φυσική αναλυτική επέκταση στο z_0.

Τοπική αντιστροφή και ανοικτές απεικονίσεις

Θα αποδείξουμε το θεώρημα τοπικής αντιστροφής απευθείας στο $\mathbb{C}$, χωρίς να χρησιμοποιήσουμε ούτε τυπικές δυναμοσειρές ούτε το πραγματικό θεώρημα αντίστροφης συνάρτησης.

Θα χρησιμοποιήσουμε μόνο το γνωστό θεώρημα συστολών.

Θεώρημα 8.23 (Θεώρημα σταθερού σημείου για συστολές στο $\mathbb{C}$). *Έστω $D \subseteq \mathbb{C}$ κλειστό και μη κενό σύνολο και έστω*

$$T : D \longrightarrow D$$

μια απεικόνιση για την οποία υπάρχει σταθερά

$$0 < q < 1$$

τέτοια ώστε

$$|T(z) - T(w)| \leq q\,|z - w|$$

για κάθε $z, w \in D$. Τότε υπάρχει μοναδικό $z_* \in D$ τέτοιο ώστε

$$T(z_*) = z_*.$$

Επιπλέον, για οποιοδήποτε $z_0 \in D$, αν ορίσουμε επαναληπτικά

$$z_{n+1} = T(z_n),$$

τότε

$$z_n \longrightarrow z_*.$$

Το θεώρημα τοπικής αντιστροφής

Θεώρημα 8.24 (Τοπική αντιστροφή). *Έστω f αναλυτική σε μια γειτονιά του z_0 και*

$$f'(z_0) \neq 0.$$

Τότε υπάρχουν ανοικτές γειτονιές U του z_0 και V του $f(z_0)$ τέτοιες ώστε

$$f : U \longrightarrow V$$

να είναι αμφιμονοσήμαντη και η αντίστροφη συνάρτηση

$$g = f^{-1} : V \longrightarrow U$$

να είναι ολόμορφη. Επιπλέον, αν

$$w = f(z),$$

τότε

$$\boxed{g'(w) = \frac{1}{f'(z)}.}$$

Απόδειξη. Με μεταφορά και πολλαπλασιασμό με μια μη μηδενική σταθερά μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$z_0 = 0, \qquad f(0) = 0, \qquad f'(0) = 1.$$

Πράγματι, αρκεί να εφαρμόσουμε την ειδική περίπτωση στη συνάρτηση

$$F(\zeta) = \frac{f(z_0 + \zeta) - f(z_0)}{f'(z_0)}.$$

Γράφουμε

$$f(z) = z + h(z),$$

όπου

$$h(0) = h'(0) = 0.$$

Επειδή η h' είναι συνεχής, υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε

$$|h'(z)| \leq \frac{1}{2} \qquad \text{για } |z| \leq r.$$

Αν $z, \zeta \in \overline{D(0,r)}$, τότε

$$h(z) - h(\zeta) = (z - \zeta) \int_0^1 h'\big(\zeta + t(z - \zeta)\big)\, dt,$$

και επομένως

$$|h(z) - h(\zeta)| \leq \frac{1}{2}|z - \zeta|. \tag{1}$$

Ειδικότερα,

$$|h(z)| \leq \frac{1}{2}|z|. \tag{2}$$

Θέτουμε

$$V = D\left(0, \frac{r}{2}\right).$$

Για $w \in V$, η εξίσωση

$$f(z) = w$$

ισοδυναμεί με

$$z = T_w(z), \qquad T_w(z) := w - h(z).$$

Αν $|z| \leq r$, τότε από την (2)

$$|T_w(z)| \leq |w| + \frac{1}{2}|z| < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r,$$

άρα

$$T_w : \overline{D(0,r)} \longrightarrow \overline{D(0,r)}.$$

Επιπλέον, από την (1),

$$|T_w(z) - T_w(\zeta)| \leq \frac{1}{2}|z - \zeta|,$$

οπότε η T_w είναι συστολή.

Από το θεώρημα συστολών υπάρχει μοναδικό $z \in \overline{D(0,r)}$ τέτοιο ώστε

$$f(z) = w.$$

Μάλιστα,

$$|z| \leq |w| + \frac{1}{2}|z|,$$

άρα

$$|z| \leq 2|w| < r.$$

Επομένως κάθε $w \in V$ έχει μοναδική προεικόνα στο $D(0,r)$. Θέτουμε

$$V = D\left(0, \frac{r}{2}\right)$$

και

$$U = D(0,r) \cap f^{-1}(V).$$

Από όσα αποδείξαμε παραπάνω, για κάθε $w \in V$ υπάρχει μοναδικό $z \in D(0,r)$ τέτοιο ώστε

$$f(z) = w.$$

Επομένως

$$f : U \longrightarrow V$$

είναι αμφιμονοσήμαντη. Έστω

$$g = f^{-1}.$$

Αν $w_1, w_2 \in V$ και

$$z_1 = g(w_1), \qquad z_2 = g(w_2),$$

τότε

$$z_1 - z_2 = w_1 - w_2 - \big(h(z_1) - h(z_2)\big).$$

Χρησιμοποιώντας την (1), παίρνουμε

$$|z_1 - z_2| \leq |w_1 - w_2| + \frac{1}{2}|z_1 - z_2|,$$

και επομένως

$$|g(w_1) - g(w_2)| = |z_1 - z_2| \leq 2|w_1 - w_2|.$$

Άρα η g είναι συνεχής.

Τέλος, έστω

$$w_1 = f(z_1) \in V.$$

Για $w = f(z) \neq w_1$,

$$\frac{g(w) - g(w_1)}{w - w_1} = \frac{z - z_1}{f(z) - f(z_1)}.$$

Καθώς $w \to w_1$, από τη συνέχεια της g έχουμε

$$z = g(w) \longrightarrow g(w_1) = z_1.$$

Επομένως

$$\frac{g(w) - g(w_1)}{w - w_1} \longrightarrow \frac{1}{f'(z_1)}.$$

Επειδή

$$f'(z) = 1 + h'(z)$$

και

$$|h'(z)| \leq \frac{1}{2},$$

έχουμε $f'(z) \neq 0$ στο $D(0,r)$. Συνεπώς η g είναι ολόμορφη και

$$\boxed{g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))}.}$$

Η γενική περίπτωση προκύπτει εφαρμόζοντας το παραπάνω επιχείρημα στη συνάρτηση

$$F(\zeta) = \frac{f(z_0+\zeta) - f(z_0)}{f'(z_0)}.$$

□

Η τοπική μορφή μιας αναλυτικής συνάρτησης

Το προηγούμενο θεώρημα επιτρέπει να περιγράψουμε πολύ απλά τη συμπεριφορά μιας αναλυτικής συνάρτησης κοντά σε οποιοδήποτε σημείο.

Θεώρημα 8.25 (Τοπική παραγοντοποίηση). *Έστω f αναλυτική σε μια γειτονιά του z_0 και υποθέτουμε ότι η f δεν είναι σταθερή σε καμία γειτονιά του z_0.*

Τότε υπάρχει μοναδικός ακέραιος $m \geq 1$ και υπάρχει αναλυτική συνάρτηση h, ορισμένη σε μια γειτονιά του z_0, τέτοια ώστε

$$h(z_0) \neq 0$$

και

$$\boxed{f(z) - f(z_0) = (z-z_0)^m h(z).}$$

Ο ακέραιος m είναι η τάξη του μηδενικού της συνάρτησης $f - f(z_0)$ στο z_0.

Επιπλέον. Επειδή $h(z_0) \neq 0$, μικραίνοντας ενδεχομένως τη γειτονιά του z_0, μπορούμε να γράψουμε

$$h(z) = H(z)^m$$

για κάποια αναλυτική συνάρτηση H με

$$H(z_0) \neq 0.$$

Θέτοντας

$$\phi(z) = (z-z_0)H(z),$$

παίρνουμε

$$\phi(z_0) = 0, \qquad \phi'(z_0) = H(z_0) \neq 0,$$

και επομένως

$$\boxed{f(z) - f(z_0) = \phi(z)^m.}$$

Άρα, μετά από μια τοπική αναλυτική αλλαγή μεταβλητής, η f έχει την ίδια τοπική μορφή με την απεικόνιση

$$z \longmapsto z^m.$$

Απόδειξη. Αναπτύσσουμε την f γύρω από το z_0:

$$f(z) = f(z_0) + a_m(z - z_0)^m + a_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + \cdots,$$

όπου

$$m \geq 1, \qquad a_m \neq 0,$$

και m είναι ο πρώτος δείκτης με μη μηδενικό συντελεστή.

Παραγοντοποιούμε:

$$f(z) - f(z_0) = (z - z_0)^m h(z),$$

όπου

$$h(z) = a_m + a_{m+1}(z - z_0) + a_{m+2}(z - z_0)^2 + \cdots$$

είναι αναλυτική και

$$h(z_0) = a_m \neq 0.$$

Επιλέγουμε έναν m-οστό ριζικό αριθμό α του a_m:

$$\alpha^m = a_m.$$

Γράφουμε

$$h(z) = a_m(1 + u(z)), \qquad u(z_0) = 0.$$

Περιορίζοντας, αν χρειαστεί, τη γειτονιά του z_0, μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$|u(z)| < \frac{1}{2}.$$

Τότε το $1 + u(z)$ βρίσκεται μέσα στον δίσκο

$$D\left(1, \frac{1}{2}\right),$$

όπου ο κύριος λογάριθμος είναι ολόμορφος.

Ορίζουμε

$$H(z) = \alpha \exp\left(\frac{1}{m}\operatorname{Log}(1 + u(z))\right).$$

Τότε η H είναι αναλυτική,

$$H(z)^m = h(z),$$

και

$$H(z_0) = \alpha \neq 0.$$

Θέτουμε

$$\phi(z) = (z - z_0)H(z).$$

Τότε

$$\phi(z_0) = 0$$

και

$$\phi'(z_0) = H(z_0) = \alpha \neq 0.$$

Άρα, από το θεώρημα τοπικής αντιστροφής, η ϕ είναι τοπικός αναλυτικός ισομορφισμός στο z_0.

Τέλος,

$$\phi(z)^m = (z - z_0)^m H(z)^m = (z - z_0)^m h(z) = f(z) - f(z_0),$$

όπως θέλαμε. □

Παρατήρηση 8.26. Ο ακέραιος m είναι ακριβώς η τάξη του μηδενικού της

$$f(z) - f(z_0)$$

στο z_0.

Για $m = 1$, η f είναι τοπικά αντιστρέψιμη. Για $m \geq 2$, η τοπική συμπεριφορά της είναι, μετά από αναλυτική αλλαγή συντεταγμένων, η ίδια με εκείνη της

$$w \longmapsto w^m.$$

Το θεώρημα ανοικτής απεικόνισης

Θεώρημα 8.27 (Θεώρημα ανοικτής απεικόνισης). *Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και $f : U \to \mathbb{C}$ αναλυτική. Υποθέτουμε ότι η f δεν είναι σταθερή σε καμία γειτονιά κανενός σημείου του U. Τότε η f είναι ανοικτή απεικόνιση.*

Απόδειξη. Έστω $G \subseteq U$ ανοικτό και $w_0 \in f(G)$. Επιλέγουμε $z_0 \in G$ με $f(z_0) = w_0$.

Από την τοπική κανονική μορφή, υπάρχουν ακέραιος $m \geq 1$ και αναλυτική συνάρτηση ϕ, ορισμένη κοντά στο z_0, τέτοια ώστε

$$f(z) - f(z_0) = \phi(z)^m, \qquad \phi(z_0) = 0, \qquad \phi'(z_0) \neq 0.$$

Από το θεώρημα τοπικής αντιστροφής, υπάρχει ανοικτή γειτονιά $V \subseteq G$ του z_0, στην οποία η ϕ αντιστρέφεται και η αντίστροφή της είναι συνεχής. Επομένως η $\phi(V)$ είναι ανοικτή γειτονιά του $0 = \phi(z_0)$, και άρα υπάρχει $\rho > 0$ τέτοιο ώστε

$$D(0, \rho) \subseteq \phi(V) \subseteq \phi(G).$$

Επειδή η απεικόνιση $z \mapsto z^m$ στέλνει τον $D(0, \rho)$ επί του $D(0, \rho^m)$ και

$$D(0, \rho) \subseteq \phi(G),$$

από τη σχέση

$$f(z) = w_0 + \phi(z)^m$$

συμπεραίνουμε ότι

$$D(w_0, \rho^m) \subseteq f(G).$$

Άρα το w_0 είναι εσωτερικό σημείο του $f(G)$. Επομένως το $f(G)$ είναι ανοικτό.

Επομένως το w_0 είναι εσωτερικό σημείο του $f(G)$. Άρα το $f(G)$ είναι ανοικτό. □

Θεώρημα 8.28 (Αναλυτικές 1–1 συναρτήσεις). *Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και $f : U \to \mathbb{C}$ αναλυτική και 1–1. Τότε*

$$f'(z) \neq 0 \qquad \textit{για κάθε } z \in U.$$

Επιπλέον, η αντίστροφη

$$f^{-1} : f(U) \longrightarrow U$$

είναι ολόμορφη και

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}.$$

Απόδειξη. Έστω $z_0 \in U$. Από την τοπική κανονική μορφή,

$$f(z) - f(z_0) = \phi(z)^m,$$

όπου $\phi(z_0) = 0$ και $\phi'(z_0) \neq 0$.

Από το θεώρημα τοπικής αντιστροφής, η ϕ έχει τοπική αντίστροφη ϕ^{-1}, ορισμένη σε έναν δίσκο $D(0,\rho)$.

Αντικαθιστώντας το z με $\phi^{-1}(w)$ στη σχέση

$$f(z) - f(z_0) = \phi(z)^m,$$

παίρνουμε

$$f(\phi^{-1}(w)) - f(z_0) = w^m, \qquad w \in D(0,\rho).$$

Επειδή η f και η ϕ^{-1} είναι 1–1, η $w \mapsto w^m$ πρέπει να είναι 1–1 στον $D(0,\rho)$. Αυτό όμως ισχύει μόνο αν $m = 1$.

Επομένως

$$f'(z_0) = \phi'(z_0) \neq 0.$$

Άρα $m = 1$, και επομένως

$$f'(z_0) = \phi'(z_0) \neq 0.$$

Τώρα, από το θεώρημα ανοικτής απεικόνισης, το $f(U)$ είναι ανοικτό. Εφαρμόζοντας το θεώρημα τοπικής αντιστροφής σε κάθε σημείο του U, συμπεραίνουμε ότι η f^{-1} είναι ολόμορφη στο $f(U)$, με

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}.$$

□

Η αντίστροφη συνεπαγωγή δεν ισχύει γενικώς. Για την $f(z) = e^z$ έχουμε $f'(z) = e^z \neq 0$, αλλά $e^{z+2\pi i} = e^z$. Η συνθήκη $f'(z_0) \neq 0$ δίνει *τοπική* αντιστροφή.

Θεώρημα 8.29 (Τοπική αρχή μεγίστου μέτρου). *Έστω f αναλυτική σε μια γειτονιά του z_0. Αν η συνάρτηση*

$$|f|$$

έχει τοπικό μέγιστο στο z_0, δηλαδή αν υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε

$$|f(z)| \leq |f(z_0)| \qquad \textit{για κάθε } z \in D(z_0, r),$$

τότε η f είναι σταθερή σε μια γειτονιά του z_0.

Γεωμετρική ιδέα της τοπικής αρχής μεγίστου

Έστω f αναλυτική σε μια γειτονιά του z_0 και θέτουμε

$$w_0 = f(z_0).$$

Αν η συνάρτηση $|f|$ έχει τοπικό μέγιστο στο z_0, τότε υπάρχει μια μικρή ανοικτή γειτονιά W του z_0 τέτοια ώστε

$$|f(z)| \leq |w_0| \qquad \text{για κάθε } z \in W.$$

Ισοδύναμα,

$$f(W) \subseteq \overline{D}(0, |w_0|).$$

Αν όμως η f δεν είναι τοπικά σταθερή στο z_0, τότε από το θεώρημα ανοικτής απεικόνισης το σύνολο $f(W)$ είναι ανοικτό και περιέχει το w_0. Άρα υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε

$$D(w_0, \varepsilon) \subseteq f(W).$$

Επειδή το w_0 βρίσκεται πάνω στον κύκλο

$$|w| = |w_0|,$$

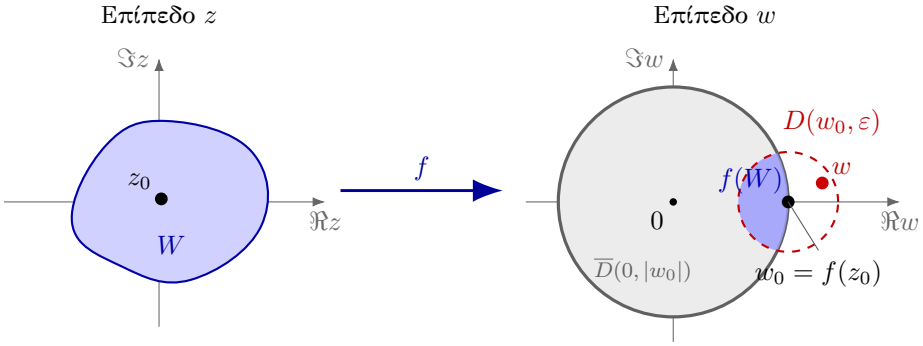
ο ανοικτός δίσκος $D(w_0, \varepsilon)$ περιέχει και σημεία w με

$$|w| > |w_0|.$$

Αυτό αντιφάσκει με το

$$f(W) \subseteq \overline{D}(0, |w_0|).$$

Άρα, αν $|f|$ έχει τοπικό μέγιστο στο z_0, τότε η f είναι αναγκαστικά τοπικά σταθερή στο z_0.



Σχήμα 1: Γεωμετρική ερμηνεία της τοπικής αρχής μεγίστου. Αν το $|f|$ έχει τοπικό μέγιστο στο z_0, τότε $f(W) \subseteq \overline{D}(0, |w_0|)$ (γαλάζια περιοχή μέσα στον γκρι δίσκο). Όμως, αν η f δεν είναι τοπικά σταθερή, η εικόνα πρέπει να περιέχει έναν ολόκληρο δίσκο $D(w_0, \varepsilon)$ (κόκκινο διακεκομμένο περίγραμμα), ο οποίος περιλαμβάνει και σημεία με $|w| > |w_0|$.

