Μιγαδική Ανάλυση

Ασκήσεις Τετάρτης

Περιεχόμενα

1 7 Οκτωβρίου 2026 **1**

2 14 Οκτωβρίου 2026 **12**

3 21 Οκτωβρίου 2026 **20**

1 7 Οκτωβρίου 2026

Εκφώνηση. *[1ο Φυλλάδιο, Πρόβλημα 2(C)]*

Να βρεθεί και να σχεδιαστεί το σύνολο

$$C = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| > |z+1|\}.$$

Λύση. Γράφουμε $z = x + iy$, όπου $x, y \in \mathbb{R}$. Τότε

$$|z-1| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}, \qquad |z+1| = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}.$$

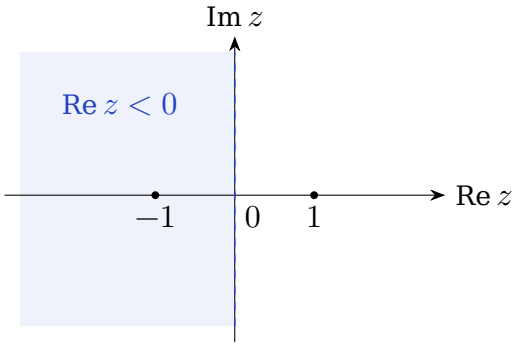
Επειδή και τα δύο μέλη είναι μη αρνητικά, μπορούμε να υψώσουμε στο τετράγωνο χωρίς να αλλάξει η φορά ή η ισοδυναμία της ανισότητας:

$$\begin{aligned} |z-1| > |z+1| &\iff (x-1)^2 + y^2 > (x+1)^2 + y^2 \\ &\iff x^2 - 2x + 1 > x^2 + 2x + 1 \\ &\iff -4x > 0 \\ &\iff x < 0. \end{aligned}$$

Άρα

$$\boxed{C = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\}.}$$

Γεωμετρικά, το $|z-1|$ είναι η απόσταση του z από το 1, ενώ το $|z+1|$ είναι η απόστασή του από το -1. Ζητάμε επομένως τα σημεία που βρίσκονται πλησιέστερα στο -1 από ό,τι στο 1. Η μεσοκάθετος του τμήματος με άκρα $-1, 1$ είναι ο φανταστικός άξονας. Το ζητούμενο είναι το ανοικτό ημιεπίπεδο αριστερά από αυτόν.



Σχήμα 1: Ο φανταστικός άξονας δεν ανήκει στο C.

Εκφώνηση. *[1ο Φυλλάδιο, Πρόβλημα 3(i)]*

Να γραφούν σε πολική μορφή οι αριθμοί

$$z_1 = \frac{1-i}{1+i}, \qquad z_2 = \frac{1+i}{1+\sqrt{3}\,i}.$$

1ος τρόπος: πολλαπλασιασμός με τον συζυγή του παρονομαστή

Για τον πρώτο αριθμό έχουμε

$$z_1 = \frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-2i+i^2}{1-i^2} = \frac{-2i}{2} = -i.$$

Επομένως $|z_1| = 1$ και μπορούμε να επιλέξουμε όρισμα $-\pi/2$:

$$\boxed{z_1 = e^{-i\pi/2}.}$$

Για τον δεύτερο αριθμό,

$$\begin{aligned} z_2 &= \frac{(1+i)(1-\sqrt{3}\,i)}{(1+\sqrt{3}\,i)(1-\sqrt{3}\,i)} \\ &= \frac{1+\sqrt{3}+i(1-\sqrt{3})}{4}. \end{aligned}$$

Το μέτρο του είναι

$$|z_2| = \frac{\sqrt{(1+\sqrt{3})^2+(1-\sqrt{3})^2}}{4} = \frac{\sqrt{8}}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Για να προσδιορίσουμε τη γωνία, βγάζουμε αυτό το μέτρο κοινό παράγοντα:

$$z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} - i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right).$$

Θυμόμαστε την ταυτότητα

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Για $\alpha = \pi/3$ και $\beta = \pi/4$ παίρνουμε

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

Ομοίως,

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Το πραγματικό μέρος του z_2 είναι θετικό και το φανταστικό αρνητικό, άρα επιλέγουμε τη γωνία $-\pi/12$ του τέταρτου τεταρτημορίου. Συνεπώς

$$\boxed{z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\pi/12}.}$$

Παρατήρηση. Το συνημίτονο μόνο του δεν καθορίζει το πρόσημο της γωνίας. Χρειάζεται να ελέγξουμε και το φανταστικό μέρος, δηλαδή το πρόσημο του ημιτόνου.

2ος τρόπος: πολική μορφή αριθμητή και παρονομαστή

Χρησιμοποιούμε ότι τα μέτρα διαιρούνται και τα ορίσματα αφαιρούνται:

$$\frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)} \qquad (r_2 > 0).$$

Έχουμε

$$1 - i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}, \qquad 1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}, \qquad 1 + \sqrt{3}\,i = 2e^{i\pi/3}.$$

Άρα

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2}e^{i\pi/4}} = e^{-i\pi/2}, \qquad z_2 = \frac{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}{2e^{i\pi/3}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\pi/12}.$$

Εκφώνηση. *[1ο Φυλλάδιο, Πρόβλημα 5.]*

Αν $|z| = 2$, να βρεθούν η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή του $|z^4 + 1|$ και όλοι οι αριθμοί z στους οποίους επιτυγχάνονται.

Λύση. Από την τριγωνική και την αντίστροφη τριγωνική ανισότητα,

$$\big||z^4| - 1\big| \le |z^4 + 1| \le |z^4| + 1.$$

Επειδή $|z^4| = |z|^4 = 16$, προκύπτει

$$15 \le |z^4 + 1| \le 17.$$

Πρέπει τώρα να ελέγξουμε πότε επιτυγχάνεται ισότητα στα δύο άκρα.

1ος τρόπος: ομόρροπα και αντίρροπα διανύσματα

Για δύο μιγαδικούς u, v, τους οποίους βλέπουμε ως διανύσματα του $\mathbb{R}^2$, ισχύει

$$|u + v|^2 = |u|^2 + |v|^2 + 2\,\mathrm{Re}(u\overline{v}).$$

Η ανισότητα Cauchy–Schwarz δίνει

$$-|u||v| \le \mathrm{Re}(u\overline{v}) \le |u||v|.$$

Όταν $u, v \neq 0$, στο δεξιό άκρο έχουμε ισότητα ακριβώς όταν τα δύο διανύσματα είναι ομόρροπα, ενώ στο αριστερό ακριβώς όταν είναι αντίρροπα.

Εδώ παίρνουμε $u = z^4$ και $v = 1$. Για να είναι $|z^4 + 1| = 17$, ο αριθμός z^4 πρέπει να βρίσκεται στον θετικό πραγματικό ημιάξονα. Αφού το μέτρο του είναι 16, αυτό ισοδυναμεί με $z^4 = 16$. Άρα

$$z = 2e^{ik\pi/2}, \quad k = 0, 1, 2, 3,$$

δηλαδή $z \in \{2, 2i, -2, -2i\}$.

Για να είναι $|z^4 + 1| = 15$, τα z^4 και 1 πρέπει να είναι αντίρροπα. Επομένως $z^4 = -16$, και έτσι

$$z = 2e^{i(\pi/4 + k\pi/2)}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Οι αριθμοί αυτοί γράφονται και ως $\pm\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}$, με όλους τους συνδυασμούς των προσήμων.

2ος τρόπος: τετράγωνα και πραγματικό-φανταστικό μέρος

Θέτουμε $z^4 = x + iy$. Τότε $x^2 + y^2 = 256$ και

$$|z^4 + 1|^2 = (x + 1)^2 + y^2 = 257 + 2x.$$

Στο άνω άκρο,

$$|z^4 + 1| = 17 \iff 257 + 2x = 289 \iff x = 16.$$

Η σχέση $x^2 + y^2 = 256$ επιβάλλει τότε $y = 0$, άρα $z^4 = 16$. Στο κάτω άκρο,

$$|z^4 + 1| = 15 \iff 257 + 2x = 225 \iff x = -16,$$

οπότε πάλι $y = 0$ και $z^4 = -16$. Λύνοντας τις δύο εξισώσεις βρίσκουμε τις ίδιες ακριβώς περιπτώσεις ισότητας. Συνεπώς

$$\boxed{\max_{|z|=2} |z^4 + 1| = 17, \qquad \min_{|z|=2} |z^4 + 1| = 15.}$$

Εκφώνηση. *[1ο Φυλλάδιο, Πρόβλημα 10+Σημειώσεις]*

Έστω $a = re^{i\theta} \neq 0$ και $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$. Να βρεθούν όλες οι λύσεις της $z^n = a$, να αποδειχθεί ότι είναι ακριβώς n διαφορετικές και ότι σχηματίζουν κανονικό n-γωνο. Στη συνέχεια να λυθεί η εξίσωση $z^4 = -16$.

Λύση. Ακολουθούμε τη σειρά της απόδειξης των σημειώσεων. Γράφουμε έναν υποψήφιο αριθμό στη μορφή

$$z = te^{i\varphi}, \qquad t \ge 0.$$

Επειδή $a \neq 0$, μια λύση δεν μπορεί να είναι μηδέν, άρα $t > 0$. Τότε $z^n = t^n e^{in\varphi}$ και

$$z^n = a \iff t^n e^{in\varphi} = re^{i\theta}.$$

Ισότητα δύο μη μηδενικών μιγαδικών σε πολική μορφή σημαίνει ισότητα των μέτρων και διαφορά των γωνιών κατά ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π. Επομένως

$$t^n = r, \qquad n\varphi = \theta + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Άρα

$$t = r^{1/n}, \qquad \varphi = \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n},$$

και οι λύσεις είναι

$$\boxed{z_k = r^{1/n} e^{i(\theta/n + 2\pi k/n)}, \qquad k = 0, 1, \dots, n-1.}$$

Γιατί αρκούν αυτές οι n τιμές του k;

Κάθε ακέραιος γράφεται $k = qn + j$, με $0 \le j \le n-1$. Τότε

$$e^{i(\theta/n + 2\pi k/n)} = e^{i(\theta/n + 2\pi j/n)} e^{2\pi i q} = e^{i(\theta/n + 2\pi j/n)}.$$

Άρα οι υπόλοιπες ακέραιες τιμές επαναλαμβάνουν τις ίδιες λύσεις.

Γιατί οι λύσεις είναι διαφορετικές;

Αν $z_k = z_\ell$ για $k, \ell \in \{0, \dots, n-1\}$, τότε

$$e^{2\pi i (k-\ell)/n} = 1.$$

Συνεπώς $(k-\ell)/n \in \mathbb{Z}$, δηλαδή το $k-\ell$ είναι πολλαπλάσιο του n. Όμως $|k-\ell| < n$, οπότε $k = \ell$.

Γεωμετρική περιγραφή

Όλες οι ρίζες έχουν το ίδιο μέτρο $r^{1/n}$ και διαδοχικά ορίσματα που διαφέρουν κατά $2\pi/n$. Βρίσκονται λοιπόν στον κύκλο με κέντρο 0 και ακτίνα $r^{1/n}$, σε ίσες γωνιακές αποστάσεις. Για $n \ge 3$ είναι οι κορυφές κανονικού n-γώνου. Για $n = 2$ είναι δύο αντιδιαμετρικά σημεία, ενώ για $n = 1$ η εξίσωση έχει απλώς τη μοναδική λύση $z = a$.

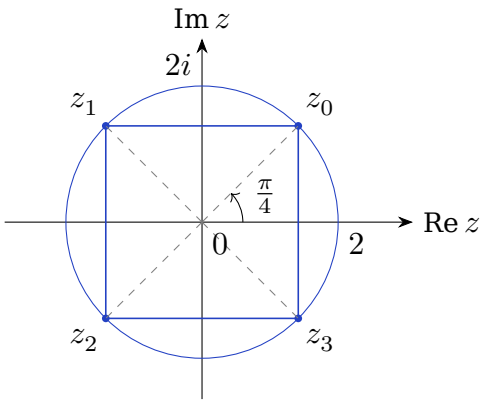
Εφαρμογή: $z^4 = -16$

Γράφουμε $-16 = 16e^{i\pi}$. Άρα

$$z_k = 2e^{i(\pi/4 + k\pi/2)}, \qquad k = 0, 1, 2, 3.$$

Αναλυτικά,

$$\boxed{\sqrt{2} + i\sqrt{2}, \quad -\sqrt{2} + i\sqrt{2}, \quad -\sqrt{2} - i\sqrt{2}, \quad \sqrt{2} - i\sqrt{2}.}$$



Σχήμα 2: Οι τέσσερις ρίζες του -16 σχηματίζουν τετράγωνο.

