Μιγαδική Ανάλυση
4ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Παράγουσες – Επικαμπύλια ολοκληρώματα – Ομοτοπία – Θεώρημα Cauchy – Ολοκληρωτικός τύπος Cauchy – Αρχή μεγίστου – Liouville

Πρόβλημα 1 Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα. Η καμπύλη ολοκλήρωσης είναι οποιαδήποτε τμηματικά C^1 καμπύλη που ενώνει τα σημεία που αναφέρονται:

(i) $\displaystyle\int_i^{i/2} e^{\pi z}\,\mathrm{d}z.$

(ii) $\displaystyle\int_0^{\pi+2i} \cos\Big(\frac{z}{2}\Big)\,\mathrm{d}z.$

(iii) $\displaystyle\int_1^3 (z-2)^3\,\mathrm{d}z.$

Πρόβλημα 2 (i) Έστω C το άνω ημικύκλιο $|z|=1$, από το 1 στο -1. Να υπολογίσετε

$$\int_C e^z\,\mathrm{d}z \qquad \text{και} \qquad \int_C \overline{z}^2\,\mathrm{d}z.$$

(ii) Έστω $\gamma(t)=e^{it}$, $-\pi/2\le t\le \pi/2$. Να υπολογίσετε

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z}},$$

όπου $\sqrt{z}$ είναι η κύρια τετραγωνική ρίζα.

Πρόβλημα 3 Έστω $f(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$ πολυώνυμο βαθμού n και C_R το άνω ημικύκλιο $|z|=R$, $\Im z\ge 0$, με $R\ge 1$. Να δείξετε ότι υπάρχει σταθερά $C>0$, ανεξάρτητη του R, τέτοια ώστε

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le CR^{n+1}.$$

Πρόβλημα 4 Έστω $z_0\in\mathbb{C}$ και γ κλειστή, τμηματικά C^1 καμπύλη στο $\mathbb{C}\setminus\{z_0\}$.

(i) Για κάθε ακέραιο $n\neq 0$, να αποδείξετε ότι

$$\int_\gamma (z-z_0)^{n-1}\,\mathrm{d}z=0.$$

(ii) Για $n=0$, να υπολογίσετε

$$\int_{C(z_0,r)} \frac{\mathrm{d}z}{z-z_0}, \qquad r>0,$$

όπου $C(z_0,r)$ είναι ο θετικά προσανατολισμένος κύκλος. Τι συμπεραίνετε αν η γ είναι ομοτοπική στον κύκλο $C(z_0,r)$ μέσα στο $\mathbb{C}\setminus\{z_0\}$;

Πρόβλημα 5 Έστω C ο θετικά προσανατολισμένος κύκλος με κέντρο το 0 και ακτίνα $1/2$. Να υπολογίσετε

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z(z-1)}.$$

Πρόβλημα 6 Έστω C κλειστή, τμηματικά C^1 καμπύλη, ομοτοπική στο $\mathbb{C}\setminus\{i,-i\}$ με τον θετικά προσανατολισμένο κύκλο $|z-i|=1/4$.

(i) Να υπολογίσετε

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z^2+1}.$$

(ii) Να αποδείξετε ότι το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει για την έλλειψη

$$\gamma(t) = i + 2\cos t + \frac{i}{2}\sin t, \qquad 0 \le t \le 2\pi,$$

κατασκευάζοντας κατάλληλη ομοτοπία.

Πρόβλημα 7 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

(i) $\displaystyle\int_{C(0,2)} \frac{e^z}{(z+1)^3}\,\mathrm{d}z.$

(ii) $\displaystyle\int_{C(1,2)} \frac{z^2+3z-1}{(z+3)(z-2)}\,\mathrm{d}z.$

Εδώ $C(a,R)$ συμβολίζει τον θετικά προσανατολισμένο κύκλο με κέντρο a και ακτίνα R.

Πρόβλημα 8 Έστω C απλή κλειστή καμπύλη, με εσωτερικό Ω, και f, g συναρτήσεις ολόμορφες στο Ω και συνεχείς στο $\overline{\Omega}$. Αν

$$f(z) = g(z), \qquad z \in C,$$

να δείξετε ότι $f = g$ σε ολόκληρο το Ω.

Πρόβλημα 9 Για $r > 0$, θεωρούμε την καμπύλη $\gamma_r(t) = re^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

(i) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma_r} \mathrm{Re}(z)\,\mathrm{d}z.$$

(ii) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $z \mapsto \mathrm{Re}(z)$ δεν έχει παράγουσα σε κανένα ανοικτό σύνολο του $\mathbb{C}$ που περιέχει το 0.

Πρόβλημα 10 Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ με $\mathrm{Re}(z_1) \le 0$ και $\mathrm{Re}(z_2) \le 0$. Να αποδείξετε ότι

$$\left|e^{z_1} - e^{z_2}\right| \le |z_1 - z_2|.$$

Πρόβλημα 11 Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ακέραια συνάρτηση τέτοια ώστε

$$\mathrm{Re} f(z) > 0, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή.

Πρόβλημα 12 Έστω $R > 1$ και γ_R το άνω ημικύκλιο

$$\gamma_R(t) = Re^{it}, \qquad 0 \le t \le \pi.$$

Να υπολογίσετε, χωρίς τη χρήση του θεωρήματος των υπολοίπων,

$$\boxed{I_R = \int_{\gamma_R} \frac{z^3 e^{z^2}}{z^2+1}\,\mathrm{d}z.}$$

Παραδίδετε 6 Προβλήματα έως 06–11–2026.