Πανεπιστήμιο Κρήτης
Τμήμα Μαθηματικών
και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Πρόοδος

Χειμερινό Εξάμηνο 2026-27

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 90 λεπτά. Απαγορεύεται η χρήση κινητών τηλεφώνων και υπολογιστών.

Θέμα 1 (60) Σωστά ή Λάθος; Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας αιτιολογόντας αν είναι σωστό ή δίνοντας αντιπαράδειγμα αν είναι λάθος.

1. Εάν το σύστημα $Ax = 0$ έχει άπειρες λύσεις, τότε και το σύστημα $Ax = b$ έχει άπειρες λύσεις όπου $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ και $b \in \mathbb{R}^m$.
2. Ο πίνακας $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν ο $B^\top$ είναι αντιστρέψιμος.
3. Οποιαδήποτε 5 διανύσματα του $\mathbb{R}^4$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.
4. Αν ο μηδενόχωρος ενός 3×4 πίνακα A παράγεται από το διάνυσμα $(2, 3, 1, 0)$ τότε ο πίνακας έχει τάξη 2.
5. Το σύνολο $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$.
6. Σε ένα χώρο διάστασης 4 οποιαδήποτε 3 διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Θέμα 2 (20) Δίνεται ο πίνακας

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Βρείτε μία βάση του μία βάση του $\mathcal{R}(A)$ και μία βάση του $\mathcal{N}(A)$.

Θέμα 3 (20) Δίνονται τα διανύσματα $(1, -1, -2), (-2, 1, 3), (t, 1, t^2 + 1)$ με $t \in \mathbb{R}$.

1. Εξετάστε για ποιές τιμές του t τα τρία διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.
2. Επιλέξτε μία τιμή του t για την οποία *δεν* είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και γράψτε το διάνυσμα $(t, 1, t^2 + 1)$ ως γραμμικό συνδυασμό των άλλων δύο.