Εκφώνηση. *[ο Φυλλάδιο, Πρόβλημα 11]*

(i) Να περιγραφεί γεωμετρικά η απεικόνιση $f(z) = iz$.

(ii) Να βρεθεί η εικόνα του

$$S = \{re^{i\theta} : 0 \le r \le 2,\ 0 \le \theta \le \pi/4\}$$

μέσω της $f(z) = z^2$.

(iii) Για $f(z) = 1/z$, $z \neq 0$, να περιγραφούν οι εικόνες των συνόλων $|z| < 1$, $|z| > 1$, $|z| = 1$, λαμβάνοντας υπόψη το πεδίο ορισμού.

(i) Πολλαπλασιασμός με i

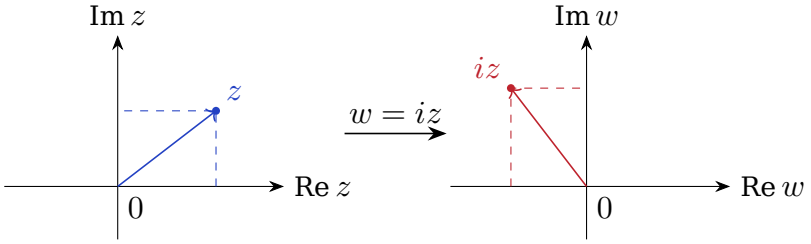
Εφόσον $i = e^{i\pi/2}$, για $z = re^{i\theta}$ έχουμε

$$iz = re^{i(\theta+\pi/2)}.$$

Το μέτρο μένει ίδιο και η γωνία αυξάνεται κατά $\pi/2$. Άρα η απεικόνιση είναι αριστερόστροφη περιστροφή κατά 90° γύρω από το 0. Σε καρτεσιανές συντεταγμένες,

$$z = x + iy \quad \Longrightarrow \quad iz = -y + ix,$$

δηλαδή $(x, y) \mapsto (-y, x)$.



Σχήμα 3: Η απεικόνιση $z \mapsto iz$ στρέφει κάθε διάνυσμα κατά $\pi/2$.

(ii) Η εικόνα ενός τομέα μέσω της $z \mapsto z^2$

Για $z = re^{i\theta} \in S$ παίρνουμε

$$w = z^2 = r^2 e^{2i\theta}.$$

Θέτοντας $\rho = r^2$ και $\varphi = 2\theta$, έχουμε

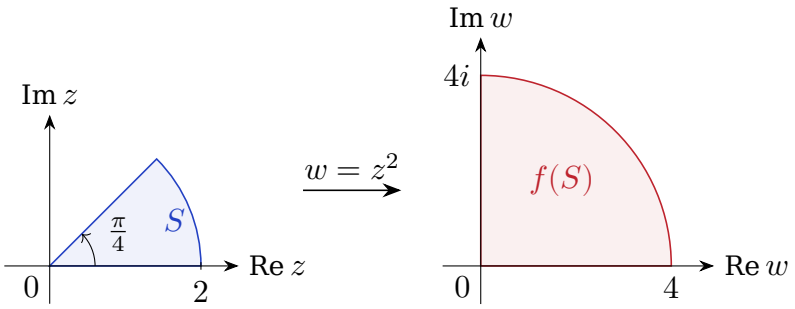
$$0 \le \rho \le 4, \qquad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}.$$

Επομένως $f(S)$ περιέχεται στο κλειστό τεταρτοκύκλιο ακτίνας 4 του πρώτου τεταρτημορίου. Για την αντίστροφη συμπερίληψη, αν $w = \rho e^{i\varphi}$ με αυτές τις ιδιότητες, επιλέγουμε

$$z = \sqrt{\rho}\, e^{i\varphi/2}.$$

Τότε $0 \le \sqrt{\rho} \le 2$, $0 \le \varphi/2 \le \pi/4$, άρα $z \in S$ και $z^2 = w$. Συνεπώς

$$\boxed{f(S) = \{\rho e^{i\varphi} : 0 \le \rho \le 4,\ 0 \le \varphi \le \pi/2\}.}$$



Σχήμα 4: Η ακτίνα υψώνεται στο τετράγωνο και η γωνία διπλασιάζεται.

(iii) Η αντιστροφή $z \mapsto 1/z$

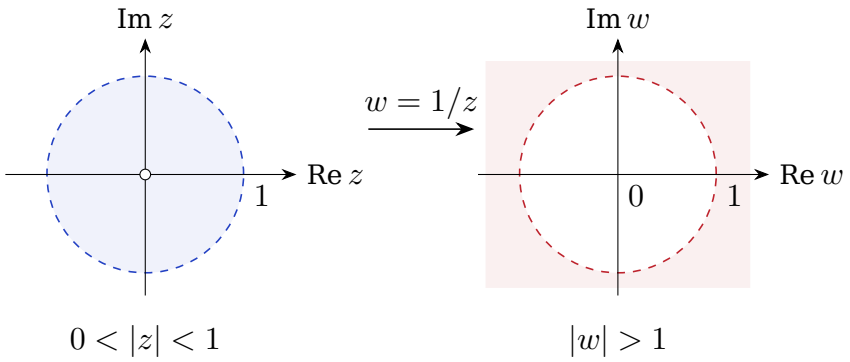
Για $z = re^{i\theta} \neq 0$ ισχύει

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}.$$

Άρα το μέτρο αντικαθίσταται από το αντίστροφό του και το όρισμα αλλάζει πρόσημο. Έτσι

$$\begin{aligned} f(\{0 < |z| < 1\}) &= \{w \in \mathbb{C} : |w| > 1\}, \\ f(\{|z| > 1\}) &= \{w \in \mathbb{C} : 0 < |w| < 1\}, \\ f(\{|z| = 1\}) &= \{w \in \mathbb{C} : |w| = 1\}. \end{aligned}$$

Οι ισότητες είναι αμφίδρομες, αφού η αντίστροφη της απεικόνισης $z \mapsto 1/z$ είναι η ίδια η απεικόνιση: για $w \neq 0$, παίρνουμε $z = 1/w$. Στον μοναδιαίο κύκλο ειδικότερα, $1/z = \overline{z}$, οπότε εκεί η απεικόνιση είναι ανάκλαση ως προς τον πραγματικό άξονα.



Σχήμα 5: Ο διάτρητος μοναδιαίος δίσκος απεικονίζεται στο εξωτερικό του μοναδιαίου κύκλου.

Παρατήρηση. Το 0 αφαιρείται από το αρχικό σύνολο $|z| < 1$, επειδή η $1/z$ δεν ορίζεται εκεί.

Εκφώνηση. *[1ο Φυλλάδιο, Πρόβλημα 12]*

Να υπολογιστούν, όπου υπάρχουν, τα όρια

$$\textit{(i)} \quad \lim_{z\to 2} \frac{z^4 - 16}{z - 2}, \qquad \textit{(ii)} \quad \lim_{z\to 0} z e^{i/|z|},$$

$$\textit{(iii)} \quad \lim_{z\to 0} \frac{\overline{z}}{z}, \qquad \textit{(iv)} \quad \lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}.$$

(i) Παραγοντοποίηση

Για $z \neq 2$,

$$\frac{z^4 - 16}{z - 2} = \frac{(z^2 - 4)(z^2 + 4)}{z - 2} = (z + 2)(z^2 + 4).$$

Η τελευταία παράσταση είναι πολυώνυμο και επομένως συνεχής στο 2. Άρα

$$\boxed{\lim_{z\to 2} \frac{z^4 - 16}{z - 2} = 4 \cdot 8 = 32.}$$

(ii) Εκτίμηση με το μέτρο

Για $z \neq 0$, ο αριθμός $1/|z|$ είναι πραγματικός. Επομένως

$$\left|e^{i/|z|}\right| = \sqrt{\cos^2(1/|z|) + \sin^2(1/|z|)} = 1$$

και άρα

$$\left|z e^{i/|z|}\right| = |z|.$$

Τελικά,

$$\lim_{z\to 0} \left|z e^{i/|z|}\right| = \lim_{z\to 0} |z| = 0.$$

Εδώ θυμόμαστε ότι εαν $|w_n| \to 0$ τότε $w_n \to 0$ (hint: ϵ, δ) και παίρνουμε

$$\boxed{\lim_{z\to 0} z e^{i/|z|} = 0.}$$

Παρατήρηση. Η σχέση που χρησιμοποιούμε είναι $|e^{i/|z|}| = 1$. Ο ίδιος ο μιγαδικός αριθμός $e^{i/|z|}$ δεν είναι σταθερά ίσος με 1.

(iii) Προσέγγιση από πραγματικό και φανταστικό άξονα

Αν $z = x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, τότε $\overline{z} = z = x$, άρα

$$\frac{\overline{z}}{z} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to 0} \frac{\overline{x}}{x} = 1.$$

Αν όμως $z = iy$, με $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, τότε $\overline{z} = -iy$ και

$$\frac{\overline{z}}{z} = -1 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{y \to 0} \frac{\overline{iy}}{iy} = -1.$$

Αν υπήρχε το μιγαδικό όριο, κάθε προσέγγιση του 0 θα έδινε την ίδια τιμή. Οι τιμές 1 και -1 είναι διαφορετικές, οπότε το όριο δεν υπάρχει. Το ίδιο φαίνεται από τις ακολουθίες $z_n = 1/n$ και $w_n = i/n$, που συγκλίνουν και οι δύο στο 0, ενώ οι αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης είναι σταθερά 1 και -1.

(iv) Δεξιά και αριστερά στον πραγματικό άξονα

Για $z = x > 0$,

$$\frac{\operatorname{Re} z}{|z|} = \frac{x}{x} = 1,$$

ενώ για $z = x < 0$,

$$\frac{\operatorname{Re} z}{|z|} = \frac{x}{-x} = -1.$$

Άρα ήδη οι δύο πλευρικές προσεγγίσεις πάνω στον πραγματικό άξονα δίνουν

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{Re} x}{|x|} = 1, \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{\operatorname{Re} x}{|x|} = -1.$$

Συνεπώς ούτε αυτό το μιγαδικό όριο υπάρχει. Επιπλέον, πάνω στον φανταστικό άξονα η συνάρτηση έχει τιμή 0, αφού $\operatorname{Re}(iy) = 0$.



Σχήμα 6: Διαφορετικές προσεγγίσεις του 0 δίνουν διαφορετικές τιμές. Οι αριθμοί στο σχήμα είναι τιμές των αντίστοιχων συναρτήσεων.

Εκφώνηση. *[1ο Φυλλάδιο, Πρόβλημα 13] Έστω $K \subset \mathbb{C}$ συμπαγές και $F \subset K$ κλειστό. Να αποδειχθεί, με τον ακολουθιακό ορισμό της συμπάγειας και της κλειστότητας, ότι το F είναι συμπαγές.*

Λύση. Αν $F = \emptyset$ δεν έχουμε κάτι να δείξουμε. Υποθέτουμε λοιπόν $F \neq \emptyset$ και παίρνουμε οποιαδήποτε ακολουθία

$$(z_n)_{n\geq 1} \subset F.$$

Πρέπει να βρούμε υπακολουθία που συγκλίνει σε σημείο του F. Επειδή $F \subset K$, η ίδια ακολουθία βρίσκεται στο K. Από τη συμπάγεια του K υπάρχουν υπακολουθία (z_{n_k}) και $z \in K$ τέτοια ώστε

$$z_{n_k} \longrightarrow z.$$

Όλοι οι όροι της υπακολουθίας ανήκουν στο F. Εφόσον το F είναι κλειστό, περιέχει το όριο κάθε συγκλίνουσας ακολουθίας σημείων του. Άρα $z \in F$.

Επομένως κάθε ακολουθία του F έχει υπακολουθία που συγκλίνει σε σημείο του F. Αυτό είναι ακριβώς ο ακολουθιακός ορισμός της συμπάγειας.

Παρατήρηση. Αρκεί το F να είναι κλειστό ως προς το K. Πράγματι, γνωρίζουμε ήδη ότι το όριο z ανήκει στο K, και η σχετική κλειστότητα τότε εξασφαλίζει ότι ανήκει και στο F.

Εκφώνηση. *[1ο Φυλλάδιο, Πρόβλημα 14]*

Έστω $K \subset \mathbb{C}$ συμπαγές και

$$F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \cdots$$

μη κενά κλειστά υποσύνολα του K. Να αποδειχθεί ότι

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset.$$

1ος τρόπος: επιλογή σημείων και συγκλίνουσα υπακολουθία

Για κάθε n επιλέγουμε ένα σημείο $z_n \in F_n$, κάτι που είναι δυνατόν επειδή $F_n \neq \emptyset$. Αφού όλα τα F_n περιέχονται στο K, η ακολουθία (z_n) βρίσκεται στο συμπαγές K. Υπάρχουν επομένως υπακολουθία (z_{n_k}) και $z \in K$ ώστε $z_{n_k} \to z$.