Παρατήρηση 8.30 (Γεωμετρική ερμηνεία). Αν το $|f|$ έχει τοπικό μέγιστο στο z_0, τότε υπάρχει ανοικτή γειτονιά W του z_0 τέτοια ώστε

$$|f(z)| \leq |f(z_0)| \qquad \text{για κάθε } z \in W.$$

Θέτοντας $w_0 = f(z_0)$, αυτό σημαίνει ότι

$$f(W) \subseteq \overline{D}(0, |w_0|).$$

Υποθέτουμε ότι η f δεν είναι τοπικά σταθερή στο z_0. Από την τοπική κανονική μορφή και το θεώρημα τοπικής αντιστροφής, η εικόνα $f(W)$ περιέχει έναν ανοικτό δίσκο γύρω από το w_0. Δηλαδή, υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε

$$D(w_0, \varepsilon) \subseteq f(W).$$

Όμως το w_0 βρίσκεται πάνω στον κύκλο

$$|w| = |w_0|.$$

Επομένως, κάθε ανοικτός δίσκος γύρω από το w_0 περιέχει σημεία με μέτρο μεγαλύτερο από $|w_0|$, πράγμα που αντιφάσκει με την υπόθεση του τοπικού μεγίστου.

Άρα η f είναι τοπικά σταθερή στο z_0.

Παραδείγματα

Παράδειγμα 8.31. Έστω

$$f(z) = 3 - 5z + \text{όροι μεγαλύτερου βαθμού}.$$

Τότε

$$f(0) = 3$$

και

$$f'(0) = -5 \neq 0.$$

Άρα, από το θεώρημα τοπικής αντιστροφής, η f είναι τοπικά αντιστρέψιμη στο 0.

Παράδειγμα 8.32. Έστω

$$f(z) = 2 - 2z + z^2.$$

Θέλουμε να εξετάσουμε αν η f είναι τοπικά αντιστρέψιμη στο

$$z_0 = 1.$$

Γράφουμε την ανάπτυξή της γύρω από το 1:

$$f(z) = 1 + (z-1)^2.$$

Άρα ο πρώτος μη σταθερός όρος έχει βαθμό 2, ή ισοδύναμα

$$f'(1) = 0.$$

Η τοπική κανονική μορφή είναι ήδη εμφανής:

$$f(z) - f(1) = (z-1)^2.$$

Επομένως η f δεν είναι 1–1 σε καμία γειτονιά του 1, και άρα δεν είναι τοπικά αντιστρέψιμη εκεί.

Παράδειγμα 8.33. Έστω

$$f(z) = \cos z.$$

Γύρω από το 0,

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots.$$

Ο γραμμικός συντελεστής είναι μηδέν:

$$f'(0) = 0.$$

Ο πρώτος μη σταθερός όρος έχει βαθμό 2, άρα η $\cos z$ δεν είναι τοπικά αντιστρέψιμη στο 0.

Παράδειγμα 8.34. Έστω

$$f(z) = z^3.$$

Τότε

$$f'(z) = 3z^2.$$

Στο $z = 0$,

$$f'(0) = 0,$$

και πράγματι η f δεν είναι τοπικά αντιστρέψιμη στο 0.

Αν όμως

$$z_0 \neq 0,$$

τότε

$$f'(z_0) = 3z_0^2 \neq 0,$$

οπότε η f είναι τοπικά αντιστρέψιμη στο z_0.

Αυτό δεν σημαίνει ότι η f είναι αντιστρέψιμη σε ολόκληρο το

$$U = \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Πράγματι, αν

$$\omega = e^{2\pi i/3},$$

τότε για κάθε $z \neq 0$,

$$z, \qquad \omega z, \qquad \omega^2 z$$

είναι τρία διαφορετικά σημεία του U, αλλά

$$z^3 = (\omega z)^3 = (\omega^2 z)^3.$$

Άρα η $f(z) = z^3$ είναι τοπικά αντιστρέψιμη σε κάθε $z \neq 0$, αλλά δεν είναι ολικά αντιστρέψιμη στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Θεώρημα 8.35 (Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας). *Κάθε μη σταθερό πολυώνυμο με μιγαδικούς συντελεστές έχει τουλάχιστον μία μιγαδική ρίζα.*

Απόδειξη. Έστω

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0, \qquad a_n \neq 0, \quad n \geq 1.$$

Υποθέτουμε, προς άτοπο, ότι

$$P(z) \neq 0 \qquad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C}.$$

Τότε η συνάρτηση

$$f(z) = \frac{1}{P(z)}$$

είναι αναλυτική σε ολόκληρο το $\mathbb{C}$.

Επειδή

$$P(z) = z^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n} \right),$$

έχουμε

$$|P(z)| \longrightarrow \infty \qquad \text{καθώς } |z| \longrightarrow \infty.$$

Επομένως

$$|f(z)| \longrightarrow 0 \qquad \text{καθώς } |z| \longrightarrow \infty.$$

Επιλέγουμε $R > 0$ αρκετά μεγάλο ώστε

$$|f(z)| < |f(0)| \qquad \text{για κάθε } |z| \geq R.$$

Επειδή η $|f|$ είναι συνεχής, αποκτά το μέγιστό της στον συμπαγή δίσκο $\overline{D(0,R)}$, έστω στο z_0.

Από την επιλογή του R, το σημείο z_0 δεν μπορεί να ανήκει στον κύκλο $|z| = R$. Άρα

$$z_0 \in D(0,R),$$

οπότε η $|f|$ έχει τοπικό μέγιστο στο z_0.

Από την τοπική αρχή μεγίστου μέτρου, η f είναι σταθερή σε μια γειτονιά του z_0. Επομένως και το $P = 1/f$ είναι σταθερό σε κάποια γειτονιά του z_0, οπότε

$$P^{(n)}(z_0) = 0.$$

Αυτό όμως είναι αδύνατο, αφού

$$P^{(n)}(z_0) = n! a_n \neq 0.$$

πράγμα αδύνατο για μη σταθερό πολυώνυμο.

Άρα υπάρχει $z_0 \in \mathbb{C}$ τέτοιο ώστε

$$P(z_0) = 0.$$

□

Πόρισμα 8.36 (Παραγοντοποίηση πολυωνύμων). *Κάθε πολυώνυμο*

$$P(z) = a_n z^n + \cdots + a_0, \qquad a_n \neq 0, \quad n \geq 1,$$

γράφεται στη μορφή

$$\boxed{P(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n),}$$

όπου $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$*, όχι κατ' ανάγκην διαφορετικά.*

Επομένως κάθε πολυώνυμο βαθμού n *έχει ακριβώς* n *μιγαδικές ρίζες, αν τις μετρήσουμε με τις πολλαπλότητές τους.*

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή ως προς τον βαθμό n.

Για $n = 1$, το αποτέλεσμα είναι προφανές.

Έστω ότι ισχύει για πολυώνυμα βαθμού $n - 1$ και έστω P πολυώνυμο βαθμού n.

Από το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας, υπάρχει $z_1 \in \mathbb{C}$ τέτοιο ώστε

$$P(z_1) = 0.$$

Από τη διαίρεση πολυωνύμων, υπάρχει πολυώνυμο Q βαθμού $n - 1$ τέτοιο ώστε

$$P(z) = (z - z_1)Q(z).$$

Από την επαγωγική υπόθεση,

$$Q(z) = a_n(z - z_2)\cdots(z - z_n).$$

Άρα

$$P(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n),$$

όπως θέλαμε. □

8.1 Συνεκτικότητα

Λέμε ότι $A \subseteq U$ είναι ανοικτό ως προς U αν υπάρχει ανοικτό $V \subseteq \mathbb{C}$ τέτοιο ώστε

$$A = U \cap V.$$

Ορισμός 8.37. Ένα σύνολο $U \subseteq \mathbb{C}$ λέγεται *συνεκτικό*, αν δεν μπορεί να γραφεί ως ένωση δύο ξένων, μη κενών συνόλων που είναι ανοικτά ως προς το U.

Ένα μη κενό, ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ λέγεται *χωρίο*.

Πρόταση 8.38. *Ένα σύνολο* $U \subseteq \mathbb{C}$ *είναι συνεκτικό αν και μόνο αν τα μόνα υποσύνολά του που είναι συγχρόνως ανοικτά και κλειστά ως προς το* U *είναι τα* $\varnothing$ *και* U*.*

Απόδειξη. Αν το $A \subseteq U$ είναι ανοικτό και κλειστό ως προς το U, τότε τα A και $U \setminus A$ είναι ξένα και ανοικτά ως προς το U, με

$$U = A \cup (U \setminus A).$$

Επομένως, αν το U είναι συνεκτικό, ένα από αυτά είναι κενό.

Αντίστροφα, αν $U = A \cup B$, όπου A, B είναι ξένα, μη κενά και ανοικτά ως προς το U, τότε $A = U \setminus B$ είναι και κλειστό ως προς το U, άτοπο. □

Πρόταση 8.39. *Ένα ανοικτό σύνολο* $U \subseteq \mathbb{C}$ *είναι συνεκτικό αν και μόνο αν οποιαδήποτε δύο σημεία του μπορούν να ενωθούν με μια πολυγωνική γραμμή που περιέχεται ολόκληρη στο* U*.*

Απόδειξη. Έστω ότι το U είναι συνεκτικό και επιλέγουμε $z_0 \in U$. Θέτουμε

$$A = \{z \in U : \ z_0 \text{ και } z \text{ ενώνονται με πολυγωνική γραμμή μέσα στο } U\}.$$

Το A είναι μη κενό, αφού $z_0 \in A$.

Επειδή το U είναι ανοικτό, για κάθε $z \in U$ υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε

$$D(z, r) \subseteq U.$$

Οποιοδήποτε σημείο $w \in D(z, r)$ μπορεί να ενωθεί με το z με ευθύγραμμο τμήμα μέσα στο U. Επομένως, το z μπορεί να ενωθεί με το z_0 με πολυγωνική γραμμή αν και μόνο αν το ίδιο ισχύει για το w.

Άρα ο δίσκος $D(z, r)$ περιέχεται εξ ολοκλήρου είτε στο A είτε στο $U \setminus A$. Συνεπώς, τόσο το A όσο και το $U \setminus A$ είναι ανοικτά, δηλαδή το A είναι συγχρόνως ανοικτό και κλειστό ως προς το U. Από τη συνεκτικότητα του U, συμπεραίνουμε ότι $A = U$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι οποιαδήποτε δύο σημεία του U μπορούν να ενωθούν με πολυγωνική γραμμή.

Αν το U δεν ήταν συνεκτικό, θα υπήρχαν δύο ξένα, μη κενά ανοικτά σύνολα A, B, με

$$U = A \cup B.$$

Επιλέγουμε $a \in A$ και $b \in B$. Από την υπόθεση, υπάρχει συνεχής πολυγωνική γραμμή

$$\gamma : [0, 1] \longrightarrow U, \qquad \gamma(0) = a, \quad \gamma(1) = b.$$

Τότε τα σύνολα

$$\gamma^{-1}(A), \qquad \gamma^{-1}(B)$$

είναι ανοικτά ως προς το $[0, 1]$, ξένα και μη κενά, ενώ

$$[0, 1] = \gamma^{-1}(A) \cup \gamma^{-1}(B).$$

Αυτό αντιφάσκει με τη συνεκτικότητα του διαστήματος $[0, 1]$. Άρα το U είναι συνεκτικό. □

Πόρισμα 8.40. *Κάθε τοπικά σταθερή συνάρτηση σε ένα χωρίο Ω (δηλαδή σταθερή σε ένα ανοικτό υποσύνολο) είναι σταθερή σε ολόκληρο το Ω.*

Απόδειξη. Το A είναι μη κενό, αφού $z_0 \in A$, και ανοικτό, επειδή η f είναι τοπικά σταθερή.

Για να δείξουμε ότι είναι κλειστό ως προς το Ω, έστω (z_n) ακολουθία σημείων του A με $z_n \to z \in \Omega$. Επειδή η f είναι συνεχής, έχουμε

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(z_0).$$

Άρα $z \in A$, επομένως το A είναι κλειστό ως προς το Ω.

Από τη συνεκτικότητα του Ω, συμπεραίνουμε ότι $A = \Omega$, δηλαδή η f είναι σταθερή. □

Παρατήρηση 8.41. Η συνεκτικότητα είναι ουσιώδης. Για παράδειγμα, το σύνολο

$$U = D(0, 1) \cup D(3, 1)$$

είναι ανοικτό αλλά όχι συνεκτικό. Μια συνάρτηση μπορεί να είναι σταθερή σε κάθε έναν από τους δύο δίσκους, με διαφορετικές τιμές, χωρίς να είναι σταθερή σε ολόκληρο το U.

Αντίθετα, το $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ είναι συνεκτικό, αφού οποιαδήποτε δύο σημεία του μπορούν να ενωθούν με πολυγωνική γραμμή που αποφεύγει το 0.

9 Μεμονωμένα μηδενικά και αρχή της ταυτότητας

Θεώρημα 9.1 (Μεμονωμένα μηδενικά). *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ χωρίο (ανοικτό και συνεκτικό) και f αναλυτική στο Ω. Τότε είτε $f \equiv 0$ στο Ω, είτε όλα τα μηδενικά της f είναι μεμονωμένα*[1].

Απόδειξη. Θέτουμε

$$S = \{z \in \Omega : f \equiv 0 \text{ σε κάποια γειτονιά του } z\}.$$

Το S είναι ανοικτό, από τον ορισμό του.

Θα δείξουμε ότι είναι και σχετικά κλειστό στο Ω. Έστω $z_0 \in \overline{S} \cap \Omega$. Υπάρχει ακολουθία $z_j \in S$ με $z_j \to z_0$.

Από τον ορισμό του S, για κάθε $k \geq 0$ έχουμε

$$f^{(k)}(z_j) = 0.$$

Επειδή οι παράγωγοι μιας αναλυτικής συνάρτησης είναι συνεχείς, προκύπτει

$$f^{(k)}(z_0) = 0 \qquad \text{για κάθε } k \geq 0.$$

Επομένως όλοι οι συντελεστές του αναπτύγματος Taylor της f στο z_0 είναι μηδέν. Άρα η f είναι ταυτοτικά μηδέν σε κάποια γειτονιά του z_0, δηλαδή $z_0 \in S$.

Συνεπώς, το S είναι ανοικτό και σχετικά κλειστό στο συνεκτικό σύνολο Ω. Άρα $S = \varnothing$ ή $S = \Omega$.

Αν $S = \Omega$, τότε $f \equiv 0$ στο Ω.

Αν $S = \varnothing$, έστω z_0 ένα μηδενικό της f. Εφόσον η f δεν είναι ταυτοτικά μηδέν σε καμία γειτονιά του z_0, από την τοπική παραγοντοποίηση έχουμε

$$f(z) = (z - z_0)^m h(z), \qquad h(z_0) \neq 0.$$

Επειδή η h είναι συνεχής στο z_0, υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε

$$|h(z)| > \frac{|h(z_0)|}{2} > 0, \qquad |z - z_0| < r.$$

Συνεπώς,

$$f(z) \neq 0 \qquad \text{για } 0 < |z - z_0| < r,$$

οπότε το z_0 είναι μεμονωμένο μηδενικό. □

Θεώρημα 9.2 (Αρχή της ταυτότητας). *Έστω f, g αναλυτικές σε χωρίο Ω. Αν το σύνολο*

$$E = \{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$$

έχει σημείο συσσώρευσης στο εσωτερικό του Ω, τότε $f \equiv g$ στο Ω.

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το προηγούμενο θεώρημα στην αναλυτική συνάρτηση $f - g$. Αν δεν είναι ταυτοτικά μηδενική, τα μηδενικά της είναι μεμονωμένα, άτοπο. □

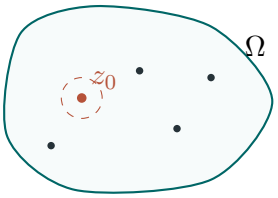
Παράδειγμα 9.3. Αν μια ακέραια αναλυτική συνάρτηση ικανοποιεί $f(1/n) = 0$ για κάθε $n \geq 1$, τότε $f \equiv 0$, επειδή $1/n \to 0 \in \mathbb{C}$. Επίσης, αν δύο αναλυτικές συναρτήσεις σε χωρίο συμπίπτουν σε ένα μη τετριμμένο ευθύγραμμο τμήμα του χωρίου, συμπίπτουν παντού.

Παράδειγμα 9.4 (Γιατί το σημείο συσσώρευσης πρέπει να είναι εσωτερικό). Στον δίσκο $D(0,1)$, η μη μηδενική αναλυτική $f(z) = \sin\big(\pi/(1-z)\big)$ μηδενίζεται στα σημεία $z_n = 1 - 1/n$, $n \geq 2$. Αυτά συσσωρεύονται μόνο στο 1, που ανήκει στο σύνορο του δίσκου, όχι στο εσωτερικό του.

[1] Ένα μηδενικό z_0 της f λέγεται μεμονωμένο αν υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε $f(z) \neq 0$ για κάθε $z \in D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$.

Πόρισμα 9.5. *Αν Ω είναι χωρίο και f μη σταθερή αναλυτική στο Ω, τότε δεν είναι σταθερή σε καμία μη κενή ανοικτή υποπεριοχή του Ω. Επομένως η f είναι ανοικτή απεικόνιση και δεν έχει τοπικό μέγιστο του μέτρου της.*

Απόδειξη. Αν $f = c$ σε μη κενό ανοικτό σύνολο, η αρχή της ταυτότητας για f και τη σταθερά c δίνει $f \equiv c$, αντίφαση. □



Τα μηδενικά μιας μη μηδενικής αναλυτικής
συνάρτησης δεν συσσωρεύονται μέσα στο χωρίο.

Θεώρημα 9.6 (Αρχή Μεγίστου Μέτρου). *Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ χωρίο και $f : U \to \mathbb{C}$ αναλυτική συνάρτηση.*

Αν η $|f|$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο σε κάποιο σημείο $z_0 \in U$, τότε η f είναι σταθερή στο U.

Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση.

