Πανεπιστήμιο Κρήτης
Τμήμα Μαθηματικών
και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Χειμερινό Εξάμηνο 2026-2027
Θ. Γαρεφαλάκης

ΒΙΟ-101.1 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ
Φυλλάδιο Ασκήσεων 4

Άσκηση 4.1: Εξετάστε ποιες από τις παρακάτω απεικονίσεις είναι γραμμικές.
1. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y) = (3xy, 2y, x - y)$
2. $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad g(x, y, z) = (3x + y + 1, x - y + z)$
3. $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad h(x, y, z) = (0, 0, 0)$
4. $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad g(x, y, z) = (3x + y + z, x - y + z)$

Άσκηση 4.2: Δίνεται η απεικόνιση $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με $T(x) = Ax$, όπου

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Βρείτε τον τύπο της T (δηλ. $T(x, y, z)$). Εξετάστε εάν το διάνυσμα $(1, 2, 3)$ ανήκει στην εικόνα της T.

Άσκηση 4.3: Δίνεται η γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ με

$$\begin{aligned} f(1, -1, 0, 1) &= (1, 0, 1) \\ f(-2, 1, 1, 0) &= (2, 1, -1) \\ f(0, 1, 1, 1) &= (-1, 1, 0) \\ f(0, 0, 1, 1) &= (2, 2, 0) \end{aligned}$$

1. Δείξτε ότι το σύνολο $\mathcal{B} = \{(1, -1, 0, 1), (-2, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 1)\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^4$ (και επομένως η f είναι καλά ορισμένη).
2. Βρείτε τον πίνακα της f.
3. Βρείτε την τιμή $f(1, 2, 3, 4)$.
4. Βρείτε μία βάση του πυρήνα και μία βάση της εικόνας της f.
5. Βρείτε ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^3$ το οποίο *δεν* ανήκει στην εικόνα της f.

Άσκηση 4.4: Έστω η βάση $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ του $\mathbb{R}^3$. Βρείτε τον πίνακα αλλαγής βάσης από την κανονική βάση στην $\mathcal{B}$. Γράψτε το διάνυσμα $(2, 3, 1)$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}$.

Άσκηση 4.5: Έστω η γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, με $f(x, y, z) = (x + 3z, 2x + y + 5z, -y + 2z)$. Να αποδείξετε ότι η f είναι ισομορφισμός.

Άσκηση 4.6: Έστω ο χώρος $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$.
1. Βρείτε μία βάση του V.
2. Βρείτε έναν ισομορφισμό $f : \mathbb{R}^2 \to V$.
3. Βρείτε έναν ισομορφισμό $g : V \to \mathbb{R}^2$.