Θα δείξουμε ότι το ίδιο σημείο z ανήκει σε κάθε F_m. Αφού η n_k είναι υπακολουθία, τότε ξέρουμε ότι $n_k \geq k$ για κάθε k. Αρκεί λοιπόν να πάρουμε k ώστε $k \geq m$. Αυτό, μαζί με την το γεγονός οτι τα σύνολα φθίνουν, μας δίνει

$$z_{n_k} \in F_{n_k} \subset F_m \qquad (k \geq m).$$

Άρα μια ουρά της υπακολουθίας βρίσκεται στο κλειστό F_m και συγκλίνει στο z. Από την κλειστότητα, $z \in F_m$. Επειδή το m ήταν αυθαίρετο,

$$z \in \bigcap_{m=1}^{\infty} F_m.$$

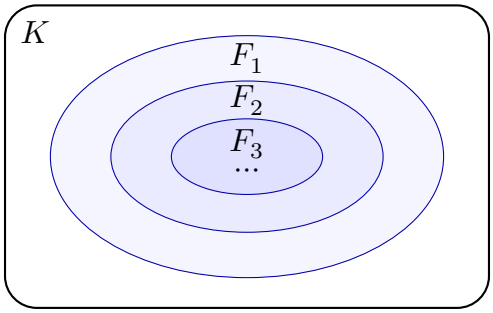
Παρατήρηση. Εαν βοηθάει παρατηρήστε οτι στην απόδειξη εκεί που παίρνουμε το αυθαίρετο m θα μπορούσαμε να είχαμε πάρει για $m = 10, 15, 10000$ ή όποιον φυσικό αριθμό προτιμάτε.

2ος τρόπος: ανοικτή κάλυψη και πεπερασμένη υποκάλυψη

Υποθέτουμε προς άτοπο ότι $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$. Τότε, από τους νόμους του De Morgan,

$$K = K \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (K \setminus F_n).$$

Θέτουμε $U_n = K \setminus F_n$. Επειδή κάθε F_n είναι κλειστό στο K, το U_n είναι ανοικτό ως προς το K. Άρα τα (U_n) αποτελούν σχετικά ανοικτή κάλυψη του συμπαγούς K.



Η συμπάγεια δίνει πεπερασμένους δείκτες $n_1, \dots, n_p$ με

$$K = U_{n_1} \cup \cdots \cup U_{n_p}.$$

Η φθίνουσα διάταξη των F_n σημαίνει ότι τα συμπληρώματά τους έχουν την αντίστροφη διάταξη:

$$U_1 \subset U_2 \subset U_3 \subset \cdots.$$

Αν $N = \max\{n_1, \dots, n_p\}$, η παραπάνω πεπερασμένη ένωση είναι ακριβώς το U_N. Συνεπώς

$$K = U_N = K \setminus F_N,$$

οπότε $F_N = \emptyset$, αντίφαση με την υπόθεση.

Σημείωση Ακολουθούν ασκήσεις διαφορετικού βαθμού δυσκολίας (ανάλογα με τα $*$), οι οποίες δεν λύνονται στην τάξη. Οι λύσεις τους θα δημοσιεύονται αργότερα. Όσοι επιθυμούν να τις δοκιμάσουν και να μου τις στείλουν στο email (chrpandis@gmail.com), θα χαρώ πολύ να τις συζητήσουμε.

Εκφώνηση. *[*] Υπολογίστε το*

$$(1+z)(1+z^2)\cdots(1+z^{2^{n-1}})$$

Εκφώνηση. *[**] Έστω $a_0, a_1, \dots, a_n$ πραγματικοι αριθμοί τέτοιοι ώστε $0 < a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n$ και το πολυώνυμο $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$. Δείξτε οτι το P δεν έχει ρίζα στον ανοιχτό μοναδιαίο δίσκο $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.*

Υπόδειξη: Ίδια ιδέα με την αποπάνω.

2 14 Οκτωβρίου 2026

Εικόνες συνόλων, εκθετική και λογάριθμος. Συνέχεια και μιγαδική διαφορισιμότητα.

Εκφώνηση. *Να βρεθεί η εικόνα του συνόλου*

$$V = \{re^{i\theta} : 0 \le r \le 3/2,\ 0 \le \theta \le \pi/2\}$$

μέσω της $f(z) = z^3$.

Λύση. Για $z = re^{i\theta} \in V$ έχουμε

$$w = z^3 = r^3 e^{3i\theta}.$$

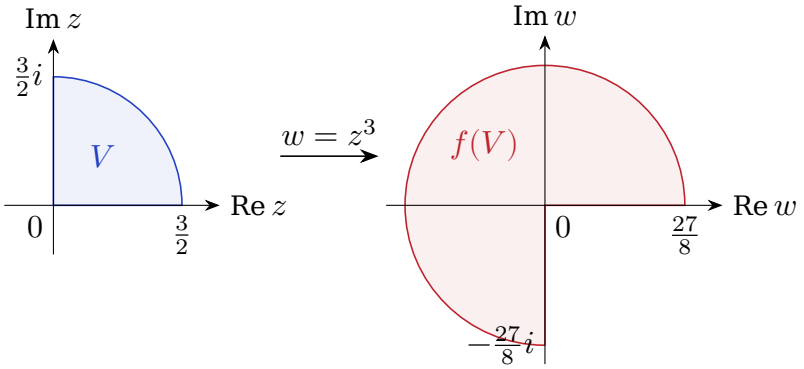
Θέτοντας $\rho = r^3$ και $\varphi = 3\theta$, παίρνουμε

$$0 \le \rho \le \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}, \qquad 0 \le \varphi \le \frac{3\pi}{2}.$$

Αντίστροφα, κάθε $w = \rho e^{i\varphi}$ με αυτές τις ιδιότητες έχει προεικόνα $z = \rho^{1/3} e^{i\varphi/3} \in V$. Επομένως

$$\boxed{f(V) = \{\rho e^{i\varphi} : 0 \le \rho \le 27/8,\ 0 \le \varphi \le 3\pi/2\}.}$$

Το σύνολο αυτό αποτελείται από τα τρία πρώτα κλειστά τεταρτημόρια του δίσκου ακτίνας $27/8$. Δεν περιέχει τα σημεία του ανοικτού τέταρτου τεταρτημορίου.



Σχήμα 7: Ο τομέας γωνίας $\pi/2$ μετατρέπεται σε τομέα γωνίας $3\pi/2$.

Εκφώνηση. *Να βρεθούν όλοι οι* $z \in \mathbb{C}$ *για τους οποίους* $e^z = 1 + i$.

Λύση. Γράφουμε $z = x + iy$, με $x, y \in \mathbb{R}$. Τότε

$$e^z = e^x e^{iy}, \qquad 1 + i = \sqrt{2} e^{i\pi/4}.$$

Συγκρίνοντας μέτρα και ορίσματα παίρνουμε

$$e^x = \sqrt{2}, \qquad y = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Η πρώτη σχέση ισοδυναμεί με $x = \ln\sqrt{2} = \frac{1}{2}\ln 2$. Άρα

$$\boxed{z = \frac{1}{2}\ln 2 + i\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right), \qquad k \in \mathbb{Z}.}$$

Κάθε τέτοιος αριθμός είναι πράγματι λύση, διότι

$$\exp\left(\frac{1}{2}\ln 2 + i\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right)\right) = \sqrt{2}e^{i\pi/4}e^{2\pi ik} = 1 + i.$$

Οι άπειρες λύσεις οφείλονται στην $2\pi i$-περιοδικότητα της μιγαδικής εκθετικής συνάρτησης.

Εκφώνηση. *Για $\theta \in \mathbb{R}$ να γραφεί στη μορφή $a + ib$ ο αριθμός*

$$Q = \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{\cos(3\theta) + i\sin(3\theta)}.$$

Λύση. Ο παρονομαστής έχει μέτρο 1, άρα δεν μηδενίζεται. Από τον τύπο του Euler,

$$\cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta}, \qquad \cos(3\theta) + i\sin(3\theta) = e^{3i\theta}.$$

Επομένως

$$Q = \frac{e^{-i\theta}}{e^{3i\theta}} = e^{-4i\theta} = \cos(4\theta) - i\sin(4\theta).$$

Άρα

$$\boxed{a = \cos(4\theta), \qquad b = -\sin(4\theta).}$$

Ο ίδιος υπολογισμός γίνεται αλγεβρικά: πολλαπλασιάζοντας με τον συζυγή του παρονομαστή βρίσκουμε

$$\begin{aligned} Q &= (\cos\theta - i\sin\theta)(\cos 3\theta - i\sin 3\theta) \\ &= \big(\cos\theta\cos 3\theta - \sin\theta\sin 3\theta\big) \\ &\quad - i\big(\sin\theta\cos 3\theta + \cos\theta\sin 3\theta\big) \\ &= \cos 4\theta - i\sin 4\theta. \end{aligned}$$

Εκφώνηση. *Να βρεθεί η εικόνα του*

$$S = \{re^{i\theta} : 1/2 < r < 1,\ -\pi < \theta < \pi\}$$

μέσω της $f(z) = \operatorname{Log} z$.

Λύση. Το S είναι ο ανοικτός δακτύλιος $1/2 < |z| < 1$ από τον οποίο έχει αφαιρεθεί το τμήμα του αρνητικού πραγματικού ημιάξονα. Επομένως βρίσκεται μέσα στο πεδίο ολομορφίας του κύριου λογαρίθμου.

Για $z = re^{i\theta} \in S$, η γωνία θ ανήκει στο $(-\pi, \pi)$, οπότε είναι ακριβώς το κύριο όρισμα του z. Άρα

$$w = \operatorname{Log} z = \ln r + i\theta.$$

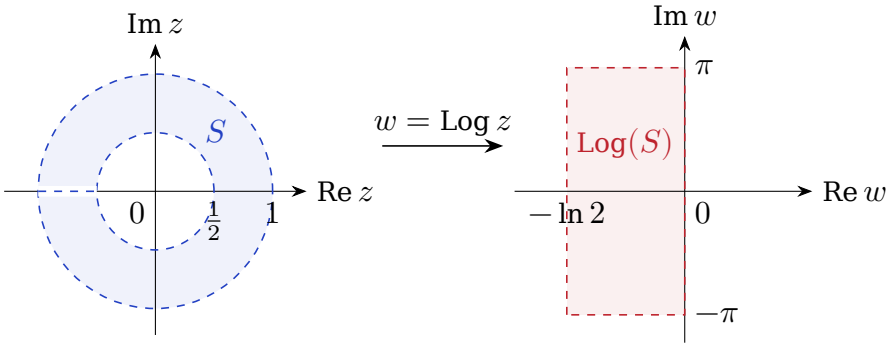
Αν $w = u + iv$, έχουμε $u = \ln r$, $v = \theta$. Η $\ln r$ είναι γνησίως αύξουσα για $r > 0$, και επομένως

$$\frac{1}{2} < r < 1 \iff -\ln 2 < u < 0, \qquad -\pi < v < \pi.$$

Αντίστροφα, για κάθε $w = u + iv$ με αυτές τις ανισότητες, ο αριθμός $z = e^u e^{iv}$ ανήκει στο S και $\operatorname{Log} z = w$. Έτσι

$$\boxed{\operatorname{Log}(S) = \{u + iv : -\ln 2 < u < 0,\ -\pi < v < \pi\}.}$$

Η εικόνα είναι ανοικτό ορθογώνιο. Τα κυκλικά σύνορα $r = 1/2$ και $r = 1$ αντιστοιχούν στις κατακόρυφες πλευρές $u = -\ln 2$ και $u = 0$. Οι δύο πλευρές της τομής κλάδου, $\theta \to \pi^-$ και $\theta \to -\pi^+$, αντιστοιχούν στις οριζόντιες πλευρές $v = \pi$ και $v = -\pi$. Κανένα από αυτά τα σύνορα δεν περιλαμβάνεται.



Σχήμα 8: Ο κύριος λογάριθμος μετατρέπει τον κομμένο δακτύλιο σε ανοικτό ορθογώνιο.