10 Μιγαδική Ολοκλήρωση

10.1 Παραμετρικές καμπύλες και προσανατολισμός

Ορισμός 10.1. Μια *παραμετρική καμπύλη* είναι μια συνεχής απεικόνιση $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$. Λέγεται *τμηματικά* C^1 αν υπάρχει διαμέριση $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b$ τέτοια ώστε η γ να είναι C^1 σε κάθε $[t_{j-1}, t_j]$ (με τις κατάλληλες μονόπλευρες παραγώγους στα άκρα). Τα $\gamma(a), \gamma(b)$ λέγονται *άκρα* της καμπύλης. Η καμπύλη είναι *κλειστή* όταν $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Η *διαδρομή* περιλαμβάνει και τη φορά με την οποία διαγράφεται η εικόνα της καμπύλης: οι $\gamma(t) = e^{it}$ και $\eta(t) = e^{-it}$, $0 \le t \le 2\pi$, διαγράφουν την ίδια περιφέρεια με αντίθετους προσανατολισμούς. Ως *θετικό προσανατολισμό* ενός κύκλου εννοούμε τον αντιωρολογιακό.

Ορισμός 10.2. Η ανάστροφη καμπύλη της $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ είναι $\gamma^-(t) = \gamma(a + b - t)$. Αν το τέλος της γ_1 είναι η αρχή της γ_2, συμβολίζουμε με $\gamma_1 * \gamma_2$ τη διαδοχική διαδρομή τους. Το *μήκος* μιας τμηματικά C^1 καμπύλης είναι

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| \, \mathrm{d}t.$$

Παράδειγμα 10.3 (Βασικές παραμετροποιήσεις).

1. Το ευθύγραμμο τμήμα από a σε b: $\gamma(t) = a + t(b - a)$, $0 \le t \le 1$.
2. Ο θετικά προσανατολισμένος κύκλος κέντρου z_0 και ακτίνας R: $\gamma(t) = z_0 + Re^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, με μήκος $2\pi R$.
3. Το άνω ημικύκλιο από το R στο $-R$: $\gamma(t) = Re^{it}$, $0 \le t \le \pi$.
4. Η περιφέρεια $|z - z_0| = R$ διαγραφόμενη k φορές: $\gamma(t) = z_0 + Re^{ikt}$, $0 \le t \le 2\pi$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.



Σχήμα 2: Η ίδια γεωμετρική περιφέρεια δίνει διαφορετικές προσανατολισμένες καμπύλες.

Πρόταση 10.4. *Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ χωρίο και $f : U \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση. Αν*

$$f'(z) = 0 \qquad \text{για κάθε } z \in U,$$

τότε η f είναι σταθερή στο U.

Απόδειξη. Έστω $z_0, z_1 \in U$. Επειδή το U είναι ανοικτό και συνεκτικό, είναι πολυγωνικά συνεκτικό. Επομένως, υπάρχουν σημεία

$$z_0 = w_0, w_1, \ldots, w_m = z_1$$

τέτοια ώστε

$$[w_{j-1}, w_j] \subseteq U, \qquad j = 1, \ldots, m.$$

Για κάθε $j = 1, \ldots, m$, θεωρούμε την παραμετροποίηση του αντίστοιχου ευθύγραμμου τμήματος

$$\gamma_j(t) = w_{j-1} + t(w_j - w_{j-1}), \qquad 0 \le t \le 1.$$

Από τον κανόνα αλυσίδας έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\gamma_j(t)) &= f'(\gamma_j(t))\gamma_j'(t) \\ &= f'(\gamma_j(t))(w_j - w_{j-1}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Άρα η συνάρτηση $t \mapsto f(\gamma_j(t))$ είναι σταθερή στο $[0, 1]$. Ειδικότερα,

$$f(w_j) = f(w_{j-1}), \qquad j = 1, \ldots, m.$$

Συνεπώς,

$$f(z_1) = f(w_m) = f(w_{m-1}) = \cdots = f(w_0) = f(z_0).$$

Επειδή τα $z_0, z_1 \in U$ ήταν αυθαίρετα, η f είναι σταθερή στο U. □

10.2 Ορισμός του μιγαδικού ολοκληρώματος

Ορισμός 10.5. Έστω $\gamma : [a, b] \to U$ τμηματικά C^1 και $f : U \to \mathbb{C}$ συνεχής, όπου $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό. Ορίζουμε

$$\boxed{\int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\ \mathrm{d}t.}$$

Το ολοκλήρωμα στα δεξιά είναι το συνηθισμένο ολοκλήρωμα μιγαδικής συνάρτησης πραγματικής μεταβλητής. Συγκεκριμένα, αν $h(t) = u(t) + iv(t)$, όπου u, v είναι συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις στο $[a, b]$, ορίζουμε

$$\int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t + i\int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t.$$

Το ολοκλήρωμα αυτό είναι γραμμικό και ικανοποιεί την ανισότητα

$$\boxed{\left|\int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \int_a^b |h(t)|\,\mathrm{d}t.}$$

Πράγματι, επιλέγουμε θ ώστε

$$e^{-i\theta}\int_a^b h(t)\ \mathrm{d}t = \left|\int_a^b h(t)\ \mathrm{d}t\right|.$$

Το δεξί μέλος είναι πραγματικός αριθμός, άρα

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b h(t)\ \mathrm{d}t\right| &= \mathrm{Re}\left(e^{-i\theta}\int_a^b h(t)\ \mathrm{d}t\right)\\ &= \mathrm{Re}\left(\int_a^b e^{-i\theta}h(t)\ \mathrm{d}t\right)\\ &= \int_a^b \mathrm{Re}(e^{-i\theta}h(t))\ \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b h(t)\ \mathrm{d}t\right| &= \int_a^b \mathrm{Re}(e^{-i\theta}h(t))\ \mathrm{d}t\\ &\le \int_a^b |h(t)|\ \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Επιπλέον, αν $H : [a,b] \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο, τότε ισχύει το Θεμελιώδες Θεώρημα του Λογισμού:

$$\int_a^b H'(t)\,\mathrm{d}t = H(b) - H(a).$$

Οι παραπάνω ιδιότητες προκύπτουν από τις αντίστοιχες ιδιότητες των πραγματικών ολοκληρωμάτων.

Έστω

$$\gamma(t) = x(t) + iy(t), \qquad a \le t \le b,$$

και $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, όπου $z = x + iy$. Τότε

$$\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t),$$

οπότε, από τον ορισμό του ολοκληρώματος,

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\ \mathrm{d}t\\ &= \int_a^b \big(u(x(t),y(t)) + iv(x(t),y(t))\big)\big(x'(t) + iy'(t)\big)\ \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας και χωρίζοντας το πραγματικό από το φανταστικό μέρος, παίρνουμε

$$\int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z = \int_a^b (ux' - vy')\ \mathrm{d}t + i\int_a^b (vx' + uy')\ \mathrm{d}t,$$

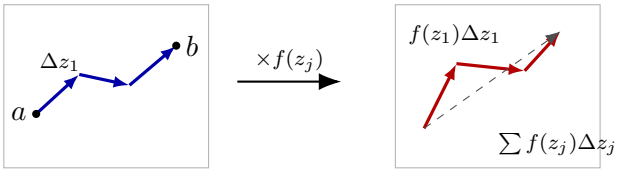
όπου, για συντομία, οι συναρτήσεις u, v, x', y' υπολογίζονται στο t, δηλαδή $u = u(x(t),y(t))$, $v = v(x(t),y(t))$ κ.ο.κ.

Έτσι το μιγαδικό ολοκλήρωμα συνδέεται με τα επικαμπύλια ολοκληρώματα του πραγματικού διανυσματικού λογισμού.

Γεωμετρική εικόνα. Χωρίζουμε μια καμπύλη σε μικρές μετατοπίσεις Δz_j. Στο αντίστοιχο άθροισμα Riemann,

$$\sum_j f(z_j)\,\Delta z_j,$$

όταν $f(z_j) \neq 0$, ο πολλαπλασιασμός με $f(z_j)$ *στρέφει* το διάνυσμα Δz_j κατά $\arg f(z_j)$ και *πολλαπλασιάζει* το μήκος του με $|f(z_j)|$. Αν βάλουμε τα νέα διανύσματα διαδοχικά, η τελική μετατόπιση προσεγγίζει το ολοκλήρωμα. Η εικόνα αυτή εξηγεί γιατί το ολοκλήρωμα είναι μιγαδικός αριθμός και γιατί μπορεί να υπάρξουν ακυρώσεις.



Διαδρομή γ Άθροισμα διανυσμάτων

Σχήμα 3: Η γεωμετρία ενός μιγαδικού αθροίσματος Riemann: κάθε μικρό βήμα της διαδρομής στρέφεται και μεγεθύνεται, και το άθροισμα είναι η τελική μετατόπιση (διακεκομμένο διάνυσμα).

Πρόταση 10.6 (Ανεξαρτησία από την παραμετροποίηση). *Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, $f : U \to \mathbb{C}$ συνεχής και*

$$\gamma : [a, b] \to U$$

τμηματικά C^1 καμπύλη.

Έστω επίσης

$$\sigma : [c, d] \to [a, b]$$

αύξουσα, συνεχής και τμηματικά C^1 συνάρτηση, με

$$\sigma(c) = a, \qquad \sigma(d) = b.$$

Τότε η καμπύλη $\widetilde{\gamma} = \gamma \circ \sigma$ έχει τον ίδιο προσανατολισμό με τη γ και

$$\boxed{\int_{\widetilde{\gamma}} f(z)\ \mathrm{d}z = \int_{\gamma} f(z)\ \mathrm{d}z.}$$

Απόδειξη. Από τον ορισμό του μιγαδικού ολοκληρώματος,

$$\int_{\widetilde{\gamma}} f(z)\ \mathrm{d}z = \int_c^d f(\widetilde{\gamma}(t))\widetilde{\gamma}'(t)\ \mathrm{d}t.$$

Επειδή $\widetilde{\gamma}(t) = \gamma(\sigma(t))$, ο κανόνας αλυσίδας δίνει

$$\widetilde{\gamma}'(t) = \gamma'(\sigma(t))\sigma'(t).$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\int_{\widetilde{\gamma}} f(z)\ \mathrm{d}z &= \int_c^d f(\gamma(\sigma(t)))\gamma'(\sigma(t))\sigma'(t)\ \mathrm{d}t \\ &= \int_a^b f(\gamma(s))\gamma'(s)\ \mathrm{d}s \\ &= \int_{\gamma} f(z)\ \mathrm{d}z,\end{aligned}$$

όπου στη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την αλλαγή μεταβλητής $s = \sigma(t)$.

Οι παραπάνω υπολογισμοί εφαρμόζονται σε καθένα από τα υποδιαστήματα στα οποία οι καμπύλες είναι C^1. □

Πρόταση 10.7 (Βασικές ιδιότητες και ανισότητα ML). *Για τμηματικά C^1 καμπύλες και συνεχείς συναρτήσεις ισχύουν*

$$\int_\gamma (af+bg)\,\mathrm{d}z = a\int_\gamma f\,\mathrm{d}z + b\int_\gamma g\,\mathrm{d}z,$$

$$\int_{\gamma_1*\gamma_2} f\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f\,\mathrm{d}z, \qquad \int_{\gamma^-} f\,\mathrm{d}z = -\int_\gamma f\,\mathrm{d}z,$$

$$\boxed{\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le L(\gamma)\max_{z\in\gamma([a,b])}|f(z)|.}$$

Η τελευταία είναι η ανισότητα ML.

Απόδειξη. Οι δύο πρώτες ιδιότητες προκύπτουν από τη γραμμικότητα και τη διάσπαση του ολοκληρώματος, η τρίτη με αλλαγή μεταβλητής. Τέλος,

$$\left|\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \int_a^b |f(\gamma(t))|\,|\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t \le \max_\gamma |f|\,L(\gamma).$$

□

Πόρισμα 10.8. *Έστω $\gamma:[a,b]\to U$ τμηματικά C^1 καμπύλη και*

$$\gamma^-(t) = \gamma(a+b-t), \qquad a\le t\le b,$$

η ανάστροφη καμπύλη.

Τότε

$$\boxed{\int_{\gamma^-} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z.}$$

Απόδειξη. Από τον ορισμό,

$$\begin{aligned}\int_{\gamma^-} f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_a^b f(\gamma(a+b-t))(-\gamma'(a+b-t))\,\mathrm{d}t\\ &= -\int_a^b f(\gamma(s))\gamma'(s)\,\mathrm{d}s\\ &= -\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z,\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την αλλαγή μεταβλητής $s = a+b-t$. □

10.3 Πρώτοι υπολογισμοί

Παράδειγμα 10.9 (Δυνάμεις πάνω σε κύκλο). Για $C_R(t) = Re^{it}$, $0\le t\le 2\pi$, και $n\in\mathbb{Z}$,

$$\int_{C_R} z^n\,\mathrm{d}z = iR^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t}\,\mathrm{d}t = \begin{cases}2\pi i, & n=-1,\\ 0, & n\ne -1.\end{cases}$$

Πράγματι, για $n\ne -1$, έχουμε

$$\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)}\right]_0^{2\pi} = 0,$$

αφού $n+1$ είναι μη μηδενικός ακέραιος.

Για $n = -1$, το ολοκλήρωμα ισούται με 2π. Ειδικότερα,

$$\boxed{\int_{|z|=R} \frac{\mathrm{d}z}{z} = 2\pi i.}$$

Αν αλλάξουμε προσανατολισμό, προκύπτει $-2\pi i$· αν διαγράψουμε δύο φορές τον κύκλο θετικά, παίρνουμε $4\pi i$.

Παρατήρηση 10.10 (Προοικονομία: τι μετράει το $\int \mathrm{d}z/z$;). Κατά μήκος καμπύλης που αποφεύγει το 0 μπορούμε να γράψουμε, με *συνεχή επιλογή γωνίας κατά μήκος της καμπύλης*, $z(t) = r(t)e^{i\theta(t)}$, όπου $r(t) > 0$. Μια τέτοια επιλογή κατασκευάζεται χωρίζοντας την καμπύλη σε μικρά τμήματα που χωρούν σε δίσκους χωρίς το 0, επιλέγοντας εκεί συνεχές όρισμα και προσαρμόζοντας τις τιμές του κατά πολλαπλάσια του 2π στα κοινά άκρα. Τότε, όπου οι παράγωγοι υπάρχουν,

$$\frac{z'(t)}{z(t)} = \frac{r'(t)}{r(t)} + i\theta'(t).$$

Για κλειστή καμπύλη το αρχικό και τελικό r είναι ίδια, οπότε

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = i\big(\theta(b) - \theta(a)\big).$$

Η συνολική μεταβολή της γωνίας είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π: το ολοκλήρωμα καταγράφει πόσες φορές η καμπύλη τυλίγεται γύρω από το 0. Θα το διατυπώσουμε ακριβέστερα όταν εισαγάγουμε τον *δείκτη στροφής*.

Παράδειγμα 10.11. Για $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$,

$$\int_\gamma \overline{z}\ \mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} e^{-it} i e^{it}\ \mathrm{d}t = 2\pi i.$$

Η $\overline{z}$ είναι συνεχής, όχι όμως ολόμορφη. Δεν μπορούμε επομένως να περιμένουμε μηδενισμό ολοκληρωμάτων γύρω από κλειστές καμπύλες μόνο από τη συνέχεια.

Ο λόγος, όπως θα δούμε παρακάτω, είναι ότι η συνάρτηση $\tilde{z}$ δεν έχει παράγουσα.

Παράδειγμα 10.12. Η συνάρτηση $f(z) = \overline{z}$ δεν έχει παράγουσα σε κανένα μη κενό ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$.

Απόδειξη. Έστω, προς άτοπο, ότι υπάρχει ολόμορφη συνάρτηση F σε κάποιο μη κενό ανοικτό σύνολο $U \subseteq \mathbb{C}$, τέτοια ώστε

$$F'(z) = \overline{z}.$$

Από τις εξισώσεις Cauchy–Riemann έχουμε

$$F_x = F' = x - iy, \qquad F_y = iF' = ix + y.$$

Εργαζόμαστε σε ένα ανοικτό ορθογώνιο που περιέχεται στο U. Ολοκληρώνοντας την πρώτη σχέση ως προς x, με το y σταθερό, βρίσκουμε

$$F(x, y) = \frac{x^2}{2} - ixy + C(y),$$

όπου C είναι συνάρτηση μόνο του y.

Παραγωγίζοντας ως προς y, παίρνουμε

$$F_y(x, y) = -ix + C'(y).$$

Συγκρίνοντας με τη δεύτερη σχέση, προκύπτει

$$-ix + C'(y) = ix + y,$$

δηλαδή

$$C'(y) = 2ix + y.$$

Αυτό είναι άτοπο, αφού το αριστερό μέλος είναι ανεξάρτητο του x, ενώ το δεξί όχι.

Επομένως, η $f(z) = \overline{z}$ δεν έχει παράγουσα σε κανένα μη κενό ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$. □

10.4 Μια πρώτη σύνδεση με το θεώρημα Green

Παρατήρηση 10.13 (Υπενθύμιση: Το θεώρημα Green). Έστω $D \subset \mathbb{R}^2$ φραγμένη περιοχή με απλό, κλειστό, τμηματικά C^1 σύνορο και

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)), \qquad a \le t \le b,$$

μια θετικά προσανατολισμένη παραμετροποίηση του ∂D, δηλαδή τέτοια ώστε η περιοχή D να βρίσκεται στα αριστερά καθώς διατρέχουμε το σύνορό της.

Αν P, Q είναι πραγματικές συναρτήσεις με συνεχείς πρώτες μερικές παραγώγους σε ανοικτή γειτονιά του $\overline{D}$, τότε το θεώρημα Green δίνει

$$\boxed{\begin{aligned}&\int_a^b \big(P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)\big)\ \mathrm{d}t \\ &\qquad = \iint_D (Q_x - P_y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y.\end{aligned}}$$

Πρόταση 10.14 (Πρώτη μορφή του Cauchy μέσω Green). *Έστω D φραγμένη περιοχή με θετικά προσανατολισμένο απλό, τμηματικά C^1 σύνορο, για την οποία εφαρμόζεται το θεώρημα Green. Αν $f = u + iv$ είναι ολόμορφη σε ανοικτή γειτονιά του $\overline{D}$ και οι u, v έχουν συνεχείς πρώτες μερικές παραγώγους εκεί, τότε*

$$\int_{\partial D} f(z)\ \mathrm{d}z = 0.$$

Απόδειξη. Έστω

$$\gamma(t) = x(t) + iy(t), \qquad a \le t \le b,$$

μια θετικά προσανατολισμένη, τμηματικά C^1 παραμετροποίηση του ∂D.

Από τον ορισμό του μιγαδικού ολοκληρώματος,

$$\begin{aligned}\int_{\partial D} f(z)\ \mathrm{d}z &= \int_a^b \big[u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))\big]\big[x'(t) + iy'(t)\big]\ \mathrm{d}t \\ &= \int_a^b (ux' - vy')\ \mathrm{d}t + i\int_a^b (vx' + uy')\ \mathrm{d}t,\end{aligned}$$

όπου στη δεύτερη γραμμή παραλείπουμε τα ορίσματα των συναρτήσεων για συντομία.