Εκφώνηση. *Να αποδειχθεί ότι οι $F(z) = \operatorname{Re} z$ και $G(z) = \overline{z}$ είναι συνεχείς σε όλο το $\mathbb{C}$ και δεν είναι μιγαδικά διαφορίσιμες σε κανένα σημείο.*

Συνέχεια

Για οποιαδήποτε $z, z_0 \in \mathbb{C}$ ισχύει

$$|F(z) - F(z_0)| = |\operatorname{Re}(z - z_0)| \le \sqrt{\operatorname{Re}^2(z - z_0) + \operatorname{Im}^2(z - z_0)} = |z - z_0|,$$

και

$$|G(z) - G(z_0)| = |\overline{z - z_0}| = |z - z_0|.$$

Έτσι, για κάθε $\varepsilon > 0$, η επιλογή $\delta = \varepsilon$ εξασφαλίζει ότι $|z - z_0| < \delta$ συνεπάγεται $|F(z) - F(z_0)| < \varepsilon$ και $|G(z) - G(z_0)| < \varepsilon$. Άρα και οι δύο συναρτήσεις είναι συνεχείς στο αυθαίρετο z_0.

Με την αρχή της μεταφοράς, οι ίδιες ανισότητες δείχνουν απευθείας ότι $z_n \to z_0$ συνεπάγεται $F(z_n) \to F(z_0)$ και $G(z_n) \to G(z_0)$.

1ος τρόπος μη διαφορισιμότητας: εξισώσεις Cauchy-Riemann

Για τη F, αν $z = x + iy$, τότε $u(x, y) = x$, $v(x, y) = 0$. Άρα

$$u_x = 1, \quad u_y = 0, \quad v_x = 0, \quad v_y = 0.$$

Η αναγκαία εξίσωση $u_x = v_y$ θα έδινε $1 = 0$, πράγμα αδύνατο. Επομένως η F δεν είναι μιγαδικά διαφορίσιμη πουθενά.

Για τη G έχουμε $G(x + iy) = x - iy$, άρα $u(x, y) = x$, $v(x, y) = -y$. Τότε $u_x = 1$ και $v_y = -1$, οπότε η ίδια αναγκαία εξίσωση θα έδινε $1 = -1$. Συνεπώς ούτε η G είναι μιγαδικά διαφορίσιμη σε κάποιο σημείο.

2ος τρόπος μη διαφορισιμότητας: προσέγγιση απο δύο κατευθυνσεις

Σταθεροποιούμε $z_0 \in \mathbb{C}$. Για τη F,

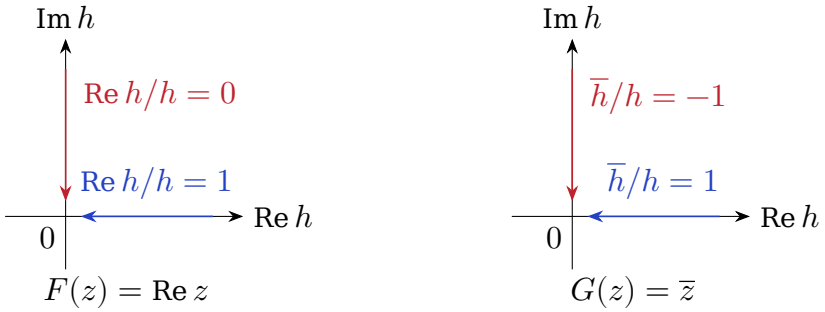
$$\frac{F(z_0 + h) - F(z_0)}{h} = \frac{\operatorname{Re} h}{h}.$$

Αν $h = t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, ο λόγος είναι 1. Αν $h = it$, με $t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, ο λόγος είναι 0. Επειδή οι δύο προσεγγίσεις του h στο 0 δίνουν διαφορετικά όρια, η παράγωγος $F'(z_0)$ δεν υπάρχει.

Για τη G,

$$\frac{G(z_0+h)-G(z_0)}{h} = \frac{\overline{h}}{h}.$$

Για $h = t$ ο λόγος είναι 1, ενώ για $h = it$ είναι -1. Άρα ούτε η $G'(z_0)$ υπάρχει. Το z_0 ήταν αυθαίρετο και στις δύο περιπτώσεις, οπότε η μη διαφορισιμότητα ισχύει σε όλο το $\mathbb{C}$.



Σχήμα 9: Οι οριζόντιες και κατακόρυφες αυξήσεις δίνουν διαφορετικά όρια του λόγου διαφορών.

Εκφώνηση. *[Μιγαδικός de l'Hospital]*

Έστω f, g μιγαδικά διαφορίσιμες στο z_0, με

$$f(z_0) = g(z_0) = 0, \qquad g'(z_0) \neq 0.$$

Να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Λύση. Από τον ορισμό της παραγώγου,

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \longrightarrow f'(z_0), \qquad \frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0} \longrightarrow g'(z_0) \neq 0.$$

Γράφουμε, κοντά στο z_0,

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}}{\dfrac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}}.$$

Παίρνοντας όρια στον αριθμητή και τον παρονομαστή βρίσκουμε

$$\boxed{\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.}$$

Παρατήρηση. Μπορούμε να γράψουμε το $\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}$ στον παρανομαστή γιατί κοντά στο z_0 θα είναι διάφορα το μηδεν.

Εφαρμογή 1: $\lim\limits_{z\to i}\dfrac{(z^2+1)^7}{z-i}$

Θέτουμε $f(z)=(z^2+1)^7$ και $g(z)=z-i$. Τότε $f(i)=g(i)=0$, ενώ $g'(i)=1$. Από τον κανόνα αλυσίδας,

$$f'(z)=7(z^2+1)^6\cdot 2z=14z(z^2+1)^6,$$

οπότε $f'(i)=0$. Άρα

$$\boxed{\lim_{z\to i}\frac{(z^2+1)^7}{z-i}=0.}$$

Εφαρμογή 2: $\lim_{z\to i}\frac{z^3+(1-3i)z^2+(i-3)z+2+i}{z-i}$

Θεωρούμε

$$f(z)=z^3+(1-3i)z^2+(i-3)z+2+i,\qquad g(z)=z-i.$$

Ελέγχουμε πρώτα ότι

$$f(i)=-i+(-1+3i)+(-1-3i)+2+i=0,\qquad g(i)=0.$$

Έχουμε $g'(i)=1$ και

$$\begin{aligned}f'(i)&=3i^2+2(1-3i)i+(i-3)\\&=-3+(6+2i)+(i-3)=3i.\end{aligned}$$

Επομένως

$$\boxed{\lim_{z\to i}\frac{z^3+(1-3i)z^2+(i-3)z+2+i}{z-i}=3i.}$$

Εφαρμογή 3: $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z}$

Για $f(z)=\sin z$, $g(z)=z$ έχουμε $f(0)=g(0)=0$, $f'(0)=\cos 0=1$ και $g'(0)=1$. Άρα

$$\boxed{\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=1.}$$

Αυτός είναι επίσης ο λόγος διαφορών της $\sin z$ στο 0.

Εφαρμογή 4: $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{e^z-1}{z}$

Ο αριθμητής μηδενίζεται στο 0 και η παράγωγός του εκεί είναι $e^0=1$. Επειδή η παράγωγος του παρονομαστή είναι 1, παίρνουμε

$$\boxed{\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}=1.}$$

Εφαρμογή 5: $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\operatorname{Log}(1+z)}{z}$

Για να χρησιμοποιήσουμε την παράγωγο του κύριου λογαρίθμου, ελέγχουμε το πεδίο ορισμού κοντά στο 0. Αν $|z| < 1/2$, τότε

$$\operatorname{Re}(1+z) \geq 1 - |z| > \frac{1}{2}.$$

Άρα το $1+z$ δεν συναντά την τομή κλάδου $(-\infty, 0]$. Η $f(z) = \operatorname{Log}(1+z)$ είναι επομένως ολόμορφη σε γειτονιά του 0, με

$$f(0) = \operatorname{Log} 1 = 0, \qquad f'(z) = \frac{1}{1+z}, \qquad f'(0) = 1.$$

Κατά συνέπεια,

$$\boxed{\lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{Log}(1+z)}{z} = 1.}$$

Εφαρμογή 6: $\lim\limits_{z\to i} \dfrac{1+iz}{z(z-i)}$

Θέτουμε $f(z) = 1+iz$ και $g(z) = z(z-i)$. Τότε $f(i) = g(i) = 0$ και

$$f'(i) = i, \qquad g'(z) = 2z - i, \qquad g'(i) = i \neq 0.$$

Επομένως

$$\boxed{\lim_{z\to i} \frac{1+iz}{z(z-i)} = \frac{i}{i} = 1.}$$

Εκφώνηση. *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοικτό και $f : U \to \mathbb{C}$ συνεχής που δεν μηδενίζει στο U. Υποθέτουμε ότι $g = f^2$ είναι ολόμορφη σε όλο το U. Να αποδειχθεί ότι η f είναι ολόμορφη στο U.*

Σταθεροποιούμε $z_0 \in U$ με $f(z_0) \neq 0$. Από τη συνέχεια,

$$f(z) + f(z_0) \longrightarrow 2f(z_0) \neq 0.$$

Επομένως το άθροισμα $f(z) + f(z_0)$ δεν μηδενίζεται σε μια αρκετά μικρή γειτονιά του z_0. Εκεί, για $z \neq z_0$, η διαφορά τετραγώνων δίνει

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{f(z)^2 - f(z_0)^2}{z - z_0} \cdot \frac{1}{f(z) + f(z_0)}.$$

Ο πρώτος παράγοντας τείνει στο $g'(z_0)$, ενώ ο δεύτερος στο $1/(2f(z_0))$. Άρα

$$\boxed{f'(z_0) = \frac{g'(z_0)}{2f(z_0)} = \frac{(f^2)'(z_0)}{2f(z_0)} \qquad (f(z_0) \neq 0).}$$

Εκφώνηση. *Θεωρούμε τη συνάρτηση*

$$f(z) = \exp\left(\frac{z-1}{z+1}\right), \qquad |z| < 1.$$

(i) Να δειχθεί ότι $|e^{\zeta}| \leq 1$ αν και μόνο αν $\operatorname{Re}\zeta \leq 0$ και να προσδιοριστεί η περίπτωση ισότητας.

(ii) Να δειχθεί ότι η f είναι ολόμορφη στον μοναδιαίο δίσκο.

(iii) Να δειχθεί ότι η f είναι φραγμένη εκεί.

(iv) Να εξεταστεί αν η f επεκτείνεται συνεχώς στον κλειστό μοναδιαίο δίσκο, με ιδιαίτερη προσοχή στο -1.

Λύση.

(i) Το μέτρο της μιγαδικής εκθετικής

Για $\zeta = x + iy$, με $x, y \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$e^{\zeta} = e^{x}(\cos y + i \sin y).$$

Επειδή $|\cos y + i \sin y| = 1$,

$$|e^{\zeta}| = e^{x} = e^{\operatorname{Re}\zeta}.$$

Η πραγματική εκθετική είναι γνησίως αύξουσα και $e^{0} = 1$. Άρα

$$\boxed{|e^{\zeta}| \leq 1 \iff \operatorname{Re}\zeta \leq 0, \qquad |e^{\zeta}| = 1 \iff \operatorname{Re}\zeta = 0.}$$

Αντίστοιχα, $|e^{\zeta}| < 1$ αν και μόνο αν $\operatorname{Re}\zeta < 0$.

(ii) Ολομορφία της f

Θέτουμε $q(z) = (z-1)/(z+1)$. Πρόκειται για ρητή συνάρτηση, η οποία είναι ολόμορφη σε κάθε σημείο όπου ο παρονομαστής δεν μηδενίζεται, δηλαδή στο $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$. Επειδή το -1 δεν ανήκει στον ανοικτό δίσκο $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$, η q είναι ολόμορφη στη $\mathbb{D}$.

Η εκθετική είναι ολόμορφη σε όλο το $\mathbb{C}$, οπότε η σύνθεση $f = \exp \circ q$ είναι ολόμορφη στη $\mathbb{D}$. Μάλιστα,

$$q'(z) = \frac{(z+1) - (z-1)}{(z+1)^2} = \frac{2}{(z+1)^2},$$

και επομένως

$$\boxed{f'(z) = \frac{2}{(z+1)^2} \exp\left(\frac{z-1}{z+1}\right), \qquad z \in \mathbb{D}.}$$

(iii) Η f είναι φραγμένη

Σύμφωνα με το πρώτο ερώτημα, αρκεί να ελέγξουμε το πραγματικό μέρος της q. Πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με $\overline{z} + 1$:

$$\begin{aligned} q(z) &= \frac{(z-1)(\overline{z}+1)}{|z+1|^2} \\ &= \frac{|z|^2 - 1 + z - \overline{z}}{|z+1|^2}. \end{aligned}$$

Η διαφορά $z - \overline{z}$ είναι καθαρά φανταστική. Άρα

$$\operatorname{Re} q(z) = \frac{|z|^2 - 1}{|z+1|^2}.$$

Για $|z| < 1$ ο αριθμητής είναι αρνητικός και ο παρονομαστής θετικός, οπότε $\operatorname{Re} q(z) < 0$. Επομένως

$$\boxed{0 < |f(z)| = \exp\left(\frac{|z|^2 - 1}{|z+1|^2}\right) < 1, \qquad z \in \mathbb{D}.}$$

Άρα η f είναι φραγμένη από το 1.