Εφαρμόζοντας το θεώρημα Green στο πραγματικό και στο φανταστικό μέρος, παίρνουμε

$$\int_{\partial D} f(z)\ \mathrm{d}z = \iint_D (-v_x - u_y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y + i\iint_D (u_x - v_y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y.$$

Από τις εξισώσεις Cauchy–Riemann,

$$u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x,$$

και επομένως και τα δύο διπλά ολοκληρώματα μηδενίζονται. □

Παράδειγμα 10.15 (Το μιγαδικό ολοκλήρωμα και το εμβαδόν). Έστω $D \subset \mathbb{C}$ φραγμένη περιοχή με απλό, κλειστό, τμηματικά C^1 σύνορο, για την οποία ισχύει το θεώρημα Green. Θεωρούμε μια θετικά προσανατολισμένη παραμετροποίηση του συνόρου:

$$\gamma(t) = x(t) + iy(t), \qquad a \le t \le b.$$

Θα δείξουμε ότι

$$\boxed{\int_{\partial D} \overline{z}\ \mathrm{d}z = 2i\ \mathrm{Area}(D).}$$

Πράγματι, από τον ορισμό του μιγαδικού ολοκληρώματος,

$$\begin{aligned}\int_{\partial D} \overline{z}\ \mathrm{d}z &= \int_a^b \overline{\gamma(t)}\,\gamma'(t)\ \mathrm{d}t \\ &= \int_a^b (x(t) - iy(t))(x'(t) + iy'(t))\ \mathrm{d}t \\ &= \int_a^b (xx' + yy')\ \mathrm{d}t + i\int_a^b (xy' - yx')\ \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα είναι μηδέν, αφού

$$\begin{aligned}\int_a^b (xx' + yy')\ \mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x^2 + y^2)\ \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\big[x(t)^2 + y(t)^2\big]_a^b = 0,\end{aligned}$$

επειδή η καμπύλη είναι κλειστή.

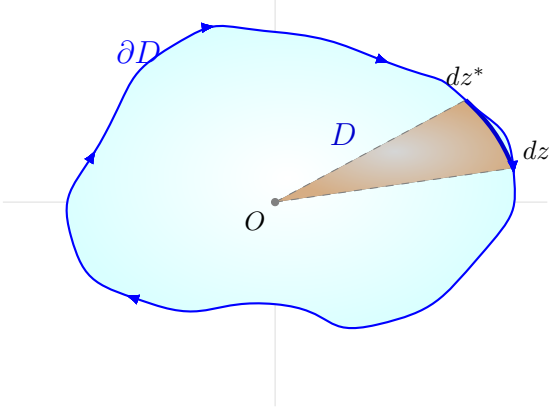
Για το δεύτερο ολοκλήρωμα εφαρμόζουμε το θεώρημα Green με $P(x,y) = -y$ και $Q(x,y) = x$. Έτσι,

$$\begin{aligned}\int_a^b (xy' - yx')\ \mathrm{d}t &= \iint_D (Q_x - P_y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \\ &= \iint_D 2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \\ &= 2\ \mathrm{Area}(D).\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\int_{\partial D} \overline{z}\ \mathrm{d}z = 2i\ \mathrm{Area}(D).$$

Το παράδειγμα δείχνει ότι ένα μιγαδικό ολοκλήρωμα μπορεί να έχει άμεση γεωμετρική σημασία: στην προκειμένη περίπτωση, το ολοκλήρωμα της $\overline{z}$ υπολογίζει, έως τον παράγοντα $2i$, το εμβαδόν της περιοχής που περικλείει η καμπύλη.



$$\int_{\partial D} \overline{z}\,dz = 2i\ \mathrm{Area}(D)$$

Παρατήρηση 10.16. Το Green δίνει μια πρώτη εξήγηση του θεωρήματος Cauchy, αλλά χρειάζεται πρόσθετη ομαλότητα. Για μια συνάρτηση που τη γνωρίζουμε μόνο ως *ολόμορφη*, δεν έχουμε ακόμη αποδείξει ότι οι μερικές παράγωγοι είναι συνεχείς. Το θεώρημα Goursat παρακάτω δεν θα χρησιμοποιήσει αυτή την υπόθεση.

11 Παράγουσες και ανεξαρτησία από τη διαδρομή

Ορισμός 11.1. Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και $f : U \to \mathbb{C}$ συνεχής. Λέμε ότι η f έχει *παράγουσα* στο U, αν υπάρχει ολόμορφη $F : U \to \mathbb{C}$ τέτοια ώστε $F' = f$ στο U.

Θεώρημα 11.2 (Θεμελιώδες θεώρημα επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων). *Αν $F' = f$ στο U και γ είναι τμηματικά C^1 καμπύλη με αρχή a και τέλος b, τότε*

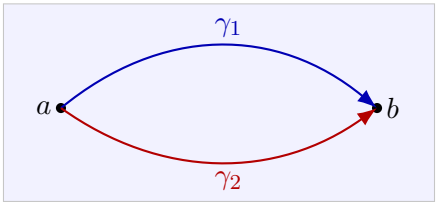
$$\boxed{\int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z = F(b) - F(a).}$$

Απόδειξη. Σε κάθε διάστημα όπου η γ είναι C^1 εφαρμόζουμε τον κανόνα αλυσίδας:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(\gamma(t)) = F'(\gamma(t))\gamma'(t) = f(\gamma(t))\gamma'(t).$$

Ολοκληρώνουμε και αθροίζουμε· οι τιμές στα ενδιάμεσα άκρα απαλείφονται τηλεσκοπικά. □

Πόρισμα 11.3. *Αν η f έχει παράγουσα στο U, τότε το $\int_\gamma f\ \mathrm{d}z$ εξαρτάται μόνο από τα άκρα της γ. Ιδίως, $\int_\gamma f\ \mathrm{d}z = 0$ για κάθε κλειστή τμηματικά C^1 καμπύλη στο U.*



Σχήμα 4: Δύο διαδρομές με ίδια άκρα. Πότε έχουν το ίδιο ολοκλήρωμα; Η ύπαρξη παραγούσας αποτελεί επαρκή συνθήκη.

Θεώρημα 11.4 (Τρία ισοδύναμα κριτήρια). *Έστω U χωρίο και $f : U \to \mathbb{C}$ συνεχής. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Η f έχει παράγουσα στο U.*
2. *Το ολοκλήρωμα $\int_\gamma f\ \mathrm{d}z$ εξαρτάται μόνο από τα άκρα της γ.*
3. *Για κάθε κλειστή τμηματικά C^1 καμπύλη γ στο U, $\int_\gamma f\ \mathrm{d}z = 0$.*

Απόδειξη. Οι (1) ⇒ (2) ⇒ (3) προκύπτουν αμέσως από το προηγούμενο θεώρημα. Υποθέτουμε το (3), επιλέγουμε $z_0 \in U$ και ορίζουμε Διαλέγουμε $z_0 \in U$. Για κάθε $z \in U$, θεωρούμε μια τμηματικά C^1 καμπύλη γ_z στο U, με αρχή το z_0 και πέρας το z, και ορίζουμε

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(\zeta)\ \mathrm{d}\zeta.$$

Η F είναι καλά ορισμένη, αφού, από την υπόθεση ότι το ολοκλήρωμα της f σε κάθε κλειστή καμπύλη είναι μηδέν, η τιμή του ολοκληρώματος δεν εξαρτάται από την επιλογή της γ_z. κατά

μήκος οποιασδήποτε τμηματικά C^1 διαδρομής στο U. Τέτοιες διαδρομές υπάρχουν επειδή το U είναι ανοικτό και συνεκτικό, άρα πολυγωνικά συνεκτικό. Αν δύο διαδρομές έχουν ίδια άκρα, η πρώτη μαζί με την αντίστροφη της δεύτερης είναι κλειστή, οπότε το (3) εξασφαλίζει ότι ο ορισμός δεν εξαρτάται από τη διαδρομή. Δικαιολογείται, λοιπόν, να υιοθετήσουμε και την συντομογραφία

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\ \mathrm{d}\zeta := \int_{\gamma_z} f(\zeta)\ \mathrm{d}\zeta.$$

Έστω $z \in U$. Επειδή το U είναι ανοικτό, για κάθε αρκετά μικρό $h \neq 0$ το ευθύγραμμο τμήμα $[z, z+h]$ περιέχεται στο U. Επομένως, από την ανεξαρτησία του ολοκληρώματος από τη διαδρομή,

$$\begin{aligned} F(z+h) - F(z) &= \int_{[z,z+h]} f(\zeta)\ \mathrm{d}\zeta \\ &= h \int_0^1 f(z+th)\ \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Άρα

$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} |f(z+th) - f(z)| \longrightarrow 0$$

από τη συνέχεια της f. Επομένως $F' = f$. □

Παράδειγμα 11.5. Η $f(z) = 2ze^{z^2}$ έχει παράγουσα $F(z) = e^{z^2}$ στο $\mathbb{C}$. Άρα, ανεξάρτητα από τη διαδρομή από το 0 στο $1+i$,

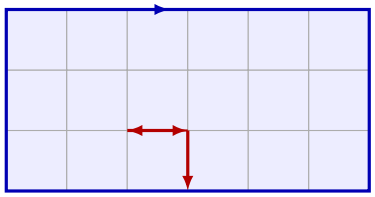
$$\int_0^{1+i} 2ze^{z^2}\ \mathrm{d}z = e^{(1+i)^2} - 1 = e^{2i} - 1.$$

Παρατήρηση 11.6 (Η πρώτη "τρύπα"). Η $1/z$ δεν έχει παράγουσα σε όλο το $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, διότι το ολοκλήρωμά της στον μοναδιαίο κύκλο είναι $2\pi i$. Αργότερα θα δούμε ότι έχει παράγουσα στο σχισμένο επίπεδο $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$: αυτή είναι ένας κλάδος του λογαρίθμου.

12 Το θεώρημα Cauchy–Goursat

Η γεωμετρική ιδέα. Σε ένα πολύ μικρό τετράγωνο, μια ολόμορφη συνάρτηση μοιάζει με $f(a) + f'(a)(z-a)$. Η αφινική αυτή συνάρτηση έχει παράγουσα, άρα το ολοκλήρωμά της στο σύνορο του τετραγώνου είναι μηδέν. Στο επίπεδο αυτό εκφράζεται η γεωμετρική ιδιότητα της μιγαδικής παραγώγου: τοπικά έχουμε περιστροφή μαζί με ομοιόμορφη μεγέθυνση.

Αν χωρίσουμε μια περιοχή σε μικρά τετράγωνα, οι εσωτερικές πλευρές διαγράφονται δύο φορές με αντίθετη φορά και οι συνεισφορές τους ακυρώνονται. Αυτή είναι η *εικόνα* πίσω από το θεώρημα Cauchy. Για την πλήρη απόδειξη, ωστόσο, χρειάζεται να ελέγξουμε τα σφάλματα της τοπικής προσέγγισης· αυτό θα γίνει με το Goursat.



Σχήμα 5: Η γεωμετρική ακύρωση κατά Needham: κατά την άθροιση των συνοριακών ολοκληρωμάτων των κελιών, οι κοινές εσωτερικές πλευρές ακυρώνονται ανά δύο. Το σχήμα εξηγεί την ιδέα, όχι από μόνο του την αυστηρή απόδειξη του Cauchy.

Θεώρημα 12.1 (Cauchy–Goursat για τρίγωνα). *Έστω Δ κλειστό τρίγωνο με $\Delta \subset U$, όπου $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, και f ολόμορφη στο U. Τότε, με θετικό προσανατολισμό στο σύνορο,*

$$\boxed{\int_{\partial\Delta} f(z)\ \mathrm{d}z = 0.}$$

Απόδειξη. Ενώνοντας τα μέσα των πλευρών, χωρίζουμε το Δ σε τέσσερα όμοια τρίγωνα. Τα ολοκληρώματα στις εσωτερικές πλευρές ακυρώνονται. Ένα τουλάχιστον υποτρίγωνο, έστω Δ_1, ικανοποιεί

$$\left|\int_{\partial\Delta} f\ \mathrm{d}z\right| \le 4\left|\int_{\partial\Delta_1} f\ \mathrm{d}z\right|.$$

Επαναλαμβάνοντας μέσα στο επιλεγμένο τρίγωνο, κατασκευάζουμε εγκιβωτισμένα Δ_n με

$$\left|\int_{\partial\Delta} f\ \mathrm{d}z\right| \le 4^n\left|\int_{\partial\Delta_n} f\ \mathrm{d}z\right|, \quad \operatorname{diam}(\Delta_n) = 2^{-n}\operatorname{diam}(\Delta),$$

και $L(\partial\Delta_n) = 2^{-n}L(\partial\Delta)$. Τα κλειστά τρίγωνα είναι συμπαγή και οι διάμετροί τους τείνουν στο μηδέν· επομένως έχουν μοναδικό κοινό σημείο $a \in \Delta$.

Αφού η f είναι μιγαδικά διαφορίσιμη στο a, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε, για $0 < |z-a| < \delta$,

$$\left|\frac{f(z)-f(a)}{z-a} - f'(a)\right| < \varepsilon.$$

Επομένως,

$$\big|f(z) - f(a) - f'(a)(z-a)\big| \le \varepsilon|z-a|, \qquad |z-a| < \delta.$$

Οι συναρτήσεις $f(a)$ και $f'(a)(z-a)$ έχουν παράγουσες και συνεπώς τα ολοκληρώματά τους στην κλειστή καμπύλη $\partial\Delta_n$ είναι μηδέν. Άρα

$$\int_{\partial\Delta_n} f(z)\ \mathrm{d}z = \int_{\partial\Delta_n} \big(f(z) - f(a) - f'(a)(z-a)\big)\ \mathrm{d}z.$$

Επειδή $a \in \Delta_n$ και $\operatorname{diam}(\Delta_n) \to 0$, για αρκετά μεγάλο n έχουμε $\Delta_n \subset D(a,\delta)$. Τότε, από την ανισότητα ML,

$$\begin{aligned}\left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)\ \mathrm{d}z\right| &\le \varepsilon \max_{z\in\partial\Delta_n} |z-a|\, L(\partial\Delta_n)\\ &\le \varepsilon \operatorname{diam}(\Delta_n) L(\partial\Delta_n).\end{aligned}$$

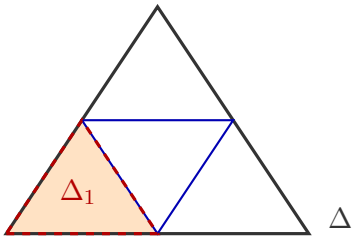
Συνεπώς, από την κατασκευή των τριγώνων,

$$\begin{aligned}\left|\int_{\partial\Delta} f(z)\ \mathrm{d}z\right| &\le 4^n\left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)\ \mathrm{d}z\right|\\ &\le 4^n\varepsilon \operatorname{diam}(\Delta_n) L(\partial\Delta_n)\\ &= \varepsilon \operatorname{diam}(\Delta) L(\partial\Delta).\end{aligned}$$

Επειδή το $\varepsilon > 0$ είναι αυθαίρετο, καταλήγουμε ότι

$$\boxed{\int_{\partial\Delta} f(z)\ \mathrm{d}z = 0.}$$

□



Σχήμα 6: Goursat: διαίρεση σε τέσσερα όμοια τρίγωνα και επιλογή ενός, στο οποίο επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία.

12.1 Τοπικές παράγουσες

Ορισμός 12.2. Ένα σύνολο $U \subseteq \mathbb{C}$ λέγεται *αστρόμορφο ως προς* $z_0 \in U$, αν για κάθε $z \in U$ το ευθύγραμμο τμήμα $[z_0, z]$ περιέχεται στο U.

Θεώρημα 12.3 (Παράγουσα σε αστρόμορφο χωρίο). *Αν U είναι ανοικτό αστρόμορφο σύνολο ως προς z_0 και f ολόμορφη στο U, τότε*

$$F(z) = \int_{[z_0,z]} f(\zeta)\ \mathrm{d}\zeta$$

είναι παράγουσα της f στο U. Ειδικότερα, κάθε ολόμορφη συνάρτηση έχει τοπική παράγουσα σε αρκετά μικρό δίσκο γύρω από κάθε σημείο του πεδίου της.

Απόδειξη. Ορίζουμε

$$F(z) = \int_{[z_0,z]} f(\zeta)\ \mathrm{d}\zeta, \qquad z \in U.$$

Θα δείξουμε ότι $F'(z) = f(z)$ για κάθε $z \in U$.

Σταθεροποιούμε $z \in U$. Επειδή το U είναι ανοικτό, υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε

$$D(z, r) \subseteq U.$$

Για $0 < |h| < r$, το ευθύγραμμο τμήμα $[z, z + h]$ περιέχεται στο U.

Θεωρούμε το τρίγωνο με κορυφές $z_0, z, z + h$. Ολόκληρο το τρίγωνο περιέχεται στο U, διότι κάθε σημείο του γράφεται στη μορφή

$$(1 - t)z_0 + tw, \qquad 0 \le t \le 1, \quad w \in [z, z + h],$$

και το U είναι αστρόμορφο ως προς z_0.

Αν οι τρεις κορυφές δεν είναι συνευθειακές, το θεώρημα Goursat δίνει

$$\int_{[z_0,z]} f(\zeta)\ \mathrm{d}\zeta + \int_{[z,z+h]} f(\zeta)\ \mathrm{d}\zeta + \int_{[z+h,z_0]} f(\zeta)\ \mathrm{d}\zeta = 0.$$

Η ίδια ισότητα ισχύει και όταν οι κορυφές είναι συνευθειακές, αφού τότε τα ολοκληρώματα κατά μήκος των τριών προσανατολισμένων τμημάτων αλληλοαναιρούνται.

Επειδή

$$\int_{[z+h,z_0]} f(\zeta)\ \mathrm{d}\zeta = -\int_{[z_0,z+h]} f(\zeta)\ \mathrm{d}\zeta,$$

η προηγούμενη ισότητα γράφεται

$$\int_{[z_0,z+h]} f(\zeta)\ \mathrm{d}\zeta - \int_{[z_0,z]} f(\zeta)\ \mathrm{d}\zeta = \int_{[z,z+h]} f(\zeta)\ \mathrm{d}\zeta.$$

Από τον ορισμό της F, συμπεραίνουμε ότι

$$F(z+h) - F(z) = \int_{[z,z+h]} f(\zeta)\ \mathrm{d}\zeta. \tag{7}$$

Παραμετροποιούμε το τελευταίο τμήμα με

$$\gamma(t) = z + th, \qquad 0 \le t \le 1.$$

Επειδή $\gamma'(t) = h$, έχουμε

$$F(z+h) - F(z) = h \int_0^1 f(z+th)\ \mathrm{d}t.$$

Επομένως,

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \int_0^1 f(z+th)\ \mathrm{d}t.$$

Τέλος, από τη συνέχεια της f στο z,

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z)\right| &= \left|\int_0^1 \big(f(z+th) - f(z)\big)\ \mathrm{d}t\right| \\ &\le \sup_{0\le t\le 1} |f(z+th) - f(z)| \longrightarrow 0\end{aligned}$$

καθώς $h \to 0$.

Άρα $F'(z) = f(z)$, όπως θέλαμε. □

Παρατήρηση 12.4. Για συνάρτηση που γνωρίζουμε ήδη ότι είναι *αναλυτική*, η τοπική ύπαρξη παραγούσας προκύπτει και από ολοκλήρωση της δυναμοσειράς κατά όρους. Η αξία του Goursat είναι ότι ισχύει για μια συνάρτηση για την οποία υποθέτουμε *μόνο ολόμορφη*. Έτσι θα αποδείξουμε αργότερα την αντίστροφη συνεπαγωγή "ολόμορφη ⇒ αναλυτική".

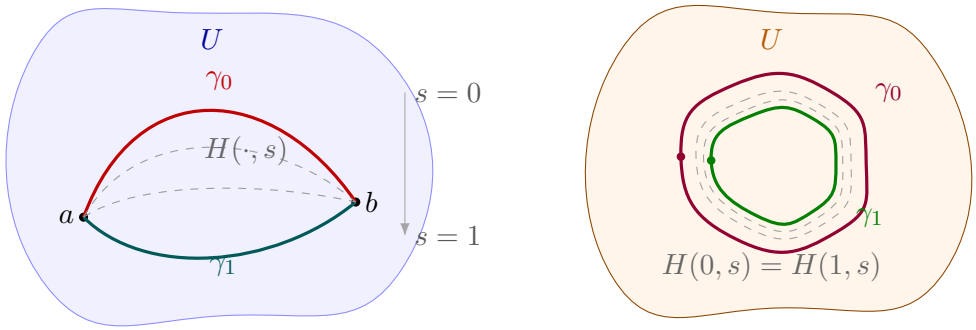
Παρατήρηση 12.5. Προσέχουμε ότι η παραπάνω ισότητα (7) δεν προκύπτει από κάποια ήδη γνωστή ανεξαρτησία του ολοκληρώματος από τη διαδρομή. Είναι ακριβώς το θεώρημα Goursat που επιτρέπει εδώ την αντικατάσταση του ευθύγραμμου τμήματος $[z_0, z+h]$ από την τεθλασμένη $[z_0, z] * [z, z+h]$.

13 Ομοτοπία και ολοκληρώματα

Ορισμός 13.1 (Ομοτοπία). Έστω $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to U$ συνεχείς καμπύλες με κοινά άκρα a, b. Λέμε ότι οι γ_0, γ_1 είναι *ομοτοπικές με σταθερά άκρα* στο U αν υπάρχει συνεχής απεικόνιση $H : [0,1]^2 \to U$ με

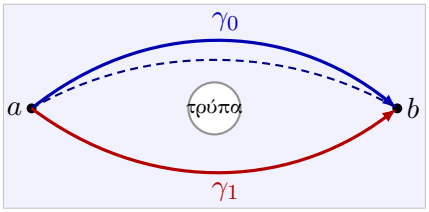
$$H(t,0) = \gamma_0(t), \qquad H(t,1) = \gamma_1(t), \qquad H(0,s) = a, \quad H(1,s) = b.$$

Για *κλειστές* καμπύλες επιτρέπουμε να μετακινείται το σημείο εκκίνησης κατά την παραμόρφωση, αλλά απαιτούμε $H(0,s) = H(1,s)$ για όλα τα s.



Ομοτοπία με σταθερά άκρα Κλειστές καμπύλες

Σχήμα 7: Αριστερά: οι γ_0, γ_1 είναι ομοτοπικές με σταθερά άκρα, αφού παραμορφώνονται συνεχώς η μία στην άλλη μέσα στο U, χωρίς να κινούνται τα άκρα a, b. Δεξιά: για κλειστές καμπύλες δεν κρατάμε σταθερό σημείο βάσης, αλλά σε κάθε στάδιο της παραμόρφωσης η καμπύλη παραμένει κλειστή, δηλαδή $H(0, s) = H(1, s)$.



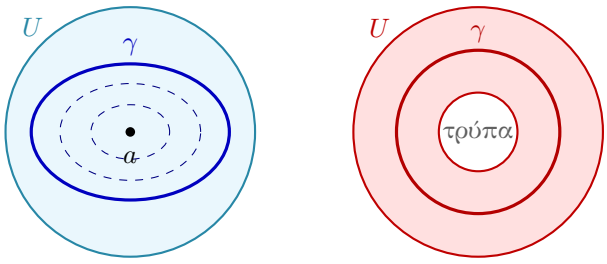
Σχήμα 8: Η τρύπα εμποδίζει την παραμόρφωση της άνω διαδρομής στην κάτω με σταθερά άκρα. Το εμπόδιο δεν είναι το μήκος ή η μορφή της διαδρομής, αλλά το σημείο που λείπει από την περιοχή.

Μια τεχνική λεπτομέρεια. Η ομοτοπία απαιτεί μόνο *συνέχεια* ως προς δύο μεταβλητές. Δεν επιτρέπεται επομένως να υποθέσουμε ότι οι ενδιάμεσες καμπύλες είναι τμηματικά C^1. Για ολόμορφες συναρτήσεις μπορούμε να επεκτείνουμε τον ορισμό του ολοκληρώματος σε συνεχείς καμπύλες χρησιμοποιώντας τις τοπικές παράγουσες.

Ορισμός 13.2. Ένα χωρίο $U \subseteq \mathbb{C}$ λέγεται *απλά συνεκτικό* αν κάθε κλειστή συνεχής καμπύλη στο U είναι ομοτοπική, μέσω κλειστών καμπυλών στο U, με μια σταθερή καμπύλη.

Παράδειγμα 13.3. Κάθε αστρόμορφο ανοικτό σύνολο U ως προς $a \in U$ είναι απλά συνεκτικό: για κάθε κλειστή συνεχή γ η απεικόνιση

$$H(t, s) = (1 - s)\gamma(t) + sa \qquad (0 \le t, s \le 1)$$



Σύσπαση σε σημείο Μη συσταλτή καμπύλη

Σχήμα 9: Αριστερά, μια κλειστή καμπύλη συστέλλεται συνεχώς σε σημείο. Δεξιά, η καμπύλη περιβάλλει την τρύπα του δακτυλίου και δεν μπορεί να συσταλεί μέσα στο χωρίο.

παραμένει στο U, αποτελείται από κλειστές καμπύλες και ενώνει τη γ με τη σταθερή καμπύλη c_a. Επομένως ο δίσκος, το άνω ημιεπίπεδο και το σχισμένο επίπεδο $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ είναι απλά συνεκτικά (το τελευταίο είναι αστρόμορφο ως προς 1). Αντίθετα, τα $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ και $\{1<|z|<2\}$ δεν είναι απλά συνεκτικά: αν ήταν, το επόμενο θεώρημα θα έδινε $\int_{|z|=r} \mathrm{d}z/z = 0$, ενώ το ολοκλήρωμα ισούται με $2\pi i$ για κάθε αντίστοιχο κύκλο γύρω από το 0.

Πολυγωνική προσέγγιση και ομοτοπική μορφή του θεωρήματος Cauchy

Το επόμενο λήμμα είναι το βασικό εργαλείο: δείχνει ότι, για μια συνεχή καμπύλη, μπορούμε να αντικαταστήσουμε το ολοκλήρωμα πάνω στην ίδια την καμπύλη με το ολοκλήρωμα πάνω σε κατάλληλη πολυγωνική προσέγγιση.

Πρόταση 13.4 (Πολυγωνική αντικατάσταση καμπύλης). *Έστω $U\subseteq\mathbb{C}$ ανοικτό, f ολόμορφη στο U και $\gamma:[0,1]\to U$ τμηματικά C^1. Τότε, για κάθε αρκετά λεπτή διαμέριση*

$$0=t_0<t_1<\cdots<t_N=1,$$

η πολυγωνική καμπύλη P, που ενώνει διαδοχικά τα σημεία $\gamma(t_0),\dots,\gamma(t_N)$, περιέχεται στο U και ικανοποιεί

$$\boxed{\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z=\int_P f(z)\,\mathrm{d}z.}$$

Απόδειξη. Επειδή το $K=\gamma([0,1])$ είναι συμπαγές υποσύνολο του ανοικτού U, υπάρχει $r>0$ τέτοιο ώστε

$$D(w,r)\subset U \qquad \text{για κάθε } w\in K.$$

Αυτό προκύπτει από τη θετική απόσταση του K από το συμπλήρωμα του U, όταν αυτό είναι μη κενό.

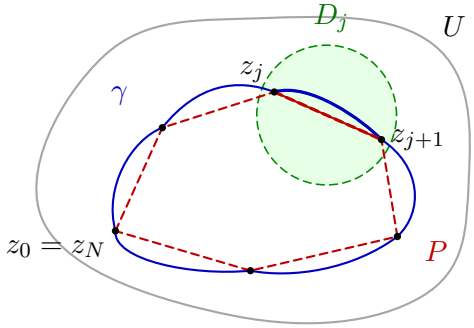
Από την ομοιόμορφη συνέχεια της γ, κάθε αρκετά λεπτή διαμέριση ικανοποιεί

$$\gamma([t_{j-1},t_j])\subset D(\gamma(t_{j-1}),r), \qquad 1\le j\le N.$$

Επειδή ο δίσκος είναι κυρτός, περιέχει και τη χορδή

$$[\gamma(t_{j-1}),\gamma(t_j)].$$

Η f έχει παράγουσα στον δίσκο αυτόν.



Σχήμα 10: Πολυγωνική αντικατάσταση της καμπύλης γ. Το υποτόξο της γ από το z_j στο z_{j+1} και η αντίστοιχη χορδή της P περιέχονται στον ίδιο δίσκο $D_j\subset U$. Επειδή η f έχει παράγουσα στον D_j, τα ολοκληρώματα πάνω στις δύο αυτές καμπύλες είναι ίσα.

Επομένως,

$$\int_{\gamma|_{[t_{j-1},t_j]}} f(z)\,\mathrm{d}z=\int_{[\gamma(t_{j-1}),\gamma(t_j)]} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Αθροίζοντας ως προς j, παίρνουμε την επιθυμητή ισότητα. □

Θεώρημα 13.5 (Ομοτοπική μορφή του θεωρήματος Cauchy). *Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και f ολόμορφη στο U.*

Αν δύο τμηματικά C^1 καμπύλες $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to U$ είναι ομοτοπικές με σταθερά άκρα, τότε

$$\boxed{\int_{\gamma_0} f(z)\ \mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\ \mathrm{d}z.}$$

Η ίδια ισότητα ισχύει αν οι γ_0, γ_1 είναι κλειστές και ομοτοπικές μέσω κλειστών καμπυλών, χωρίς να απαιτείται σταθερό σημείο εκκίνησης.

Απόδειξη. Έστω $H : [0,1]^2 \to U$ η ομοτοπία, με

$$H(t,0) = \gamma_0(t), \qquad H(t,1) = \gamma_1(t).$$

Στην περίπτωση σταθερών άκρων έχουμε

$$H(0,s) = a, \qquad H(1,s) = b,$$

ενώ στην περίπτωση κλειστών καμπυλών

$$H(0,s) = H(1,s).$$

Επειδή το $K = H([0,1]^2)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του ανοικτού U, υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε

$$D(w,r) \subset U \qquad \text{για κάθε } w \in K.$$

Από την ομοιόμορφη συνέχεια της H, επιλέγουμε διαμέριση

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = 1$$

τόσο λεπτή ώστε

$$|H(t,s) - H(t_{j-1},s)| < \frac{r}{4} \tag{8}$$

για κάθε $s \in [0,1]$ και $t \in [t_{j-1}, t_j]$.

Για κάθε $s \in [0,1]$, θεωρούμε την πολυγωνική καμπύλη

$$P_s = [z_0(s), z_1(s), \ldots, z_N(s)], \qquad z_j(s) = H(t_j, s).$$

Από την (8), κάθε πλευρά της P_s περιέχεται σε δίσκο του U. Επομένως, το ολοκλήρωμα

$$I(s) = \int_{P_s} f(z)\ \mathrm{d}z$$

είναι καλά ορισμένο.

Θα δείξουμε ότι η I είναι τοπικά σταθερή.

Πράγματι, σταθεροποιούμε $s_0 \in [0,1]$. Από την ομοιόμορφη συνέχεια της H, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε, αν $|s - s_0| < \delta$, τότε

$$|H(t,s) - H(t,s_0)| < \frac{r}{4} \qquad \text{για κάθε } t \in [0,1].$$

Για κάθε $j = 1, \ldots, N$, θεωρούμε την κλειστή πολυγωνική καμπύλη Q_j με διαδοχικές κορυφές

$$z_{j-1}(s_0), \quad z_j(s_0), \quad z_j(s), \quad z_{j-1}(s).$$

Οι τέσσερις κορυφές βρίσκονται στον δίσκο

$$D_j = D(z_{j-1}(s_0), r).$$

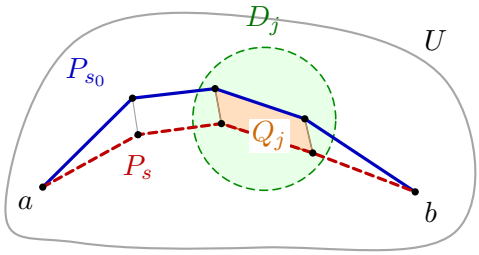
Πράγματι, αυτό προκύπτει από τις δύο προηγούμενες εκτιμήσεις και την τριγωνική ανισότητα. Για παράδειγμα,

$$\begin{aligned} |z_j(s) - z_{j-1}(s_0)| &\le |z_j(s) - z_{j-1}(s)| \\ &\quad + |z_{j-1}(s) - z_{j-1}(s_0)| \\ &< \frac{r}{4} + \frac{r}{4} < r. \end{aligned}$$

Επειδή ο D_j είναι κυρτός, ολόκληρη η Q_j περιέχεται σε αυτόν. Η f έχει παράγουσα στον D_j, οπότε

$$\int_{Q_j} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Αθροίζουμε τις ισότητες αυτές ως προς j. Οι ενδιάμεσες συνδετικές πλευρές αλληλοαναιρούνται. Στην περίπτωση σταθερών άκρων, οι δύο ακραίες συνδετικές πλευρές εκφυλίζονται



Σχήμα 11: Δύο πολυγωνικές καμπύλες P_{s_0} και P_s, που αντιστοιχούν σε κοντινές τιμές της παραμέτρου της ομοτοπίας. Τα αντίστοιχα τμήματά τους αποτελούν πλευρές μικρών τετραπλεύρων. Το επισημασμένο τετράπλευρο Q_j περιέχεται σε έναν δίσκο $D_j \subset U$, όπου η f έχει παράγουσα. Επομένως, το ολοκλήρωμα πάνω στο Q_j είναι μηδέν.

σε σημεία. Στην περίπτωση κλειστών καμπυλών, συμπίπτουν και εμφανίζονται με αντίθετους προσανατολισμούς.

Επομένως, και στις δύο περιπτώσεις,

$$0 = \sum_{j=1}^{N} \int_{Q_j} f(z)\,\mathrm{d}z = I(s_0) - I(s).$$

Άρα η I είναι τοπικά σταθερή. Επειδή το $[0,1]$ είναι συνεκτικό, η I είναι σταθερή και συνεπώς

$$I(0) = I(1).$$

Τέλος, η (8) εξασφαλίζει ότι, για $\nu = 0, 1$, κάθε υποτόξο

$$\gamma_\nu([t_{j-1}, t_j])$$

και η αντίστοιχη πλευρά της P_ν βρίσκονται στον ίδιο δίσκο, όπου η f έχει παράγουσα.

Επειδή οι γ_0, γ_1 είναι τμηματικά C^1, η προηγούμενη πρόταση δίνει

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,\mathrm{d}z = I(0), \qquad \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = I(1).$$

Επομένως,

$$\boxed{\int_{\gamma_0} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z.}$$

□

Ορισμός 13.6 (Απλά συνεκτικό χωρίο). Ένα χωρίο $U \subseteq \mathbb{C}$ λέγεται *απλά συνεκτικό* αν κάθε κλειστή συνεχής καμπύλη στο U είναι ομοτοπική, μέσω κλειστών καμπυλών του U, σε μια σταθερή καμπύλη.

Με άλλα λόγια, κάθε κλειστή καμπύλη στο U μπορεί να συσταλεί συνεχώς σε ένα σημείο, χωρίς να εξέλθει από το U.

Γεωμετρικά, ένα απλά συνεκτικό χωρίο είναι ένα χωρίο χωρίς «τρύπες». Κάθε αστρόμορφο χωρίο είναι απλά συνεκτικό, αλλά το αντίστροφο δεν ισχύει.

Πόρισμα 13.7 (Θεώρημα Cauchy για απλά συνεκτικά χωρία). *Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ απλά συνεκτικό χωρίο και f ολόμορφη στο U. Τότε, για κάθε κλειστή, τμηματικά C^1 καμπύλη γ στο U,*

$$\boxed{\int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z = 0.}$$

Απόδειξη. Επειδή το U είναι απλά συνεκτικό, η γ είναι ομοτοπική σε μια σταθερή καμπύλη c, μέσω κλειστών καμπυλών του U.