(iv) Συμπεριφορά πάνω στον μοναδιαίο κύκλο

Ο ίδιος τύπος ορίζει ολόμορφη συνάρτηση στο $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$. Άρα σε κάθε σημείο του κύκλου $|z| = 1$ διαφορετικό από το -1 η f επεκτείνεται συνεχώς, απλώς με τον ίδιο τύπο. Το μόνο σημείο που πρέπει να εξετάσουμε είναι το -1.

Παραμετροποιούμε τον κύκλο ως $z = e^{i\theta}$, με $-\pi < \theta < \pi$. Χρησιμοποιούμε τους τύπους

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Επομένως, όταν $\cos z \neq 0$, βγάζοντας κοινό παράγοντα το e^{-iz} στον αριθμητή και στον παρονομαστή, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \tan z = \frac{\sin z}{\cos z} &= \frac{1}{i}\,\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} \\ &= \frac{1}{i}\,\frac{e^{-iz}(e^{2iz} - 1)}{e^{-iz}(e^{2iz} + 1)} = -i\,\frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1}. \end{aligned}$$

Θέτοντας $z = \theta/2$, συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} + 1} = i \tan\frac{\theta}{2}, \qquad e^{i\theta} \neq -1.$$

Ο δεύτερος παράγοντας δεν μηδενίζεται για $-\pi < \theta < \pi$. Επομένως

$$\frac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} + 1} = i \tan\frac{\theta}{2},$$

και έτσι οι τιμές της φυσικής επέκτασης στον κύκλο είναι

$$\boxed{f(e^{i\theta}) = \exp\left(i \tan\frac{\theta}{2}\right), \qquad -\pi < \theta < \pi.}$$

Για την αντίθετη φορά παραμέτρησης, $z = e^{-i\theta}$, ο τύπος γίνεται $f(e^{-i\theta}) = \exp(-i\tan(\theta/2))$.

Όταν $\theta \to \pi^-$, η $\tan(\theta/2)$ τείνει στο $+\infty$. Το μέτρο της παραπάνω εκθετικής παραμένει 1, ενώ το όρισμά της μεγαλώνει απεριόριστα. Οι τιμές περιστρέφονται γύρω

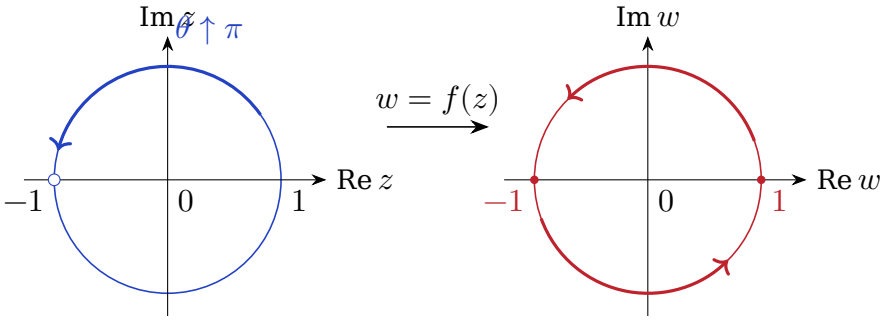
από τον μοναδιαίο κύκλο και δεν έχουν όριο. Για να το αποδείξουμε "αυστηρά", θέτουμε

$$\theta_n = 2\arctan(2\pi n), \qquad \varphi_n = 2\arctan((2n+1)\pi).$$

Τότε $\theta_n, \varphi_n \to \pi^-$, άρα $e^{i\theta_n}, e^{i\varphi_n} \to -1$, αλλά

$$f(e^{i\theta_n}) = e^{2\pi i n} = 1, \qquad f(e^{i\varphi_n}) = e^{i(2n+1)\pi} = -1.$$

Συνεπώς οι τιμές πάνω στον κύκλο δεν μπορούν να συμπληρωθούν συνεχώς στο -1.



Σχήμα 10: Καθώς το $e^{i\theta}$ πλησιάζει το -1, οι συνοριακές τιμές κάνουν άπειρες περιστροφές.

3 21 Οκτωβρίου 2026

3.1 Υπενθύμιση: ορίσματα και λογάριθμοι

Για $z \neq 0$, γράφουμε

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}, \qquad r = |z| > 0.$$

Η γωνία θ μετριέται από τον θετικό πραγματικό ημιάξονα προς την ημιευθεία που ξεκινά από το 0 και περνά από το z. Οι θετικές γωνίες αντιστοιχούν σε αριστερόστροφη περιστροφή.

Μια πλήρης περιστροφή δεν αλλάζει το τελικό σημείο:

$$e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta} \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

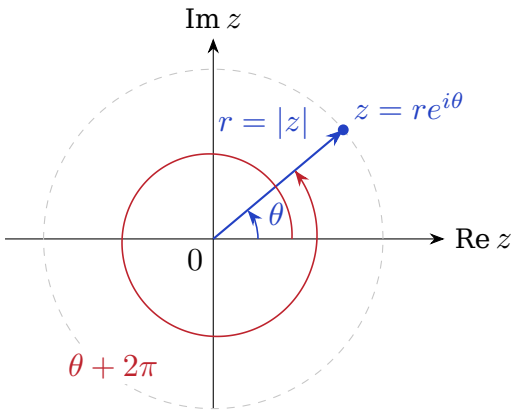
Επομένως ο ίδιος αριθμός γράφεται

$$z = re^{i\theta} = re^{i(\theta+2\pi)} = re^{i(\theta-2\pi)} = \cdots.$$

Το **σύνολο των ορισμάτων** του z είναι

$$\boxed{\arg z := \{t \in \mathbb{R} : z = |z|e^{it}\} = \{\theta + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.}$$

Το $\arg z$ δηλώνει **σύνολο** γωνιών, όχι μία επιλεγμένη γωνία.



Σχήμα 11: Η γωνία θ και η γωνία $\theta + 2\pi$ καταλήγουν στην ίδια ημιευθεία. Με το ίδιο μέτρο r δίνουν το ίδιο σημείο z. Η κόκκινη σπειροειδής γραμμή δείχνει σχηματικά την επιπλέον πλήρη περιστροφή.

Ανάμεσα στις γωνίες του $\arg z$, κρατάμε τη μοναδική που ανήκει στο ημιανοικτό διάστημα $(-\pi, \pi]$. Αυτή είναι το **κύριο όρισμα**:

$$\operatorname{Arg} z \in (-\pi, \pi], \qquad \arg z = \{\operatorname{Arg} z + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Δεν υπάρχει ουσιώδης λόγος να επιλέξουμε υποχρεωτικά αυτό το διάστημα. Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, ορίζουμε την επιλεγμένη τιμή

$$\boxed{\operatorname{Arg}_\alpha z \in (\alpha, \alpha + 2\pi], \qquad z = |z| e^{i \operatorname{Arg}_\alpha z}.}$$

Παρατηρήστε οτι $\operatorname{Arg}_{-\pi} = \operatorname{Arg}$.

Η συνάρτηση $\operatorname{Arg} : \mathbb{C}^* \to (-\pi, \pi]$ είναι καλά ορισμένη: κάθε $z \neq 0$ έχει ακριβώς μία επιλεγμένη τιμή. Ωστόσο δεν είναι συνεχής στα σημεία της αρνητικής πραγματικής ημιευθείας

$$\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \leq 0,\ \operatorname{Im}(z) = 0\}.$$

Αφαιρούμε λοιπόν τον αρνητικό ημιάξονα και το 0 και εργαζόμαστε στο **σχισμένο επίπεδο**

$$\boxed{\Sigma := \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].}$$

Εκεί η Arg είναι συνεχής και παίρνει τιμές στο $(-\pi, \pi)$.

Έστω $z \neq 0$. Ζητάμε όλους τους w για τους οποίους $e^w = z$. Γράφουμε $w = s + it$, όπου $s, t \in \mathbb{R}$. Τότε

$$e^w = e^s e^{it} = z \iff e^s = |z| \text{ και } t \in \arg z.$$

Επομένως $s = \ln |z|$ και

$$\boxed{\log z := \{w \in \mathbb{C} : e^w = z\} = \{\ln |z| + i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi) : k \in \mathbb{Z}\}.}$$

Το $\log z$ είναι **σύνολο** τιμών. Οι τιμές αυτές έχουν κοινό πραγματικό μέρος και διαφέρουν κατά ακέραια πολλαπλάσια του $2\pi i$.

Η **κύρια τιμή** και οι άλλες επιλεγμένες τιμές είναι

$$\operatorname{Log} z := \ln |z| + i \operatorname{Arg} z, \qquad \operatorname{Log}_\alpha z := \ln |z| + i \operatorname{Arg}_\alpha z.$$

Στο ανοικτό σύνολο Σ η Log είναι ολόμορφη και

$$\boxed{(\operatorname{Log} z)' = \frac{1}{z}.}$$

Για κάθε $z \neq 0$, έχουμε χωρίς επιπλέον περιορισμό

$$\boxed{e^{\operatorname{Log} z} = z,}$$

αφού $e^{\ln|z| + i \operatorname{Arg} z} = |z| e^{i \operatorname{Arg} z} = z$. Προσοχή, για την αντίστροφη σειρά σύνθεσης

$$\boxed{\operatorname{Log}(e^w) = w \iff -\pi < \operatorname{Im} w \leq \pi.}$$

3.2 Ασκήσεις

Εκφώνηση. *[2ο Φυλλάδιο, Πρόβλημα 2]*

Να λυθούν στο $\mathbb{C}$ οι εξισώσεις

$$\textit{(i)}\ e^z = 3, \qquad \textit{(ii)}\ e^{z+3} = i.$$

Λύση.

(i) 1ος τρόπος: γράφουμε $z = x + iy$

Έχουμε

$$e^z = e^x e^{iy} = 3.$$

Παίρνοντας μέτρα, βρίσκουμε $e^x = 3$, άρα $x = \ln 3$. Διαιρώντας με 3, παίρνουμε

$$e^{iy} = 1 = e^{i0} \iff y = 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Επομένως

$$\boxed{z = \ln 3 + 2k\pi i, \qquad k \in \mathbb{Z}.}$$

Κάθε τέτοιος αριθμός επαληθεύει την εξίσωση, αφού $e^{\ln 3 + 2k\pi i} = 3e^{2k\pi i} = 3$.

(i) 2ος τρόπος: παίρνουμε Log

Βρίσκουμε πρώτα τη λύση στην κύρια λωρίδα S, δηλαδή επιλέγουμε τον εκπρόσωπο με $-\pi < \operatorname{Im} z \leq \pi$. Εκεί μπορούμε να γράψουμε

$$z = \operatorname{Log}(e^z) = \operatorname{Log} 3 = \ln 3.$$

Από την $2\pi i$-περιοδικότητα της εκθετικής, παίρνουμε τις λύσεις

$$z_k = \ln 3 + 2k\pi i, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Για να δούμε ότι αυτές είναι *όλες*, έστω z οποιαδήποτε λύση. Επιλέγουμε $k \in \mathbb{Z}$ ώστε $w = z - 2k\pi i \in S$. Τότε

$$e^w = e^z = 3 \quad \Longrightarrow \quad w = \operatorname{Log}(e^w) = \operatorname{Log} 3 = \ln 3.$$

Άρα $z = \ln 3 + 2k\pi i$.

(ii) 1ος τρόπος: γράφουμε $z = x + iy$

Η εξίσωση γίνεται

$$e^{x+3}e^{iy} = i.$$

Παίρνοντας μέτρα, βρίσκουμε $e^{x+3} = 1$, άρα $x = -3$. Έπειτα

$$e^{iy} = i = e^{i\pi/2} \iff y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Επομένως

$$\boxed{z = -3 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \qquad k \in \mathbb{Z}.}$$

Κάθε τέτοιος αριθμός επαληθεύει την εξίσωση, αφού $e^{z+3} = e^{i(\pi/2+2k\pi)} = i$.

(ii) 2ος τρόπος: παίρνουμε Log

Θέτουμε $w = z + 3$. Στην κύρια λωρίδα έχουμε

$$e^w = i \quad \Longrightarrow \quad w = \operatorname{Log} i = \ln|i| + i \operatorname{Arg} i = \frac{\pi i}{2}.$$

Με την περιοδικότητα, όλες οι λύσεις για το w είναι

$$w = \frac{\pi i}{2} + 2k\pi i.$$

Η πληρότητα δικαιολογείται όπως πριν: κάθε λύση μεταφέρεται στην κύρια λωρίδα αφαιρώντας κατάλληλο $2k\pi i$. Επιστρέφοντας στο $z = w - 3$, παίρνουμε ξανά

$$\boxed{z = -3 + \frac{\pi i}{2} + 2k\pi i, \qquad k \in \mathbb{Z}.}$$

Εκφώνηση. *[Φυλλάδιο 2, Πρόβλημα 7]*

Να βρεθεί το μεγαλύτερο ανοικτό σύνολο στο οποίο είναι ολόμορφη η

$$f(z) = \begin{cases} \overline{z}, & |z| \le 1, \\ z^2, & |z| > 1, \end{cases}$$

και να υπολογιστεί η παράγωγός της στο σύνολο αυτό.

Λύση. Για $|z| < 1$ ο τύπος $f(z) = \overline{z}$ ισχύει σε ολόκληρη γειτονιά κάθε σημείου. Αν $z = x + iy$, τότε

$$u(x, y) = x, \qquad v(x, y) = -y,$$

οπότε $u_x = 1$ και $v_y = -1$. Μία από τις αναγκαίες εξισώσεις Cauchy–Riemann αποτυγχάνει σε κάθε εσωτερικό σημείο. Άρα η f δεν είναι μιγαδικά παραγωγίσιμη σε κανένα σημείο του $|z| < 1$.

Για $|z| > 1$ ισχύει τοπικά $f(z) = z^2$. Επομένως η f είναι ολόμορφη στο εξωτερικό του μοναδιαίου κύκλου, με

$$f'(z) = 2z, \qquad |z| > 1.$$

Μένει να εξετάσουμε τα σημεία του συνόρου $|z| = 1$.

Τι γίνεται στο σύνορο: 1ος τρόπος

Έστω $|z_0| = 1$. Αν η f ήταν ολόμορφη σε κάποια γειτονιά του z_0, θα υπήρχε $r > 0$ ώστε να είναι ολόμορφη σε όλο τον δίσκο $B(z_0, r)$. Όμως κάθε τέτοιος δίσκος περιέχει σημεία με $|z| < 1$, στα οποία μόλις δείξαμε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη. Αυτό είναι αδύνατο.

Άρα κανένα σημείο του $|z| = 1$ δεν ανήκει στο σύνολο ολομορφίας.

Τί γίνεται στο σύνορο: 2ος τρόπος

Έστω πάλι $|z_0| = 1$. Στο σημείο αυτό ισχύει $f(z_0) = \overline{z_0}$. Από το εσωτερικό, θέτοντας $z = (1-t)z_0$, και από το εξωτερικό, θέτοντας $z = (1+t)z_0$, παίρνουμε, για $t \downarrow 0$,

$$f((1-t)z_0) = (1-t)\overline{z_0} \longrightarrow \overline{z_0}, \qquad f((1+t)z_0) = (1+t)^2 z_0^2 \longrightarrow z_0^2.$$

Επομένως, αναγκαία συνθήκη συνέχειας στο z_0 είναι

$$\overline{z_0} = z_0^2.$$

Επειδή $|z_0| = 1$, έχουμε $\overline{z_0} = 1/z_0$. Άρα η συνθήκη ισοδυναμεί με $z_0^3 = 1$, δηλαδή

$$z_0 \in \{1, e^{2\pi i/3}, e^{4\pi i/3}\}.$$

Σε όλα τα υπόλοιπα σημεία του κύκλου η f δεν είναι συνεχής και συνεπώς δεν είναι παραγωγίσιμη. Στις τρεις παραπάνω ρίζες οι δύο συνεχείς τύποι συμφωνούν, οπότε η f είναι συνεχής εκεί. Ελέγχουμε όμως χωριστά την παράγωγο.

Έστω λοιπόν $z_0^3 = 1$. Για την εσωτερική προσέγγιση,

$$\frac{f((1-t)z_0) - f(z_0)}{(1-t)z_0 - z_0} = \frac{-t\overline{z_0}}{-tz_0} = \frac{\overline{z_0}}{z_0} = z_0.$$

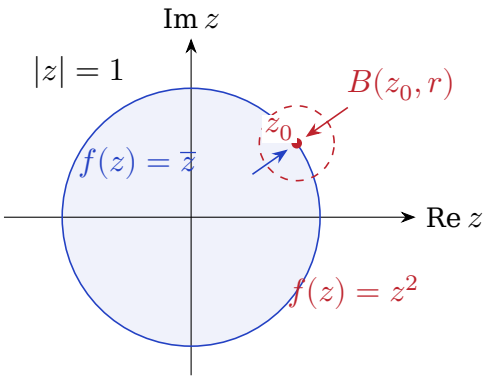
Για την εξωτερική προσέγγιση χρησιμοποιούμε τον άλλο τύπο:

$$\begin{aligned}\frac{f((1+t)z_0) - f(z_0)}{(1+t)z_0 - z_0} &= \frac{(1+t)^2 z_0^2 - z_0^2}{tz_0} \\ &= (2+t)z_0 \longrightarrow 2z_0.\end{aligned}$$

Εφόσον $z_0 \neq 0$, τα δύο όρια διαφέρουν. Άρα ούτε σε αυτά τα τρία σημεία υπάρχει παράγωγος. Συνολικά, η f δεν είναι μιγαδικά παραγωγίσιμη σε κανένα σημείο του μοναδιαίου κύκλου.

Παρατήρηση. Θα μπορούσε κανείς να δείξει τη μη παραγωγισιμότητα προσεγγίζοντας το z_0 μόνο από το εσωτερικό του κύκλου. Αν το z_0 δεν βρίσκεται στους άξονες, κρατάμε σταθερό άλλοτε το φανταστικό και άλλοτε το πραγματικό μέρος, οπότε το πηλίκο διαφορών ισούται αντίστοιχα με 1 και -1. Στα σημεία $\pm 1, \pm i$, όπου η μία από αυτές τις ευθείες εφάπτεται στον κύκλο, χρησιμοποιούμε μία ακτινική και μία λοξή προσέγγιση, που επίσης δίνουν διαφορετικά όρια.

Παρατήρηση. Ο υπολογισμός των Cauchy–Riemann εφαρμόζεται άμεσα στο ανοικτό σύνολο $|z| < 1$. Στο σύνορο ο τύπος $\overline{z}$ δεν ισχύει σε ολόκληρη γειτονιά. Η πλήρης f ορίζεται σε όλο το $\mathbb{C}$, οπότε μπορούμε να εξετάσουμε την παράγωγο και εκεί, χρησιμοποιώντας τον κατάλληλο τύπο για κάθε προσέγγιση.



Σχήμα 12: 1ος τρόπος: Κάθε γειτονιά συνοριακού σημείου συναντά το εσωτερικό του κύκλου. 2ος τρόπος: Οι δύο ακτινικές προσεγγίσεις χρησιμοποιούν διαφορετικούς τύπους της f.

3.3 Ένα κλασσικό λήμμα

Θυμόμαστε ότι **χωρίο** ή **τόπος** σημαίνει μη κενό, ανοικτό και συνεκτικό σύνολο. Κάθε χωρίο του $\mathbb{R}^2$, και επομένως του $\mathbb{C}$, είναι πολυγωνικά συνεκτικό: οποιαδήποτε δύο σημεία του ενώνονται με πεπερασμένη πολυγωνική γραμμή που παραμένει μέσα του.

Λήμμα 1. *Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ χωρίο και $u : \Omega \to \mathbb{R}$ συνάρτηση της οποίας οι μερικές παράγωγοι υπάρχουν σε κάθε σημείο του Ω και*

$$u_x(x, y) = u_y(x, y) = 0 \qquad \text{για κάθε } (x, y) \in \Omega.$$

Τότε η u είναι σταθερή στο Ω.

Απόδειξη. Οι μερικές παράγωγοι είναι συνεχείς, αφού είναι ταυτοτικά μηδέν. Επομένως η u είναι διαφορίσιμη και $\nabla u = (u_x, u_y) = (0, 0)$.

Έστω δύο αυθαίρετα σημεία $P, Q \in \Omega$. Επειδή το Ω είναι χωρίο, μπορούμε να τα συνδέσουμε με πολυγωνική γραμμή με κορυφές

$$P = P_0, P_1, \dots, P_m = Q,$$

της οποίας κάθε τμήμα περιέχεται στο Ω.

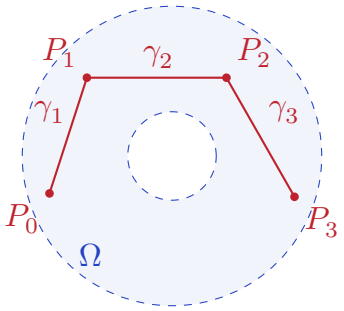
Από το θεώρημα μέσης τιμής, για κάθε j υπάρχει σημείο ξ_j στο εσωτερικό του τμήματος $[P_{j-1}, P_j]$ τέτοιο ώστε

$$u(P_j) - u(P_{j-1}) = \nabla u(\xi_j) \cdot (P_j - P_{j-1}) = 0.$$

Άρα

$$u(P) = u(P_0) = u(P_1) = \cdots = u(P_m) = u(Q).$$

Επειδή τα P, Q ήταν αυθαίρετα, η u είναι σταθερή στο Ω. □



Σχήμα 13: Σε ένα χωρίο με τρύπα η ευθεία που ενώνει δύο σημεία μπορεί να βγαίνει εκτός. Επιλέγουμε πολυγωνική γραμμή μέσα στο χωρίο και εφαρμόζουμε το ΘΜΤ σε κάθε τμήμα της.

Εκφώνηση. *[Φυλλάδιο 2, Πρόβλημα 8]*

Έστω f ολόμορφη σε χωρίο $\Omega \subset \mathbb{C}$ και

$$f'(z) = 0 \qquad \textit{για κάθε } z \in \Omega.$$

Να αποδειχθεί ότι η f είναι σταθερή στο Ω.

1ος τρόπος: Cauchy-Riemann και λήμμα

Γράφουμε $f = u + iv$. Επειδή η f είναι ολόμορφη,

$$f' = u_x + iv_x, \qquad u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x.$$

Η υπόθεση $f' = 0$ δίνει $u_x = v_x = 0$, και οι Cauchy–Riemann δίνουν επιπλέον $u_y = v_y = 0$. Συνεπώς

$$u_x = u_y = 0, \qquad v_x = v_y = 0 \quad \text{στο } \Omega.$$

Εφαρμόζοντας το Λήμμα 1 χωριστά στις u, v, βρίσκουμε ότι και οι δύο είναι σταθερές. Άρα η $f = u + iv$ είναι σταθερή.

2ος τρόπος: απευθείας λύση (πάλι με πολυγωνική γραμμή)

Παίρνουμε $z_1, z_2 \in \Omega$ και πολυγωνική γραμμή μέσα στο Ω με κορυφές $a_0 = z_1, a_1, \dots, a_m = z_2$. Παραμετροποιούμε κάθε τμήμα ως

$$\gamma_j(t) = a_{j-1} + t(a_j - a_{j-1}), \qquad 0 \le t \le 1,$$

και θέτουμε $g_j(t) = f(\gamma_j(t))$. Από τον κανόνα της αλυσίδας,

$$g_j'(t) = f'(\gamma_j(t))\,\gamma_j'(t) = f'(\gamma_j(t))(a_j - a_{j-1}) = 0.$$

Η g_j είναι μιγαδική συνάρτηση *πραγματικής* μεταβλητής. Το ότι $g_j' = 0$ συνεπάγεται ότι είναι σταθερή (εφαρμόζουμε το πραγματικό ΘΜΤ χωριστά στις $\operatorname{Re} g_j$ και $\operatorname{Im} g_j$, των οποίων οι παράγωγοι είναι μηδενικές).

Έτσι η f είναι σταθερή πάνω σε κάθε τμήμα. Επειδή τα διαδοχικά τμήματα έχουν κοινό άκρο, οι σταθερές συμπίπτουν:

$$f(z_1) = f(a_0) = f(a_1) = \cdots = f(a_m) = f(z_2).$$

Τα z_1, z_2 ήταν αυθαίρετα, επομένως η f είναι σταθερή στο Ω.

3ος τρόπος: κλασσικό κόλπο

Σταθεροποιούμε $z_0 \in \Omega$ και ορίζουμε

$$A := \{z \in \Omega : f(z) = f(z_0)\}.$$

Θα δείξουμε ότι το A είναι μη κενό, σχετικά κλειστό και σχετικά ανοικτό στο συνεκτικό σύνολο Ω.