Από την ομοτοπική μορφή του θεωρήματος Cauchy,

$$\int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z = \int_c f(z)\ \mathrm{d}z = 0.$$

□

13.1 Ο λογάριθμος ως ολοκλήρωμα

Θεώρημα 13.8 (Ολόμορφος κλάδος λογαρίθμου). *Έστω U απλά συνεκτικό χωρίο με $0 \notin U$, $z_0 \in U$ και $w_0 \in \mathbb{C}$ με $e^{w_0} = z_0$. Τότε*

$$L(z) = w_0 + \int_{z_0}^{z} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta}$$

είναι καλά ορισμένη ολόμορφη συνάρτηση στο U και

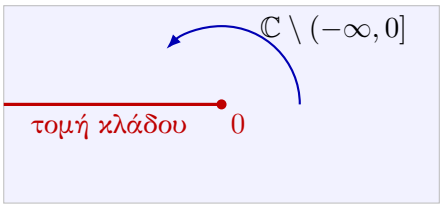
$$L'(z) = \frac{1}{z}, \qquad e^{L(z)} = z.$$

Απόδειξη. Η ανεξαρτησία από τη διαδρομή και η ισότητα $L' = 1/z$ προκύπτουν από το προηγούμενο θεώρημα. Παραγωγίζουμε:

$$\big(ze^{-L(z)}\big)' = e^{-L(z)}\big(1 - zL'(z)\big) = 0.$$

Επειδή το U είναι συνεκτικό, η $ze^{-L(z)}$ είναι σταθερή. Στο z_0 παίρνει την τιμή $z_0 e^{-w_0} = 1$. Άρα $e^{L(z)} = z$ σε όλο το U. □

Παρατήρηση 13.9. Η ίδια μέθοδος δίνει *ολόμορφο λογάριθμο* μιας *αναλυτικής* συνάρτησης g χωρίς μηδενικά σε απλά συνεκτικό χωρίο: η g'/g είναι αναλυτική, άρα ολόμορφη· την ολοκληρώνουμε και ρυθμίζουμε την προσθετική σταθερά. Επομένως υπάρχει και ολόμορφη m-οστή ρίζα $H = e^{L/m}$ της g για κάθε $m \geq 1$. Αυτό είναι το παγκόσμιο ανάλογο της τοπικής ρίζας που χρησιμοποιήσαμε στην κανονική μορφή.



Σχήμα 12: Στο σχισμένο επίπεδο μπορούμε να επιλέξουμε μια συνεχή γωνία και έναν μονοτίμο ολόμορφο κλάδο του λογαρίθμου.

14 Ο ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy

Θεώρημα 14.1 (Τοπικός ολοκληρωτικός τύπος Cauchy). *Έστω $\overline{D(a,R)} \subset U$, όπου U είναι ανοικτό, και f ολόμορφη στο U. Αν $C = \partial D(a,R)$ έχει θετικό προσανατολισμό, τότε για κάθε $z \in D(a,R)$,*

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta.}$$

Απόδειξη. Για $z \in D(a,R)$ παίρνουμε $r > 0$ τόσο μικρό ώστε $\overline{D(z,r)} \subset D(a,R)$, και γράφουμε $C_r = \partial D(z,r)$ με θετικό προσανατολισμό. Μέσα στο $\overline{D(a,R)} \setminus \{z\} \subset U \setminus \{z\}$ η καμπύλη C παραμορφώνεται στο C_r: κάθε σημείο του εξωτερικού κύκλου κινείται ακτινικά προς το z μέχρι να συναντήσει τον μικρό κύκλο, χωρίς ποτέ να περάσει από το z.

Θέτουμε για $\zeta \neq z$

$$g(\zeta) = \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}.$$

Η g είναι ολόμορφη στο $U \setminus \{z\}$, ενώ $g(\zeta) \to f'(z)$ καθώς $\zeta \to z$· άρα είναι φραγμένη κοντά στο z. Από την ομοτοπική αναλλοιωτότητα,

$$\int_C g(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta = \int_{C_r} g(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta.$$

Όμως,

$$\left| \int_{C_r} g(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta \right| \leq 2\pi r \max_{C_r} |g|.$$

Παρατηρούμε ότι από τη συνέχεια στο z_0, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$|g(z) - g(z_0)| < 1, \qquad |z - z_0| < \delta.$$

Συνεπώς, για κάθε $0 < r < \delta$,

$$\max_{C_r} |g| \leq |g(z_0)| + 1 =: M.$$

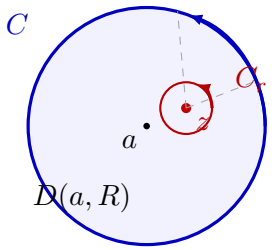
Επομένως παίρνοντας $r \to 0$, παίρνουμε ότι $\int_C g\, \mathrm{d}\zeta = 0$. Επίσης,

$$\int_C \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} = \int_{C_r} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i.$$

Άρα

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta = \int_C g(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta + f(z) \int_C \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i f(z).$$

□



Σχήμα 13: Για τον ολοκληρωτικό τύπο, ο εξωτερικός κύκλος C παραμορφώνεται σε μικρό κύκλο C_r γύρω από το z, χωρίς να διασχίσει το σημείο z.

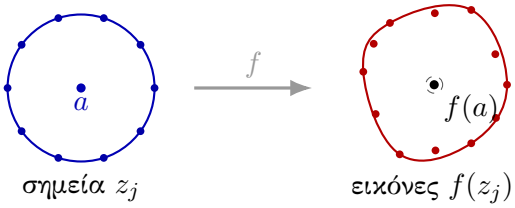
14.1 Ο τύπος Cauchy ως ιδιότητα μέσης τιμής

Πόρισμα 14.2 (Μέση τιμή πάνω σε κύκλο). *Με τις υποθέσεις του ολοκληρωτικού τύπου,*

$$\boxed{f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + Re^{it})\ \mathrm{d}t.}$$

Απόδειξη. Στον ολοκληρωτικό τύπο βάζουμε $z = a$ και παραμετροποιούμε $\zeta = a + Re^{it}$. Τότε $\mathrm{d}\zeta = iRe^{it}\ \mathrm{d}t$, οπότε ο παράγοντας $\zeta - a = Re^{it}$ απαλείφεται. □

Γεωμετρική ερμηνεία. Παίρνουμε N ισαπέχοντα σημεία z_j στον κύκλο με κέντρο a. Το $N^{-1}\sum_{j=1}^{N} f(z_j)$ είναι το *κέντρο βάρους* των εικόνων τους. Καθώς $N \to \infty$, το κέντρο βάρους τείνει στο $f(a)$. Δηλαδή η τιμή μιας ολόμορφης συνάρτησης στο κέντρο *καθορίζεται από τις τιμές της πάνω στον κύκλο.*



Σχήμα 14: Η τιμή $f(a)$ είναι το όριο των κέντρων βάρους των εικόνων πολλών ισαπέχοντων σημείων πάνω στον κύκλο.

14.2 Ολόμορφη και αναλυτική: η ισοδυναμία

Θεώρημα 14.3 (Κάθε ολόμορφη συνάρτηση είναι αναλυτική). *Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και $f : U \to \mathbb{C}$ ολόμορφη. Τότε η f είναι αναλυτική στο U.*

Πιο συγκεκριμένα, για κάθε $a \in U$ και κάθε $R > 0$ τέτοιο ώστε $\overline{D(a,R)} \subset U$, ισχύει

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \qquad z \in D(a,R),}$$

όπου

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}\ \mathrm{d}\zeta$$

και C είναι ο θετικά προσανατολισμένος κύκλος $|\zeta - a| = R$.

Απόδειξη. Έστω $a \in U$ και $R > 0$ τέτοιο ώστε $\overline{D(a,R)} \subset U$. Σταθεροποιούμε $z \in D(a,R)$.

Από τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta.$$

Επειδή $|z-a| < R = |\zeta - a|$ για κάθε $\zeta \in C$, από τη γεωμετρική σειρά έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{\zeta - a} \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta - a}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Θέτουμε

$$M = \max_{\zeta \in C} |f(\zeta)|.$$

Για κάθε $n \geq 0$ και $\zeta \in C$,

$$\left| f(\zeta) \frac{(z-a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}} \right| \leq \frac{M}{R} \left(\frac{|z-a|}{R} \right)^n.$$

Επειδή $|z-a|/R < 1$, το κριτήριο Weierstrass εξασφαλίζει ότι η σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(\zeta) \frac{(z-a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα ως προς $\zeta \in C$.

Μπορούμε επομένως να εναλλάξουμε τη σειρά με το ολοκλήρωμα και να πάρουμε

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \sum_{n=0}^{\infty} f(\zeta) \frac{(z-a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}} \, \mathrm{d}\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n \left(\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} \, \mathrm{d}\zeta \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n. \end{aligned}$$

Άρα η f αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά με κέντρο το a, η οποία συγκλίνει σε ολόκληρο τον $D(a,R)$. Επειδή το $a \in U$ ήταν αυθαίρετο, η f είναι αναλυτική στο U. □

Παρατήρηση 14.4. Έχουμε ήδη δείξει ότι κάθε αναλυτική συνάρτηση είναι ολόμορφη, παραγωγίζοντας τη δυναμοσειρά της κατά όρους. Συνεπώς τώρα έχουμε αποδείξει και την αντίστροφη κατεύθυνση:

ολόμορφη $\iff$ αναλυτική.

Από εδώ και πέρα οι δύο όροι μπορούν να χρησιμοποιούνται ισοδύναμα.

Παράδειγμα 14.5. Αν $C = \partial D(0,2)$ με θετικό προσανατολισμό, τότε

$$\int_C \frac{e^{\zeta}}{\zeta - 1} \, \mathrm{d}\zeta = 2\pi i e.$$

Δεν παραμετροποιούμε τον κύκλο: αναγνωρίζουμε απευθείας τον τύπο Cauchy.

Πόρισμα 14.6 (Σειρά Taylor ολόμορφης συνάρτησης). *Υπό τις υποθέσεις του προηγούμενου θεωρήματος, για κάθε $a \in U$ και κάθε $R > 0$ με $\overline{D(a,R)} \subset U$, έχουμε*

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n, \qquad |z-a| < R.}$$

Απόδειξη. Από τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy για τις παραγώγους,

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

□

Θεώρημα 14.7 (Ολοκληρωτικοί τύποι για τις παραγώγους). *Υπό τις υποθέσεις του τοπικού τύπου Cauchy, για κάθε $n \geq 0$ και $z \in D(a,R)$,*

$$\boxed{f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta.}$$

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε $z \in D(a,R)$ και επιλέγουμε $0 < r < R - |z-a|$. Από το προηγούμενο θεώρημα, εφαρμοσμένο με κέντρο το z, έχουμε

$$\frac{f^{(n)}(z)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta,$$

όπου C_r είναι ο θετικά προσανατολισμένος κύκλος $|\zeta - z| = r$.

Επειδή οι κύκλοι C_r και C είναι ομοτοπικοί στο $U \setminus \{z\}$, και η συνάρτηση

$$\zeta \longmapsto \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}$$

είναι ολόμορφη στο σύνολο αυτό, από την ομοτοπική μορφή του θεωρήματος Cauchy παίρνουμε

$$\int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta = \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta.$$

Συνεπώς,

$$\boxed{f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta.}$$

□

Παράδειγμα 14.8. Για $C = \partial D(0,2)$, θετικό προσανατολισμό,

$$\int_C \frac{e^z}{z^3}\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{2!}\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}e^z\bigg|_{z=0} = \pi i.$$

15 Οι πρώτες εφαρμογές του Cauchy

Θεώρημα 15.1 (Εκτιμήσεις Cauchy). *Έστω f ολόμορφη σε μια γειτονιά του κλειστού δίσκου $\overline{D(a,R)}$ και*

$$M = \max_{|z-a|=R} |f(z)|.$$

Τότε, για κάθε $n \geq 0$,

$$\boxed{|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!M}{R^n}.}$$

Απόδειξη. Έστω C ο θετικά προσανατολισμένος κύκλος $|z-a|=R$. Από τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy για τις παραγώγους, έχουμε

$$f^{(n)}(a)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}z.$$

Επειδή $|z-a|=R$ για κάθε $z\in C$,

$$\left|\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\right|=\frac{|f(z)|}{R^{n+1}}\le\frac{M}{R^{n+1}}.$$

Επιπλέον, το μήκος του C είναι $2\pi R$. Επομένως, από την ανισότητα ML,

$$\left|\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}z\right|\le\frac{M}{R^{n+1}}\cdot 2\pi R.$$

Συνδυάζοντας τις δύο προηγούμενες σχέσεις, παίρνουμε

$$\begin{aligned}|f^{(n)}(a)|&\le\frac{n!}{2\pi}\left|\int_C\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}z\right|\\&\le\frac{n!}{2\pi}\frac{M}{R^{n+1}}\cdot 2\pi R\\&=\frac{n!M}{R^n},\end{aligned}$$

όπως θέλαμε. □

Πόρισμα 15.2 (Liouville). *Κάθε φραγμένη ακέραια ολόμορφη συνάρτηση είναι σταθερή.*

Απόδειξη. Αν $|f(z)|\le M$ στο $\mathbb{C}$, η εκτίμηση Cauchy στο $D(a,R)$ δίνει $|f'(a)|\le M/R$ για κάθε $R>0$. Με $R\to\infty$ προκύπτει $f'(a)=0$ για κάθε a, άρα η f είναι σταθερή. □

Πόρισμα 15.3 (Θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας). *Κάθε μη σταθερό πολυώνυμο με μιγαδικούς συντελεστές έχει μιγαδική ρίζα.*

Απόδειξη. Αν το πολυώνυμο P δεν είχε ρίζα, η $1/P$ θα ήταν ακέραια ολόμορφη. Επειδή $|P(z)|\to\infty$ καθώς $|z|\to\infty$, η $1/P$ θα ήταν φραγμένη έξω από έναν μεγάλο δίσκο· στον κλειστό δίσκο είναι φραγμένη λόγω συνέχειας. Από το Liouville η $1/P$ θα ήταν σταθερή, άτοπο. □

Πρόταση 15.4 (Μέση τιμή). *Αν $\overline{D(a,R)}\subset U$ και f ολόμορφη στο U, τότε*

$$\boxed{f(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+Re^{it})\,\mathrm{d}t.}$$

Απόδειξη. Στον τύπο Cauchy για το a βάζουμε $\zeta=a+Re^{it}$. Τότε $\mathrm{d}\zeta=iRe^{it}\,\mathrm{d}t$, οπότε ο παρονομαστής $\zeta-a$ απαλείφεται. □

Πρόταση 15.5 (Αρχή μεγίστου μέτρου). *Έστω $U\subset\mathbb{C}$ φραγμένο χωρίο και f συνεχής στο $\overline{U}$, ολόμορφη στο U. Τότε*

$$\max_{\overline{U}}|f|=\max_{\partial U}|f|.$$

Αν η f είναι μη σταθερή, κανένα εσωτερικό σημείο δεν είναι σημείο μεγίστου.

Απόδειξη. Η συνέχεια και η συμπάγεια του $\overline{U}$ εξασφαλίζουν ότι το μέγιστο υπάρχει. Αν πραγματοποιείται εσωτερικά, η τοπική αρχή μεγίστου δίνει τοπική σταθερότητα, και η αρχή της ταυτότητας δίνει σταθερότητα σε όλο το χωρίο. Στην περίπτωση αυτή η τιμή του μέγιστου πραγματοποιείται και στο σύνορο. □

Παράδειγμα 15.6 (Το παραπάνω δεν ισχύει όπως είναι σε μη φραγμένα χωρία). Στο άνω ημιεπίπεδο $\Im z > 0$, η $f(z) = e^{-iz}$ έχει $|f(x)| = 1$ στον πραγματικό άξονα, αλλά $|f(x+iy)| = e^y > 1$ στο εσωτερικό. Η υπόθεση φραγμένου χωρίου (ή κατάλληλος έλεγχος στο άπειρο) είναι σημαντική.

Θεώρημα 15.7 (Λήμμα Schwarz). *Αν η $f : D(0,1) \to D(0,1)$ είναι ολόμορφη και $f(0) = 0$, τότε*

$$\boxed{|f(z)| \le |z|, \qquad |f'(0)| \le 1.}$$

Αν ισχύει ισότητα στην πρώτη ανισότητα για κάποιο $z \neq 0$, ή αν $|f'(0)| = 1$, τότε

$$f(z) = e^{i\theta} z$$

για κάποιο $\theta \in \mathbb{R}$ και κάθε $z \in D(0,1)$.

Απόδειξη. Θέτουμε

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{z}, & z \neq 0, \\ f'(0), & z = 0. \end{cases}$$

Η g είναι ολόμορφη στον μοναδιαίο δίσκο. Πράγματι, επειδή η f είναι αναλυτική και $f(0) = 0$, το ανάπτυγμά της στο 0 έχει τη μορφή

$$f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \cdots,$$

οπότε

$$g(z) = a_1 + a_2 z + \cdots, \qquad a_1 = f'(0).$$

Έστω $0 < r < 1$. Για $|z| = r$, επειδή $|f(z)| < 1$, έχουμε

$$|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} \le \frac{1}{r}.$$

Από την αρχή μεγίστου, η ίδια εκτίμηση ισχύει σε ολόκληρο τον κλειστό δίσκο $\overline{D(0,r)}$, δηλαδή

$$|g(z)| \le \frac{1}{r}, \qquad |z| \le r.$$

Κρατώντας τώρα σταθερό ένα $z \in D(0,1)$ και αφήνοντας $r \uparrow 1$, με $r > |z|$, παίρνουμε

$$|g(z)| \le 1.$$

Επομένως, για $z \neq 0$,

$$|f(z)| = |z|\,|g(z)| \le |z|,$$

ενώ, για $z = 0$, η ανισότητα είναι προφανής. Επιπλέον,

$$|f'(0)| = |g(0)| \le 1.$$

Τέλος, αν $|f(z_0)| = |z_0|$ για κάποιο $z_0 \neq 0$, τότε $|g(z_0)| = 1$. Το ίδιο ισχύει στο $z_0 = 0$, αν $|f'(0)| = 1$.