Μη κενό. Έχουμε $z_0 \in A$.

Κλειστό ως προς το Ω. Ας πάρουμε μια $z_n \in A$ με $z_n \to z \in \mathbb{C}$ και ας δείξουμε οτι $z \in A$. Η f είναι συνεχής, αφού είναι ολόμορφη, αρα απο αρχή συνέχειας

$$f(z_0) = f(z_n) \to f(z).$$

Δηλαδή, $f(z) = f(z_0)$, και άρα $z \in A$.

Ανοικτό. Παίρνουμε $a \in A$ και επιλέγουμε $r > 0$ με $B(a, r) \subset \Omega$. Εδώ χρησιμοποιούμε το θεώρημα ότι κάθε ολόμορφη συνάρτηση αναπτύσσεται τοπικά σε δυναμοσειρά:

$$f(z) = f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n, \qquad |z-a| < r.$$

Επειδή $f' \equiv 0$ στο Ω, όλες οι παράγωγοι τάξης $n \geq 1$ μηδενίζονται. Η σειρά επομένως δίνει

$$f(z) = f(a) = f(z_0) \qquad (z \in B(a, r)).$$

Άρα $B(a, r) \subset A$, και το A είναι ανοικτό. Αυτό το βήμα προέκυψε απευθείας από τη δυναμοσειρά, χωρίς χρήση των u, v ή των προηγούμενων αποδείξεων σταθερότητας.

Επειδή το Ω είναι συνεκτικό και το A είναι μη κενό, ανοικτό και κλειστό ως προς το Ω, έχουμε $A = \Omega$. Συνεπώς $f(z) = f(z_0)$ για κάθε $z \in \Omega$.

Εκφώνηση. *[Φυλλάδιο 2, Πρόβλημα 9]*

Έστω $f = u + iv$ ολόμορφη σε χωρίο Ω. Αν μία από τις συναρτήσεις Re f *ή* Im f *είναι σταθερή, να δείξετε ότι η f είναι σταθερή.*

Λύση. Εφαρμόζουμε τις Cauchy–Riemann και το Πρόβλημα 8.

Αν η $u = \text{Re}\, f$ είναι σταθερή, τότε $u_x = u_y = 0$. Από

$$v_y = u_x = 0, \qquad v_x = -u_y = 0$$

έχουμε $f' = u_x + iv_x = 0$ σε όλο το Ω. Άρα η f είναι σταθερή.

Αν η $v = \text{Im}\, f$ είναι σταθερή, τότε $v_x = v_y = 0$. Οι ίδιες εξισώσεις δίνουν $u_x = v_y = 0$ και $u_y = -v_x = 0$. Και πάλι $f' = 0$, οπότε η f είναι σταθερή. Ισοδύναμα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα 1 για την άλλη πραγματική συνάρτηση.

Εκφώνηση. *[Φυλλάδιο 2, Πρόβλημα 10]*

Έστω f ολόμορφη σε χωρίο Ω και υποθέστε ότι και η $\overline{f}$ είναι ολόμορφη στο Ω. Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή.

Λύση. Γράφουμε $f = u + iv$. Η συνάρτηση

$$g = \frac{f + \overline{f}}{2} = u$$

είναι ολόμορφη και έχει μηδενικό φανταστικό μέρος. Επομένως, οι εξισώσεις Cauchy–Riemann για την g δίνουν

$$u_x = u_y = 0.$$

Από τις εξισώσεις Cauchy–Riemann για την f έχουμε επίσης $v_x = -u_y = 0$. Άρα

$$f' = u_x + iv_x = 0.$$

Από το Πρόβλημα 8, η f είναι σταθερή στο χωρίο Ω.

Εκφώνηση. *[Φυλλάδιο2, Πρόβλημα 11]*

Έστω f ολόμορφη σε χωρίο Ω και $|f(z)| = c$ για κάθε $z \in \Omega$, όπου $c \geq 0$ είναι σταθερά. Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή.

Λύση. Αν $c = 0$, τότε $|f(z)| = 0$ για κάθε z, ανν $\sqrt{u^2 + v^2} = 0$ ανν $f \equiv 0$.

Έστω $c > 0$. Τότε η f δεν μηδενίζεται πουθενά στο Ω και

$$f(z)\overline{f(z)} = |f(z)|^2 = c^2.$$

Μπορούμε λοιπόν να διαιρέσουμε με $f(z)$ και να γράψουμε

$$\overline{f(z)} = \frac{c^2}{f(z)}.$$

Το δεξί μέλος είναι ολόμορφο στο Ω, αφού ο παρονομαστής είναι ολόμορφος και δεν μηδενίζεται. Άρα και η $\overline{f}$ είναι ολόμορφη. Το Πρόβλημα 10 δίνει ότι η f είναι σταθερή.

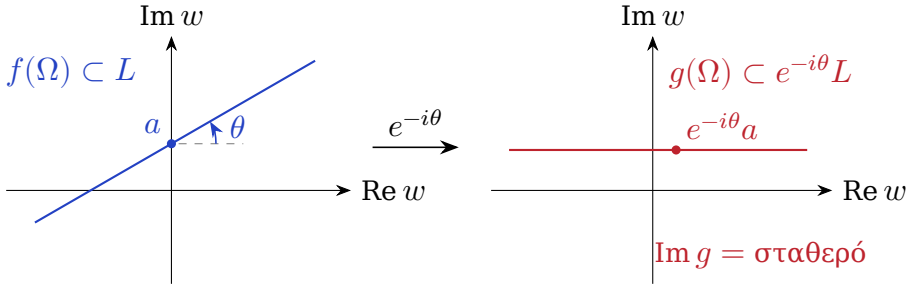
Εκφώνηση. *[Φυλλάδιο 2, Πρόβλημα 12]*

Έστω f ολόμορφη σε χωρίο Ω και υποθέστε ότι το $f(\Omega)$ περιέχεται σε μία ευθεία του μιγαδικού επιπέδου. Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή.

Λύση. Έστω θ η γωνία που σχηματίζει η ευθεία με τον θετικό πραγματικό ημιάξονα. Τότε η ολόμορφη συνάρτηση

$$g(z) = e^{-i\theta} f(z)$$

έχει σταθερό φανταστικό μέρος. Από το Πρόβλημα 9, η g είναι σταθερή, άρα και η $f = e^{i\theta} g$ είναι σταθερή.



Σχήμα 14: Ο πολλαπλασιασμός με $e^{-i\theta}$ περιστρέφει την ευθεία κατά $-\theta$ και την κάνει οριζόντια. Αν $\theta > 0$, η περιστροφή είναι δεξιόστροφη. (Για ευκολία μπορείτε να σκεφτείτε την ευθεία να περνάει απο το 0)

Σημείωση Ακολουθούν 2 ασκήσεις διαφορετικού βαθμού δυσκολίας (ανάλογα με τα $*$), οι οποίες δεν λύνονται στην τάξη. Οι λύσεις τους θα δημοσιεύονται

αργότερα. Όσοι επιθυμούν να τις δοκιμάσουν και να μου τις στείλουν στο email (chrpandis@gmail.com), θα χαρώ πολύ να τις συζητήσουμε.

Εκφώνηση. *[*]*

Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη και Ω χωρίο. Έστω οτι η $g(z) = e^{f(z)}$ σταθερή στο Ω. Δείξτε οτι η f είναι σταθερή στο Ω.

Εκφώνηση. *[*]*

Έστω ολόμορφη $f : \Omega \to \mathbb{C}$ και Ω τόπος. Έστω επίσης οτι για κάθε $z \in \Omega$ έχουμε $f(z) = 0$ ή $f'(z) = 0$. Δείξτε οτι η f σταθερή.

Εκφώνηση. *[**]*

Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ και Ω χωρίο με $f^5, (\overline{f})^2$ ολόμορφες στο Ω. Δείξτε ότι η f σταθερή στο Ω.

Εκφώνηση. *[Φυλλάδιο 2, Πρόβλημα 6]*

Για καθεμία από τις δώδεκα συναρτήσεις ζητάμε το μεγαλύτερο ανοικτό σύνολο *στο οποίο είναι ολόμορφη, καθώς και την παράγωγό της.*

Λύση. Οι τελευταίες τέσσερις δυνάμεις, στα (ix)–(xii), ορίζονται με τον κύριο κλάδο:

$$w^\beta := e^{\beta \operatorname{Log} w}, \qquad w \in \Sigma.$$

Για σταθερό $\beta \in \mathbb{C}$ η παραγώγιση δίνει

$$\frac{d}{dw} e^{\beta \operatorname{Log} w} = \frac{\beta}{w} e^{\beta \operatorname{Log} w}.$$

(i) $f(z) = ze^{z^2}$

Το πολυώνυμο z^2 είναι ακέραιο και η σύνθεση e^{z^2} επίσης. Το γινόμενο με το z είναι επομένως ακέραιο. Άρα $D = \mathbb{C}$. Από τον κανόνα γινομένου και τον κανόνα αλυσίδας,

$$\begin{aligned} f'(z) &= 1 \cdot e^{z^2} + z\, e^{z^2} (z^2)' \\ &= e^{z^2} + 2z^2 e^{z^2}. \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\boxed{f'(z) = (1 + 2z^2)e^{z^2}, \qquad z \in \mathbb{C}.}$$

(ii) $f(z) = (1 + e^z)^5$

Η $1 + e^z$ είναι ακέραια. Η πέμπτη δύναμη είναι πολυωνυμική πράξη, άρα δεν εισάγει κανέναν περιορισμό. Επομένως $D = \mathbb{C}$. Με τον κανόνα αλυσίδας,

$$f'(z) = 5(1 + e^z)^4 (1 + e^z)' = 5e^z (1 + e^z)^4.$$

Άρα

$$\boxed{D = \mathbb{C}, \qquad f'(z) = 5e^z (1 + e^z)^4.}$$

(iii) $f(z) = \sin z \cos z$

Υπενθυμίζουμε ότι

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Βλέπουμε ότι και οι δύο συναρτήσεις είναι ακέραιες. Παραγωγίζοντας τους ίδιους τύπους βρίσκουμε

$$(\sin z)' = \cos z, \qquad (\cos z)' = -\sin z.$$

Το γινόμενο είναι ακέραιο και

$$\begin{aligned} f'(z) &= (\sin z)' \cos z + \sin z (\cos z)' \\ &= \cos^2 z - \sin^2 z = \cos(2z). \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\boxed{D = \mathbb{C}, \qquad f'(z) = \cos(2z).}$$

(iv) $f(z) = \operatorname{Log}(z+1)$

Η μεταβλητή που μπαίνει στον λογάριθμο είναι $w = z + 1$. Για τον ολόμορφο κύριο κλάδο απαιτούμε

$$z + 1 \notin (-\infty, 0].$$

Γράφουμε $z = x + iy$. Τότε, (θυμηθείτε οτι $(-\infty, 0] = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \leq 0, \operatorname{Im}(z) = 0\}$)

$$\begin{aligned} z + 1 \in (-\infty, 0] &\iff \operatorname{Im}(z+1) = 0 \text{ και } \operatorname{Re}(z+1) \leq 0 \\ &\iff y = 0 \text{ και } x + 1 \leq 0 \\ &\iff y = 0 \text{ και } x \leq -1. \end{aligned}$$

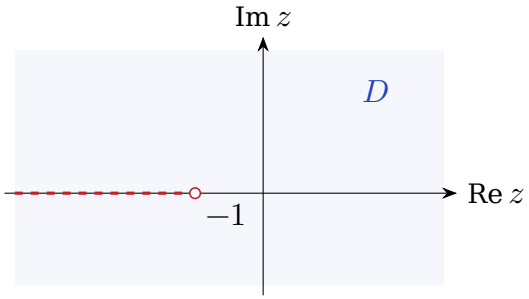
Άρα

$$\boxed{D = \mathbb{C} \setminus \{x + iy : y = 0,\ x \leq -1\} = \mathbb{C} \setminus (-\infty, -1].}$$

Πρόκειται για οριζόντια τομή που ξεκινά από το -1 και συνεχίζει προς τα αριστερά, μαζί με το αρχικό της σημείο.

Στο D, η σύνθεση είναι ολόμορφη. Από τον κανόνα αλυσίδας,

$$\boxed{f'(z) = \frac{(z+1)'}{z+1} = \frac{1}{z+1}, \qquad z \in D.}$$



Σχήμα 15: Το σύνολο ολομορφίας της $\operatorname{Log}(z+1)$. Η διακεκομμένη κόκκινη ημιευθεία $(-\infty, -1]$ αφαιρείται.

(v) $f(z) = \dfrac{\operatorname{Log}(3z-1)}{z^2+1}$

Χρειάζονται ταυτόχρονα δύο συνθήκες:

$$3z-1 \notin (-\infty, 0], \qquad z^2+1 \neq 0.$$

Αρα $z \neq \pm i$. Για την τομή, αν $z = x+iy$,

$$3z-1 = (3x-1)+3iy \in (-\infty,0] \iff y=0, \quad x \leq \frac{1}{3}.$$

Ο παρονομαστής μηδενίζεται στα $z = \pm i$. Άρα

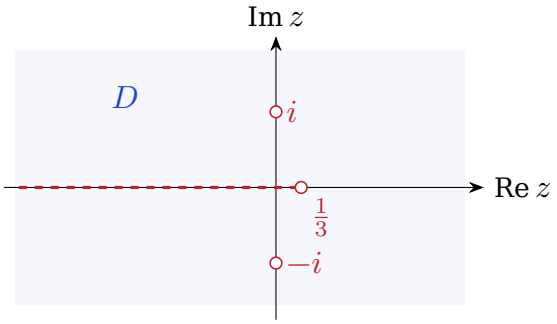
$$\boxed{D = \mathbb{C} \setminus \left(\{x+iy : y=0,\ x \leq \tfrac{1}{3}\} \cup \{i,-i\}\right).}$$

Στο D έχουμε πηλίκο ολόμορφων συναρτήσεων με μη μηδενικό παρονομαστή. Επειδή

$$(\operatorname{Log}(3z-1))' = \frac{3}{3z-1}, \qquad (z^2+1)' = 2z,$$

ο κανόνας πηλίκου δίνει

$$\boxed{f'(z) = \frac{\dfrac{3(z^2+1)}{3z-1} - 2z\operatorname{Log}(3z-1)}{(z^2+1)^2}, \qquad z \in D.}$$



Σχήμα 16: Αφαιρούμε την οριζόντια ημιευθεία μέχρι το $1/3$ και επιπλέον τα δύο σημεία $\pm i$.

(vi) $f(z) = \sinh(3z+i)$

Οι υπερβολικές συναρτήσεις ορίζονται στο μιγαδικό επίπεδο από

$$\sinh w = \frac{e^w - e^{-w}}{2}, \qquad \cosh w = \frac{e^w + e^{-w}}{2}.$$

Είναι ακέραιες, ως γραμμικοί συνδυασμοί εκθετικών συναρτήσεων, και

$$(\sinh w)' = \cosh w, \qquad (\cosh w)' = \sinh w.$$

Η $3z+i$ είναι επίσης ακέραια. Άρα η σύνθεση είναι ολόμορφη σε όλο το $\mathbb{C}$. Παραγωγίζοντας,

$$f'(z) = \cosh(3z+i)\,(3z+i)' = 3\cosh(3z+i).$$

Συνεπώς

$$\boxed{D = \mathbb{C}, \qquad f'(z) = 3\cosh(3z+i).}$$

(vii) $f(z) = \cosh(z^2 + 3i)$

Το πολυώνυμο z^2+3i και η cosh είναι ακέραιες. Άρα η σύνθεσή τους είναι ακέραια. Από τον κανόνα αλυσίδας,

$$f'(z) = \sinh(z^2 + 3i)\,(z^2 + 3i)' = 2z\sinh(z^2 + 3i).$$

Επομένως

$$\boxed{D = \mathbb{C}, \qquad f'(z) = 2z\sinh(z^2 + 3i).}$$

(viii) $f(z) = \mathrm{Log}_{\pi/2}(z + 1)$

Εδώ χρησιμοποιούμε διαφορετικό κλάδο: οι επιλεγμένες γωνίες ικανοποιούν

$$\frac{\pi}{2} < \mathrm{Arg}_{\pi/2}\, w \leq \frac{5\pi}{2}.$$

Η τομή στο επίπεδο της μεταβλητής w είναι

$$R_{\pi/2} = \{te^{i\pi/2} : t \geq 0\} = \{it : t \geq 0\},$$

δηλαδή ο μη αρνητικός φανταστικός ημιάξονας. Για $w = z + 1$ απαιτούμε

$$z + 1 \notin \{it : t \geq 0\}.$$

Αν $z = x + iy$, τότε

$$z + 1 \in \{it : t \geq 0\} \iff x + 1 = 0, \quad y \geq 0.$$

Επομένως

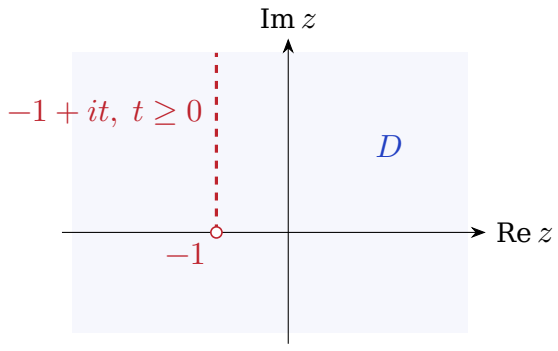
$$\boxed{D = \mathbb{C} \setminus \{-1 + it : t \geq 0\} = \mathbb{C} \setminus \{x + iy : x = -1,\ y \geq 0\}.}$$

Αφαιρούμε την *κατακόρυφη* ημιευθεία που ξεκινά από το -1 και κατευθύνεται προς τα πάνω.

Στο D ο κλάδος είναι ολόμορφος και

$$\boxed{f'(z) = \frac{(z + 1)'}{z + 1} = \frac{1}{z + 1}.}$$

Παρατηρούμε ότι η παράγωγος είναι ίδια με εκείνη του (iv).



Σχήμα 17: Για τον κλάδο $\mathrm{Log}_{\pi/2}$, η τομή μεταφέρεται στην κατακόρυφη ημιευθεία που ξεκινά από το -1.

(ix) $f(z) = z^i$

Με τον κύριο κλάδο ορίζουμε

$$z^i := e^{i \operatorname{Log} z}.$$

Επειδή το $\operatorname{Log} z$ είναι ολόμορφο στο Σ και η εκθετική είναι ακέραια, η σύνθεση είναι ολόμορφη στο

$$\boxed{D = \Sigma = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].}$$

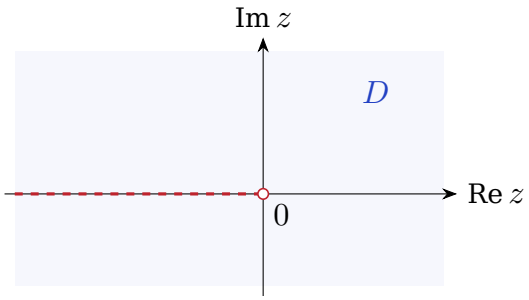
(Προσοχή: Δεν πρόκειται για ακέραια δύναμη, επομένως χρειαζόμαστε την επιλογή κλάδου.) Παραγωγίζοντας τον ορισμό,

$$f'(z) = e^{i \operatorname{Log} z} (i \operatorname{Log} z)' = e^{i \operatorname{Log} z} \frac{i}{z}.$$

Άρα

$$\boxed{f'(z) = \frac{i\, z^i}{z}, \qquad z \in D.}$$

Το z^i εδώ είναι πάντα η ίδια κύρια τιμή $e^{i \operatorname{Log} z}$.



Σχήμα 18: Ο κύριος κλάδος του z^i είναι ολόμορφος στο επίπεδο χωρίς τον μη θετικό πραγματικό ημιάξονα.

(x) $f(z) = (z+1)^{1/2}$

Η κύρια τετραγωνική ρίζα ορίζεται από

$$f(z) = \exp\left(\frac{1}{2} \operatorname{Log}(z+1)\right).$$

Χρειάζεται $z + 1 \in \Sigma$, δηλαδή, όπως στο (iv),

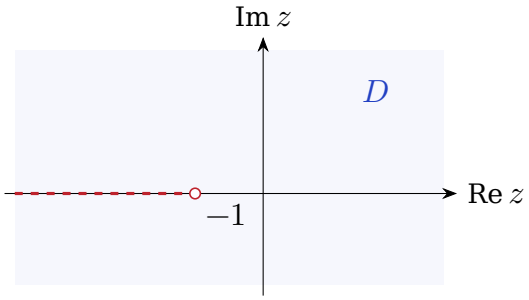
$$\boxed{D = \mathbb{C} \setminus (-\infty, -1].}$$

Στο D, ο κανόνας αλυσίδας δίνει

$$\begin{aligned} f'(z) &= \exp\left(\frac{1}{2} \operatorname{Log}(z+1)\right) \frac{1}{2(z+1)} \\ &= \frac{(z+1)^{1/2}}{2(z+1)} = \frac{1}{2(z+1)^{1/2}}. \end{aligned}$$

Στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι η επιλεγμένη ρίζα ικανοποιεί $((z+1)^{1/2})^2 = z+1$ και δεν μηδενίζεται στο D. Άρα

$$\boxed{f'(z) = \frac{1}{2(z+1)^{1/2}}, \qquad z \in D.}$$



Σχήμα 19: Η κύρια ρίζα $(z+1)^{1/2}$ έχει την ίδια μετατοπισμένη τομή με τη $\mathrm{Log}(z+1)$.

(xi) $f(z) = \dfrac{1}{(z-i)^{1/2}}$

Με τον κύριο κλάδο γράφουμε

$$f(z) = \exp\left(-\frac{1}{2}\,\mathrm{Log}(z-i)\right).$$

Απαιτούμε $z - i \in \Sigma$. Αν $z = x + iy$, τότε

$$z - i = x + i(y-1) \in (-\infty, 0] \iff y = 1, \quad x \le 0.$$

Άρα

$$\boxed{D = \mathbb{C} \setminus \{x + i : x \le 0\}.}$$

Η τομή είναι οριζόντια ημιευθεία που ξεκινά από το i και συνεχίζει προς τα αριστερά. Το i αποκλείεται και επειδή μηδενίζει τον παρονομαστή.

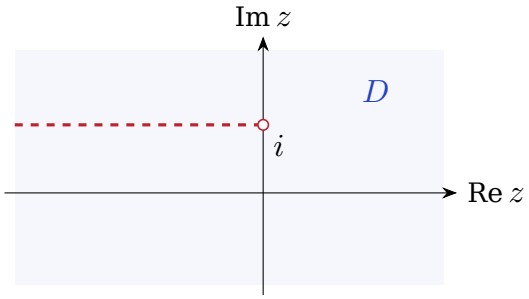
Παραγωγίζουμε τον εκθετικό τύπο:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \exp\left(-\frac{1}{2}\,\mathrm{Log}(z-i)\right)\left(-\frac{1}{2}\,\frac{1}{z-i}\right) \\ &= -\frac{1}{2(z-i)(z-i)^{1/2}}. \end{aligned}$$

Επομένως

$$\boxed{f'(z) = -\frac{1}{2(z-i)^{3/2}}, \qquad z \in D.}$$

Αφαιρούμε πάλι το $z = i$.



Σχήμα 20: Η εξαιρούμενη ημιευθεία είναι $\{z : \operatorname{Re} z \le 0,\ \operatorname{Im} z = 1\}$.

(xii) $f(z) = z^z$

Με τον κύριο κλάδο ορίζουμε

$$f(z) = z^z := \exp(z \operatorname{Log} z), \qquad z \in \Sigma.$$

Οι z και $\operatorname{Log} z$ είναι ολόμορφες στο Σ, άρα το γινόμενο $z \operatorname{Log} z$ και η εκθετική του είναι επίσης ολόμορφες εκεί. Επομένως

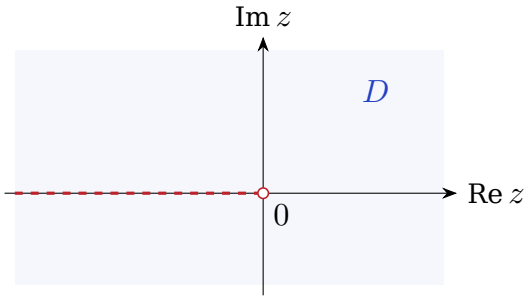
$$\boxed{D = \Sigma = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].}$$

Εδώ ο εκθέτης δεν είναι σταθερός. Παραγωγίζουμε πρώτα το γινόμενο:

$$(z \operatorname{Log} z)' = 1 \cdot \operatorname{Log} z + z\frac{1}{z} = \operatorname{Log} z + 1.$$

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τον κανόνα αλυσίδας:

$$\boxed{f'(z) = e^{z \operatorname{Log} z}(\operatorname{Log} z + 1) = z^z(\operatorname{Log} z + 1), \qquad z \in D.}$$



Σχήμα 21: Ο κύριος κλάδος του z^z είναι ολόμορφος στο $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.