Άρα, σε κάθε περίπτωση, η $|g|$ αποκτά τη μέγιστη τιμή της σε εσωτερικό σημείο του μοναδιαίου δίσκου. Από την αρχή μεγίστου, η g είναι σταθερή. Επειδή η σταθερά αυτή έχει μέτρο 1, γράφεται $e^{i\theta}$, για κάποιο $\theta \in \mathbb{R}$. Συνεπώς,

$$f(z) = z g(z) = e^{i\theta} z,$$

όπως θέλαμε. □

Θεώρημα 15.8 (Morera). *Έστω U ανοικτό και $f : U \to \mathbb{C}$ συνεχής. Αν $\int_{\partial\Delta} f \, \mathrm{d}z = 0$ για κάθε κλειστό τρίγωνο $\Delta \subset U$, τότε η f είναι ολόμορφη (και συνεπώς αναλυτική) στο U.*

Απόδειξη. Σε κάθε μικρό δίσκο $D(a, r) \subset U$, ορίζουμε $F(z) = \int_{[a,z]} f(\zeta) \, \mathrm{d}\zeta$. Η υπόθεση ακύρωσης σε τρίγωνα δίνει, ακριβώς όπως στην απόδειξη της τοπικής παραγουσας, $F'(z) = f(z)$. Η F είναι ολόμορφη, άρα αναλυτική από το θεώρημα Cauchy, και η παράγωγός της f είναι επίσης αναλυτική στον δίσκο. Οι δίσκοι αυτοί καλύπτουν το U. □

Θεώρημα 15.9 (Ομοιόμορφα όρια ολόμορφων συναρτήσεων). *Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και $f_n : U \to \mathbb{C}$ ολόμορφες συναρτήσεις. Αν η f_n συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του U προς μια συνάρτηση f, τότε η f είναι ολόμορφη στο U.*

Επιπλέον, για κάθε $k \geq 0$,

$$f_n^{(k)} \longrightarrow f^{(k)}$$

ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του U.

Απόδειξη. Επειδή οι f_n είναι συνεχείς και συγκλίνουν τοπικά ομοιόμορφα, η f είναι συνεχής.

Για κάθε κλειστό τρίγωνο $\Delta \subset U$, η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη στο $\partial\Delta$. Επομένως,

$$\int_{\partial\Delta} f(z) \, \mathrm{d}z = \lim_{n\to\infty} \int_{\partial\Delta} f_n(z) \, \mathrm{d}z = 0,$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από το θεώρημα Cauchy–Goursat. Άρα, από το θεώρημα Morera, η f είναι ολόμορφη στο U.

Μένει να αποδείξουμε τη σύγκλιση των παραγώγων. Έστω $K \subset U$ μη κενό συμπαγές. Επιλέγουμε $r > 0$ αρκετά μικρό ώστε το σύνολο

$$K_r = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{dist}(w, K) \leq r\}$$

να είναι συμπαγές υποσύνολο του U.

Έστω $K \subset U$ μη κενό συμπαγές. Επειδή το U είναι ανοικτό, μπορούμε να επιλέξουμε $r > 0$ ώστε

$$K_r = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{dist}(w, K) \leq r\}$$

να είναι συμπαγές υποσύνολο του U.

Σταθεροποιούμε $z \in K$. Ο κλειστός δίσκος $\overline{D(z, r)}$ περιέχεται στο K_r. Επομένως, από τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy για τις παραγώγους,

$$f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{C_z} \frac{f_n(\zeta) - f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} \, \mathrm{d}\zeta,$$

όπου $C_z = \{\zeta : |\zeta - z| = r\}$ με θετικό προσανατολισμό.

Από την ανισότητα ML προκύπτει

$$|f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)| \leq \frac{k!}{r^k} \max_{\zeta\in K_r} |f_n(\zeta) - f(\zeta)|.$$

Επειδή το δεξί μέλος δεν εξαρτάται από το $z \in K$, παίρνοντας μέγιστο έχουμε

$$\boxed{\max_{z\in K} |f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)| \leq \frac{k!}{r^k} \max_{\zeta\in K_r} |f_n(\zeta) - f(\zeta)|.}$$

Το δεξί μέλος τείνει στο μηδέν, καθώς $n \to \infty$, αφού το K_r είναι συμπαγές υποσύνολο του U. Άρα η σύγκλιση των παραγώγων είναι ομοιόμορφη στο K. □

Εφαρμογές στον υπολογισμό πραγματικών ολοκληρωμάτων

Το θεώρημα του Cauchy και ο ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy επιτρέπουν τον υπολογισμό πραγματικών ολοκληρωμάτων, τα οποία συχνά είναι δυσκολότερο να υπολογιστούν με τις μεθόδους της Πραγματικής Ανάλυσης.

Παράδειγμα 15.10. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\ \mathrm{d}x.$$

Λύση. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2} = \frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}.$$

Για $R > 2$, έστω γ_R το άνω ημικύκλιο

$$\gamma_R(t) = Re^{it}, \qquad 0 \le t \le \pi,$$

και C_R η κλειστή καμπύλη που αποτελείται από το διάστημα $[-R, R]$, διατρεχόμενο από τα αριστερά προς τα δεξιά, και το ημικύκλιο γ_R.

Επιλέγουμε $0 < r < 1$ και θεωρούμε τον θετικά προσανατολισμένο κύκλο

$$C_r = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| = r\}.$$

Η f είναι ολόμορφη σε μια γειτονιά του κλειστού χωρίου που βρίσκεται ανάμεσα στις C_R και C_r. Επομένως, από το θεώρημα Cauchy για πολλαπλά συνεκτικά χωρία,

$$\int_{C_R} f(z)\ \mathrm{d}z = \int_{C_r} f(z)\ \mathrm{d}z.$$

Άρα

$$\int_{-R}^{R} \frac{1}{(1+x^2)^2}\ \mathrm{d}x + \int_{\gamma_R} f(z)\ \mathrm{d}z = \int_{C_r} f(z)\ \mathrm{d}z.$$

Για το ολοκλήρωμα στο C_r, γράφουμε

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-i)^2}, \qquad g(z) = \frac{1}{(z+i)^2}.$$

Επειδή η g είναι ολόμορφη σε γειτονιά του $\overline{D(i,r)}$, από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy για τις παραγώγους,

$$\begin{aligned}\int_{C_r} f(z)\ \mathrm{d}z &= 2\pi i\, g'(i) \\ &= 2\pi i \left(-\frac{2}{(2i)^3}\right) \\ &= \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Μένει να δείξουμε ότι το ολοκλήρωμα στο μεγάλο ημικύκλιο τείνει στο μηδέν. Για $|z| = R > 2$, έχουμε

$$|1 + z^2| \ge R^2 - 1,$$

οπότε

$$|f(z)| \le \frac{1}{(R^2-1)^2}.$$

Επειδή το μήκος του γ_R είναι πR, η ανισότητα ML δίνει

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z)\ \mathrm{d}z \right| \leq \frac{\pi R}{(R^2-1)^2} \longrightarrow 0 \qquad (R \to \infty).$$

Αφήνοντας λοιπόν $R \to \infty$, συμπεραίνουμε ότι

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\ \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.}$$

□

Παρατήρηση 15.11. Το συγκεκριμένο ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί πολύ ευκολότερα με πραγματικές μεθόδους, με την αντικατάσταση $x = \tan t$.

Παράδειγμα 15.12. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{5+4\cos t}\ \mathrm{d}t.$$

Λύση. Θεωρούμε τη θετικά προσανατολισμένη μοναδιαία περιφέρεια C, με παραμετροποίηση

$$\gamma(t) = e^{it}, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Τότε

$$\gamma'(t) = i\gamma(t), \qquad 2\cos t = \gamma(t) + \frac{1}{\gamma(t)}.$$

Επομένως,

$$\frac{1}{5+4\cos t} = \frac{\gamma(t)}{2\gamma(t)^2 + 5\gamma(t) + 2} = \frac{1}{i}\frac{\gamma'(t)}{(2\gamma(t)+1)(\gamma(t)+2)}.$$

Από τον ορισμό του επικαμπύλιου ολοκληρώματος,

$$I = \frac{1}{i}\int_C \frac{1}{(2z+1)(z+2)}\ \mathrm{d}z.$$

Γράφουμε

$$\frac{1}{(2z+1)(z+2)} = \frac{g(z)}{z+1/2}, \qquad g(z) = \frac{1}{2(z+2)}.$$

Η g είναι ολόμορφη σε γειτονιά του κλειστού μοναδιαίου δίσκου. Άρα, από τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy,

$$I = \frac{2\pi i}{i}\, g(-1/2) = 2\pi \cdot \frac{1}{3}.$$

Συνεπώς,

$$\boxed{I = \frac{2\pi}{3}.}$$

□

Παράδειγμα 2 (Το ολοκλήρωμα Dirichlet). Να αποδειχθεί ότι

$$\boxed{\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\ \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.}$$

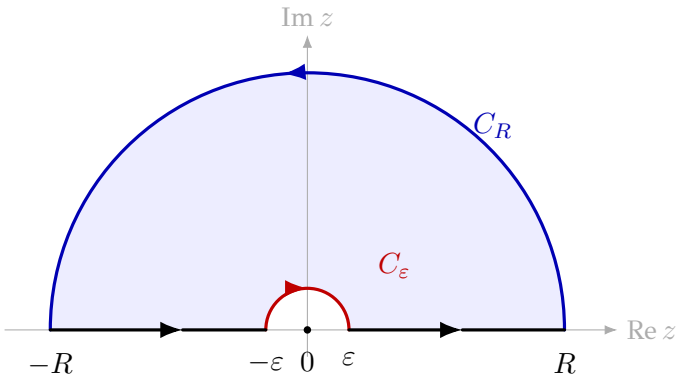
Απόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z},$$

η οποία είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Για $0 < \varepsilon < R$, θεωρούμε την κλειστή καμπύλη $\Gamma_{\varepsilon,R}$ που αποτελείται από τα εξής τέσσερα τμήματα:

- Το ευθύγραμμο τμήμα από ε έως R.
- Το μεγάλο άνω ημικύκλιο C_R, από R έως $-R$, με αντιωρολογιακό προσανατολισμό.
- Το ευθύγραμμο τμήμα από $-R$ έως $-\varepsilon$.
- Το μικρό άνω ημικύκλιο C_ε, από $-\varepsilon$ έως ε, με ωρολογιακό προσανατολισμό.



Σχήμα 15: Η καμπύλη $\Gamma_{\varepsilon,R}$. Το μικρό ημικύκλιο αποφεύγει την ιδιομορφία στο 0. Η χρωματισμένη περιοχή βρίσκεται ανάμεσα στα δύο ημικύκλια.

Η f είναι ολόμορφη σε ανοικτή περιοχή της κλειστής ημιδακτυλιοειδούς περιοχής που περικλείεται από την $\Gamma_{\varepsilon,R}$. Επομένως, από το θεώρημα του Cauchy,

$$\int_{\Gamma_{\varepsilon,R}} \frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z = 0.$$

Αναλύοντας το ολοκλήρωμα στα τέσσερα τμήματα της καμπύλης, παίρνουμε

$$\begin{aligned} 0 = &\int_\varepsilon^R \frac{e^{ix}}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z \\ &+ \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{C_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z. \end{aligned}$$

Επειδή

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

η συνάρτηση $\cos x/x$ είναι περιττή, ενώ η $\sin x/x$ είναι άρτια. Έτσι, τα δύο ολοκληρώματα πάνω στον πραγματικό άξονα έχουν άθροισμα

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x}\,\mathrm{d}x + \int_\varepsilon^R \frac{e^{ix}}{x}\,\mathrm{d}x = 2i \int_\varepsilon^R \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Συνεπώς,

$$2i \int_\varepsilon^R \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = -\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z - \int_{C_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z. \tag{9}$$

1. Το ολοκλήρωμα στο μεγάλο ημικύκλιο.
Παραμετροποιούμε το C_R με

$$z = Re^{it}, \qquad 0 \le t \le \pi.$$

Τότε

$$|e^{iz}| = e^{-\operatorname{Im} z} = e^{-R\sin t}.$$

Επομένως,

$$\left| \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}\, \mathrm{d}z \right| \le \int_0^\pi e^{-R\sin t}\, \mathrm{d}t.$$

Χρησιμοποιούμε την ανισότητα

$$\sin t \ge \frac{2t}{\pi}, \qquad 0 \le t \le \frac{\pi}{2},$$

η οποία προκύπτει από την κοιλότητα της συνάρτησης $\sin t$ στο $[0, \pi]$.
Λόγω της συμμετρίας $\sin(\pi - t) = \sin t$, έχουμε

$$\begin{aligned} \int_0^\pi e^{-R\sin t}\, \mathrm{d}t &= 2\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin t}\, \mathrm{d}t \\ &\le 2\int_0^{\pi/2} e^{-2Rt/\pi}\, \mathrm{d}t \\ &= \frac{\pi}{R}(1 - e^{-R}) \le \frac{\pi}{R}. \end{aligned}$$

Άρα

$$\boxed{\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}\, \mathrm{d}z = 0.}$$

2. Το ολοκλήρωμα στο μικρό ημικύκλιο.
Παραμετροποιούμε το C_ε με

$$z = \varepsilon e^{it}, \qquad \pi \ge t \ge 0.$$

Ο προσανατολισμός είναι ωρολογιακός, αφού η καμπύλη διατρέχεται από $-\varepsilon$ προς ε.
Έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{C_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z}\, \mathrm{d}z &= \int_\pi^0 \frac{e^{i\varepsilon e^{it}}}{\varepsilon e^{it}}\, i\varepsilon e^{it}\, \mathrm{d}t \\ &= i\int_\pi^0 e^{i\varepsilon e^{it}}\, \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Καθώς $\varepsilon \downarrow 0$,

$$e^{i\varepsilon e^{it}} \longrightarrow 1$$

ομοιόμορφα ως προς $t \in [0, \pi]$. Επομένως,

$$\boxed{\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{C_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z}\, \mathrm{d}z = i\int_\pi^0 1\, \mathrm{d}t = -i\pi.}$$

3. Ολοκλήρωση της απόδειξης.
Αφήνουμε πρώτα $R \to \infty$ και στη συνέχεια $\varepsilon \downarrow 0$ στην (9).

Οι δύο προηγούμενοι υπολογισμοί δίνουν

$$2i \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x = 0 - (-i\pi) = i\pi.$$

Διαιρώντας με $2i$, καταλήγουμε στον τύπο

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.}$$

□

Θεώρημα 15.13 (Θεώρημα Cauchy για πολλαπλά συνεκτικά χωρία). *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ φραγμένο χωρίο, του οποίου το σύνορο αποτελείται από πεπερασμένο πλήθος απλών, κλειστών, τμηματικά C^1 καμπυλών*

$$C_0, C_1, \ldots, C_m,$$

ανά δύο ξένων, έτσι ώστε C_0 να είναι η εξωτερική συνιστώσα του συνόρου και $C_1, \ldots, C_m$ οι εσωτερικές συνιστώσες. Προσανατολίζουμε το C_0 θετικά και τα $C_1, \ldots, C_m$ αρνητικά ως προς το Ω. Δηλαδή

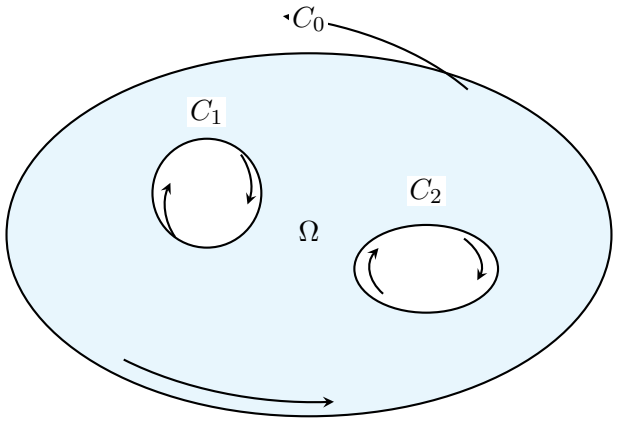
$$\partial\Omega = C_0 - C_1 - \cdots - C_m.$$

Αν f είναι ολόμορφη σε ανοικτή γειτονιά του $\overline{\Omega}$, τότε

$$\boxed{\int_{\partial\Omega} f(z) \, \mathrm{d}z = 0.}$$

Ισοδύναμα,

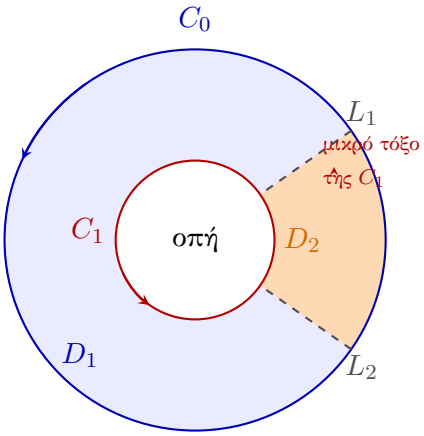
$$\boxed{\int_{C_0} f(z) \, \mathrm{d}z - \sum_{k=1}^{m} \int_{C_k} f(z) \, \mathrm{d}z = 0.}$$



Σχήμα 16: Πολλαπλά συνεκτικό χωρίο. Το εξωτερικό σύνορο C_0 διατρέχεται αντιωρολογιακά, ενώ τα εσωτερικά σύνορα $C_1, C_2, \ldots$ ωρολογιακά.

Απόδειξη. Ας δούμε πρώτα την περίπτωση όπου έχουμε μία οπή. Επιλέγουμε δύο τμηματικά C^1 τομές L_1, L_2, οι οποίες ενώνουν το C_0 με το C_1, δεν τέμνονται μεταξύ τους και βρίσκονται μέσα στο D, όπως στο σχήμα.

Οι τομές αυτές χωρίζουν το D σε δύο απλά συνεκτικές περιοχές D_1 και D_2.



Σχήμα 17: Οι δύο τομές L_1, L_2 χωρίζουν το χωρίο D σε δύο απλά συνεκτικές περιοχές D_1, D_2. Το μικρό τόξο της C_1, που συχνά "χάνεται" σε μια πρόχειρη περιγραφή, ανήκει στο σύνορο της περιοχής D_2.

Τα άκρα των τομών χωρίζουν καθεμιά από τις καμπύλες C_0 και C_1 σε δύο τόξα. Γράφουμε λοιπόν

$$C_0 = C_0^{(1)} + C_0^{(2)}, \qquad C_1 = C_1^{(1)} + C_1^{(2)},$$

όπου τα τόξα διατρέχονται με τον αρχικό θετικό προσανατολισμό.

Επειδή οι D_1, D_2 είναι απλά συνεκτικές και η f είναι ολομορφη σε γειτονιά των κλειστών τους, από το θεώρημα Cauchy για απλά συνεκτικά χωρία παίρνουμε

$$\int_{\partial D_1} f(z)\,\mathrm{d}z = 0, \qquad \int_{\partial D_2} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Με τον θετικό προσανατολισμό των συνόρων των D_1, D_2, έχουμε

$$\int_{\partial D_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_0^{(1)}} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{C_1^{(1)}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{L_1} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{L_2} f(z)\,\mathrm{d}z,$$

και

$$\int_{\partial D_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_0^{(2)}} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{C_1^{(2)}} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{L_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{L_2} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Προσθέτοντας τις δύο ισότητες, τα ολοκληρώματα πάνω στις τομές αλληλοαναιρούνται και παίρνουμε

$$0 = \int_{C_0^{(1)}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{C_0^{(2)}} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{C_1^{(1)}} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{C_1^{(2)}} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Άρα

$$0 = \int_{C_0} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z,$$

δηλαδή

$$\int_{C_0} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Παρατήρηση 15.14 (Η γενίκευση σε πολλές οπές). Η ίδια ιδέα γενικεύεται αμέσως όταν το σύνορο αποτελείται από μία εξωτερική καμπύλη C_0 και από εσωτερικές καμπύλες

$$C_1, \ldots, C_m,$$

όλες απλές, κλειστές, τμηματικά C^1 και θετικά προσανατολισμένες.

Για κάθε οπή C_j επιλέγουμε δύο τομές που ενώνουν το C_0 με το C_j, με τρόπο ώστε οι αντίστοιχες βοηθητικές περιοχές τύπου D_2 να μην τέμνονται μεταξύ τους. Εφαρμόζουμε τότε το παραπάνω επιχείρημα σε καθεμιά από αυτές τις περιοχές και προσθέτουμε τις προκύπτουσες ισότητες.

Έτσι καταλήγουμε στο

$$\boxed{\int_{C_0} f(z)\ \mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{m} \int_{C_j} f(z)\ \mathrm{d}z.}$$

Παράδειγμα 15.15. Έστω C απλή, κλειστή, τμηματικά C^1, θετικά προσανατολισμένη καμπύλη, τέτοια ώστε το i να ανήκει στο εσωτερικό της και το $-i$ στο εξωτερικό της. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_C \frac{1}{z^2+1}\ \mathrm{d}z.$$

Λύση. Επιλέγουμε $r > 0$ αρκετά μικρό ώστε ο κλειστός δίσκος $\overline{D(i,r)}$ να περιέχεται στο εσωτερικό της C και να μην περιέχει το $-i$. Θέτουμε

$$C_r = \{z \in \mathbb{C} : |z-i| = r\},$$

με θετικό προσανατολισμό.

Η συνάρτηση

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1}$$

είναι ολόμορφη σε μια γειτονιά του κλειστού χωρίου που βρίσκεται ανάμεσα στις C και C_r.

Από το θεώρημα Cauchy για πολλαπλά συνεκτικά χωρία,

$$\int_C \frac{1}{z^2+1}\ \mathrm{d}z = \int_{C_r} \frac{1}{z^2+1}\ \mathrm{d}z.$$

Επειδή

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{z-i} \cdot \frac{1}{z+i}$$

και η συνάρτηση $g(z) = 1/(z+i)$ είναι ολόμορφη σε γειτονιά του $\overline{D(i,r)}$, ο ολοκληρωτικός τύπος Cauchy για κύκλους δίνει

$$\int_{C_r} \frac{1}{z^2+1}\ \mathrm{d}z = 2\pi i\, g(i) = \frac{2\pi i}{2i} = \pi.$$

Συνεπώς,

$$\boxed{\int_C \frac{1}{z^2+1}\ \mathrm{d}z = \pi.}$$

□

Παράδειγμα 15.16. Έστω C απλή, κλειστή, τμηματικά C^1, θετικά προσανατολισμένη καμπύλη, η οποία δεν διέρχεται από το 0. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_C \frac{1}{z}\ \mathrm{d}z$$

στις ακόλουθες περιπτώσεις:

1. Το 0 βρίσκεται στο εξωτερικό της C.

2. Το 0 βρίσκεται στο εσωτερικό της C.

Λύση. **(i)** Αν το 0 βρίσκεται στο εξωτερικό της C, η συνάρτηση $f(z) = 1/z$ είναι ολόμορφη σε μια γειτονιά της C και του εσωτερικού της. Επομένως, από το θεώρημα Cauchy,

$$\boxed{\int_C \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = 0.}$$

(ii) Αν το 0 βρίσκεται στο εσωτερικό της C, επιλέγουμε $r > 0$ τόσο μικρό ώστε

$$\overline{D(0,r)} \subset \mathrm{int}(C).$$

Θεωρούμε τον θετικά προσανατολισμένο κύκλο $C_r = \{z : |z| = r\}$.

Η συνάρτηση $1/z$ είναι ολόμορφη στο κλειστό χωρίο ανάμεσα στις C και C_r. Άρα, από το θεώρημα Cauchy για πολλαπλά συνεκτικά χωρία,

$$\int_C \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \int_{C_r} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z.$$

Παραμετροποιούμε τον C_r με

$$\gamma(t) = re^{it}, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

Τότε

$$\begin{aligned}\int_{C_r} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} i\,\mathrm{d}t = 2\pi i.\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\boxed{\int_C \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \begin{cases} 0, & 0 \text{ στο εξωτερικό της } C, \\ 2\pi i, & 0 \text{ στο εσωτερικό της } C. \end{cases}}$$

□

Παράδειγμα 15.17. Έστω $r > 0$ και $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Θεωρούμε την κλειστή καμπύλη

$$\gamma(t) = re^{2\pi imt}, \qquad 0 \le t \le 1.$$

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z.$$

Λύση. Η καμπύλη γ διατρέχει τον κύκλο $|z| = r$ συνολικά $|m|$ φορές: αντιωρολογιακά όταν $m > 0$ και ωρολογιακά όταν $m < 0$.

Από τον ορισμό του επικαμπύλιου ολοκληρώματος,

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z &= \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 2\pi im\,\mathrm{d}t \\ &= 2\pi im.\end{aligned}$$

Άρα

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = m.}$$

□

Παρατήρηση 15.18. Το προηγούμενο παράδειγμα δείχνει ότι το ολοκλήρωμα της $1/z$ δεν εξαρτάται μόνο από την εικόνα της καμπύλης, αλλά και από το πόσες φορές και με ποια φορά αυτή διατρέχεται.

Αυτό οδηγεί φυσικά στην έννοια του *δείκτη μιας κλειστής καμπύλης*, την οποία θα μελετήσουμε στη συνέχεια.

Παράδειγμα 15.19. Έστω

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \qquad a_n \neq 0,$$

πολυώνυμο βαθμού $n \geq 2$.

1. Έστω C απλή, κλειστή, τμηματικά C^1, θετικά προσανατολισμένη καμπύλη, η οποία περιέχει όλες τις ρίζες του p στο εσωτερικό της. Να δειχθεί ότι

$$\int_C \frac{1}{p(z)}\, \mathrm{d}z = 0.$$

Απόδειξη. Επιλέγουμε $R > 0$ τόσο μεγάλο ώστε η C και το εσωτερικό της να περιέχονται στον δίσκο $D(0, R)$. Επειδή όλες οι ρίζες του p βρίσκονται στο εσωτερικό της C, από το θεώρημα Cauchy για πολλαπλά συνεκτικά χωρία έχουμε

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{p(z)} = \int_{|z|=R} \frac{\mathrm{d}z}{p(z)},$$

όπου ο κύκλος διατρέχεται θετικά.

Θέτουμε $w = 1/z$ και γράφουμε

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0.$$

Τότε

$$\frac{\mathrm{d}z}{p(z)} = -\frac{w^{n-2}}{a_n + a_{n-1} w + \cdots + a_0 w^n}\, \mathrm{d}w.$$

Επειδή $n \geq 2$ και $a_n \neq 0$, η συνάρτηση

$$g(w) = \frac{w^{n-2}}{a_n + a_{n-1} w + \cdots + a_0 w^n}$$

είναι ολόμορφη σε γειτονιά του 0.

Επιλέγοντας το R αρκετά μεγάλο, ο κύκλος $|w| = 1/R$ και το εσωτερικό του περιέχονται σε αυτή τη γειτονιά. Επομένως, από το θεώρημα Cauchy,

$$\int_{|z|=R} \frac{\mathrm{d}z}{p(z)} = -\int_{|w|=1/R}^{\text{ωρολογιακά}} g(w)\, \mathrm{d}w = 0.$$

Συνεπώς,

$$\boxed{\int_C \frac{\mathrm{d}z}{p(z)} = 0.}$$

□

Θεώρημα 15.20 (Ολοκληρωτικός τύπος Cauchy για απλές κλειστές καμπύλες). *Έστω C απλή, κλειστή, τμηματικά C^1, θετικά προσανατολισμένη καμπύλη και f ολόμορφη σε ανοικτή γειτονιά της C και του εσωτερικού της. Τότε, για κάθε a στο εσωτερικό της C, ισχύει*

$$\boxed{f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - a}\, \mathrm{d}z.}$$

Απόδειξη. Επιλέγουμε $r > 0$ αρκετά μικρό ώστε

$$\overline{D(a,r)} \subset \text{int}(C)$$

και θεωρούμε τον θετικά προσανατολισμένο κύκλο

$$C_r = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| = r\}.$$

Η συνάρτηση

$$g(z) = \frac{f(z)}{z-a}$$

είναι ολόμορφη σε ανοικτή γειτονιά του κλειστού χωρίου ανάμεσα στις C και C_r.

Από το θεώρημα Cauchy για πολλαπλά συνεκτικά χωρία,

$$\int_C \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z = \int_{C_r} \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z.$$

Ο ολοκληρωτικός τύπος Cauchy στον κύκλο C_r δίνει

$$\int_{C_r} \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z = 2\pi i f(a),$$

όπως θέλαμε. □

Παρατήρηση 15.21. Αν το a βρίσκεται στο εξωτερικό της C, η συνάρτηση $f(z)/(z-a)$ είναι ολόμορφη σε γειτονιά της C και του εσωτερικού της. Επομένως, από το θεώρημα Cauchy,

$$\int_C \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z = 0.$$

Παράδειγμα 15.22. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int_C \frac{e^{z^2}}{z-2}\,\mathrm{d}z$$

στις ακόλουθες περιπτώσεις:

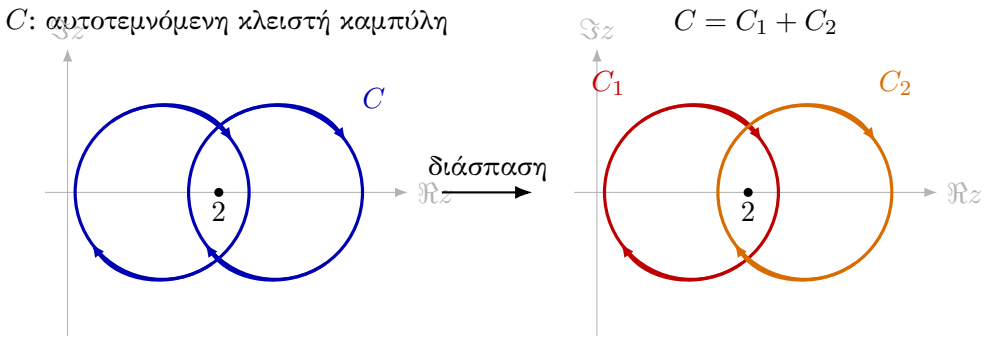
1. Η C είναι απλή, κλειστή, θετικά προσανατολισμένη καμπύλη που περιέχει το 2 στο εσωτερικό της.
2. Η C είναι απλή, κλειστή, θετικά προσανατολισμένη καμπύλη που περιέχει το 2 στο εξωτερικό της.
3. Η C είναι κλειστή, όχι απαραίτητα απλή, καμπύλη η οποία αποτελείται από δύο αρνητικά προσανατολισμένες απλές κλειστές διαδρομές C_1, C_2, καθεμία από τις οποίες περιέχει το 2 στο εσωτερικό της.

Λύση. **(i)** Η συνάρτηση $f(z) = e^{z^2}$ είναι ακέραια. Επειδή το 2 βρίσκεται στο εσωτερικό της C, ο ολοκληρωτικός τύπος Cauchy δίνει

$$I = 2\pi i f(2) = \boxed{2\pi i e^4}.$$

(ii) Η συνάρτηση $e^{z^2}/(z-2)$ είναι ολόμορφη σε γειτονιά της C και του εσωτερικού της. Επομένως, από το θεώρημα Cauchy,

$$\boxed{I = 0}.$$



Σχήμα 18: Αριστερά: μια αυτοτεμνόμενη κλειστή καμπύλη C, η οποία νοείται ως καμπύλη που διατρέχει διαδοχικά δύο αρνητικά προσανατολισμένες λούπες. Δεξιά: η αντίστοιχη διάσπαση $C = C_1 + C_2$, όπου οι C_1, C_2 είναι απλές κλειστές καμπύλες και το σημείο 2 ανήκει στο εσωτερικό καθεμιάς.

(iii)

Από την προσθετικότητα των επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων,

$$I = \int_{C_1} \frac{e^{z^2}}{z-2}\,\mathrm{d}z + \int_{C_2} \frac{e^{z^2}}{z-2}\,\mathrm{d}z.$$

Κάθε C_j περιέχει το 2 στο εσωτερικό της, αλλά διατρέχεται με αρνητικό προσανατολισμό. Επομένως, από το (i),

$$\int_{C_j} \frac{e^{z^2}}{z-2}\,\mathrm{d}z = -2\pi i e^4, \qquad j = 1, 2.$$

Άρα

$$\boxed{I = -4\pi i e^4}.$$

□

16 Ο δείκτης μιας κλειστής καμπύλης

Ορισμός 16.1 (Δείκτης / winding number). Έστω γ κλειστή τμηματικά C^1 καμπύλη και $a \notin \gamma([0,1])$. Ο *δείκτης* της γ ως προς το a είναι

$$\boxed{\mathrm{Ind}(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-a}.}$$

Για πεπερασμένα αθροίσματα κλειστών καμπυλών (*αλυσίδες*) ο δείκτης ορίζεται αθροιστικά.

Η τιμή $\mathrm{Ind}(\gamma, a)$ μετρά αλγεβρικά πόσες φορές η καμπύλη περιφέρεται γύρω από το a: θετικά αν τις φορές τις μετράμε αντιωρολογιακά και αρνητικά αν τις μετράμε ωρολογιακά.

Θεώρημα 16.2 (Οι βασικές ιδιότητες του δείκτη). *Για κλειστή τμηματικά C^1 καμπύλη γ:*

1. $\mathrm{Ind}(\gamma, a) \in \mathbb{Z}$ *για κάθε a έξω από την εικόνα της γ.*
2. *Η συνάρτηση $a \mapsto \mathrm{Ind}(\gamma, a)$ είναι σταθερή σε κάθε συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{C} \setminus \gamma([0,1])$.*
3. *Ο δείκτης είναι 0 στη μη φραγμένη συνιστώσα του συμπληρώματος.*
4. *Ο δείκτης είναι αναλλοίωτος υπό ομοτοπία κλειστών καμπυλών που αποφεύγουν το a, και αθροιστικός ως προς τη σύνθεση/τις αλυσίδες.*

Απόδειξη. Για το (1), παραμετροποιούμε την γ στο $[0,1]$ και θέτουμε

$$A(t) = \int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-a}\,\mathrm{d}s.$$

Σε καθένα από τα υποδιαστήματα όπου η γ είναι C^1,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{-A(t)}(\gamma(t)-a)\right) = 0.$$

Από τη συνέχεια στα κοινά άκρα, $e^{-A(t)}(\gamma(t)-a) = \gamma(0)-a$ για όλα τα t. Επειδή $\gamma(1)=\gamma(0)$, έχουμε $e^{A(1)}=1$, άρα $A(1) = 2\pi i k$ για κάποιο $k\in\mathbb{Z}$, δηλαδή $\mathrm{Ind}(\gamma,a)=k$.
(2) Θα δείξουμε πρώτα ότι η συνάρτηση

$$a \longmapsto \mathrm{Ind}(\gamma,a)$$

είναι συνεχής στο $\mathbb{C}\setminus\gamma([0,1])$.

Πράγματι, σταθεροποιούμε $a_0\notin\gamma([0,1])$. Επειδή η εικόνα της γ είναι συμπαγής, έχουμε

$$d = \mathrm{dist}(a_0,\gamma([0,1])) > 0.$$

Αν $|a-a_0|<d/2$, τότε για κάθε $z\in\gamma([0,1])$,

$$|z-a| \geq |z-a_0| - |a-a_0| \geq \frac{d}{2}.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
|\,\mathrm{Ind}(\gamma,a) - \mathrm{Ind}(\gamma,a_0)| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_\gamma \left(\frac{1}{z-a}-\frac{1}{z-a_0}\right)\mathrm{d}z\right| \\
&= \frac{1}{2\pi}\left|\int_\gamma \frac{a-a_0}{(z-a)(z-a_0)}\,\mathrm{d}z\right| \\
&\leq \frac{\ell(\gamma)}{\pi d^2}|a-a_0|,
\end{aligned}$$

όπου $\ell(\gamma)$ είναι το μήκος της καμπύλης γ.

Άρα

$$\mathrm{Ind}(\gamma,a) \longrightarrow \mathrm{Ind}(\gamma,a_0) \qquad (a\to a_0),$$

οπότε ο δείκτης είναι συνεχής στο $\mathbb{C}\setminus\gamma([0,1])$.

Επειδή όμως, από το (1), ο δείκτης παίρνει μόνο ακέραιες τιμές, η συνέχειά του συνεπάγεται ότι είναι τοπικά σταθερός.

Τέλος, κάθε τοπικά σταθερή συνάρτηση είναι σταθερή σε κάθε συνεκτική συνιστώσα του πεδίου ορισμού της. Συνεπώς, ο δείκτης είναι σταθερός σε κάθε συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{C}\setminus\gamma([0,1])$.

Για το (3), αν $|a|$ είναι αρκετά μεγάλο σε σχέση με το $\max|\gamma(t)|$, τότε από την ML

$$\left|\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-a}\right| \leq \frac{L(\gamma)}{|a|-\max|\gamma|} \longrightarrow 0.$$

Επειδή ο δείκτης είναι ακέραιος, είναι 0 για μεγάλα $|a|$ και κατόπιν σε όλη τη μη φραγμένη συνιστώσα, από το (2). Η (4) προκύπτει από το αναλλοίωτο ως προς ομοτοπία, εφαρμοσμένο στην συνάρτηση $1/(z-a)$, και από τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος. □

Παράδειγμα 16.3. Για τον κύκλο $\gamma(t) = a + Re^{ikt}$, $0\leq t\leq 2\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, έχουμε $\mathrm{Ind}(\gamma,a)=k$. Για b έξω από τον κύκλο, ο δείκτης είναι 0, ενώ για b μέσα είναι k. Το τελευταίο προκύπτει από την τοπική σταθερότητα σε συνδυασμό με την τιμή στο κέντρο.