Μιγαδική Ανάλυση

Ασκήσεις Τετάρτης

Περιεχόμενα

1 7 Οκτωβρίου 2026 **1**

2 13 Οκτωβρίου 2026 **11**

1 7 Οκτωβρίου 2026

Εκφώνηση. *[1ο Φυλλάδιο, Πρόβλημα 2(C)]*

Να βρεθεί και να σχεδιαστεί το σύνολο

$$C = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| > |z+1|\}.$$

Λύση. Γράφουμε $z = x + iy$, όπου $x, y \in \mathbb{R}$. Τότε

$$|z-1| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}, \qquad |z+1| = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}.$$

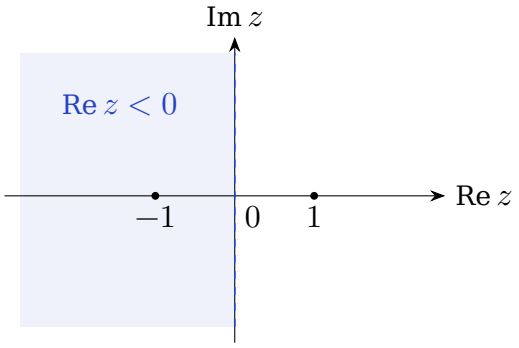
Επειδή και τα δύο μέλη είναι μη αρνητικά, μπορούμε να υψώσουμε στο τετράγωνο χωρίς να αλλάξει η φορά ή η ισοδυναμία της ανισότητας:

$$\begin{aligned} |z-1| > |z+1| &\iff (x-1)^2 + y^2 > (x+1)^2 + y^2 \\ &\iff x^2 - 2x + 1 > x^2 + 2x + 1 \\ &\iff -4x > 0 \\ &\iff x < 0. \end{aligned}$$

Άρα

$$\boxed{C = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\}.}$$

Γεωμετρικά, το $|z-1|$ είναι η απόσταση του z από το 1, ενώ το $|z+1|$ είναι η απόσταση του από το -1. Ζητάμε επομένως τα σημεία που βρίσκονται πλησιέστερα στο -1 από ό,τι στο 1. Η μεσοκάθετος του τμήματος με άκρα $-1, 1$ είναι ο φανταστικός άξονας. Το ζητούμενο είναι το ανοικτό ημιεπίπεδο αριστερά από αυτόν.



Σχήμα 1: Ο φανταστικός άξονας δεν ανήκει στο C.

Εκφώνηση. *[1ο Φυλλάδιο, Πρόβλημα 3(i)]*

Να γραφούν σε πολική μορφή οι αριθμοί

$$z_1 = \frac{1-i}{1+i}, \qquad z_2 = \frac{1+i}{1+\sqrt{3}\,i}.$$

1ος τρόπος: πολλαπλασιασμός με τον συζυγή του παρονομαστή

Για τον πρώτο αριθμό έχουμε

$$z_1 = \frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-2i+i^2}{1-i^2} = \frac{-2i}{2} = -i.$$

Επομένως $|z_1| = 1$ και μπορούμε να επιλέξουμε όρισμα $-\pi/2$:

$$\boxed{z_1 = e^{-i\pi/2}.}$$

Για τον δεύτερο αριθμό,

$$\begin{aligned} z_2 &= \frac{(1+i)(1-\sqrt{3}\,i)}{(1+\sqrt{3}\,i)(1-\sqrt{3}\,i)} \\ &= \frac{1+\sqrt{3}+i(1-\sqrt{3})}{4}. \end{aligned}$$

Το μέτρο του είναι

$$|z_2| = \frac{\sqrt{(1+\sqrt{3})^2+(1-\sqrt{3})^2}}{4} = \frac{\sqrt{8}}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Για να προσδιορίσουμε τη γωνία, βγάζουμε αυτό το μέτρο κοινό παράγοντα:

$$z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} - i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right).$$

Θυμόμαστε την ταυτότητα

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Για $\alpha = \pi/3$ και $\beta = \pi/4$ παίρνουμε

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

Ομοίως,

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Το πραγματικό μέρος του z_2 είναι θετικό και το φανταστικό αρνητικό, άρα επιλέγουμε τη γωνία $-\pi/12$ του τέταρτου τεταρτημορίου. Συνεπώς

$$\boxed{z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\pi/12}.}$$

Παρατήρηση. Το συνημίτονο μόνο του δεν καθορίζει το πρόσημο της γωνίας. Χρειάζεται να ελέγξουμε και το φανταστικό μέρος, δηλαδή το πρόσημο του ημιτόνου.

2ος τρόπος: πολική μορφή αριθμητή και παρονομαστή

Χρησιμοποιούμε ότι τα μέτρα διαιρούνται και τα ορίσματα αφαιρούνται:

$$\frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)} \qquad (r_2 > 0).$$

Έχουμε

$$1 - i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}, \qquad 1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}, \qquad 1 + \sqrt{3}\, i = 2e^{i\pi/3}.$$

Άρα

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2}e^{i\pi/4}} = e^{-i\pi/2}, \qquad z_2 = \frac{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}{2e^{i\pi/3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\pi/12}.$$

Εκφώνηση. *[1ο Φυλλάδιο, Πρόβλημα 5.]*

Αν $|z| = 2$, να βρεθούν η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή του $|z^4 + 1|$ και όλοι οι αριθμοί z στους οποίους επιτυγχάνονται.

Λύση. Από την τριγωνική και την αντίστροφη τριγωνική ανισότητα,

$$\big||z^4| - 1\big| \le |z^4 + 1| \le |z^4| + 1.$$

Επειδή $|z^4| = |z|^4 = 16$, προκύπτει

$$15 \le |z^4 + 1| \le 17.$$

Πρέπει τώρα να ελέγξουμε πότε επιτυγχάνεται ισότητα στα δύο άκρα.

1ος τρόπος: ομόρροπα και αντίρροπα διανύσματα

Για δύο μιγαδικούς u, v, τους οποίους βλέπουμε ως διανύσματα του $\mathbb{R}^2$, ισχύει

$$|u + v|^2 = |u|^2 + |v|^2 + 2\,\mathrm{Re}(u\overline{v}).$$

Η ανισότητα Cauchy–Schwarz δίνει

$$-|u||v| \le \mathrm{Re}(u\overline{v}) \le |u||v|.$$

Όταν $u, v \neq 0$, στο δεξιό άκρο έχουμε ισότητα ακριβώς όταν τα δύο διανύσματα είναι ομόρροπα, ενώ στο αριστερό ακριβώς όταν είναι αντίρροπα.

Εδώ παίρνουμε $u = z^4$ και $v = 1$. Για να είναι $|z^4 + 1| = 17$, ο αριθμός z^4 πρέπει να βρίσκεται στον θετικό πραγματικό ημιάξονα. Αφού το μέτρο του είναι 16, αυτό ισοδυναμεί με $z^4 = 16$. Άρα

$$z = 2e^{ik\pi/2}, \quad k = 0, 1, 2, 3,$$

δηλαδή $z \in \{2, 2i, -2, -2i\}$.

Για να είναι $|z^4 + 1| = 15$, τα z^4 και 1 πρέπει να είναι αντίρροπα. Επομένως $z^4 = -16$, και έτσι

$$z = 2e^{i(\pi/4 + k\pi/2)}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Οι αριθμοί αυτοί γράφονται και ως $\pm\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}$, με όλους τους συνδυασμούς των προσήμων.

2ος τρόπος: τετράγωνα και πραγματικό-φανταστικό μέρος

Θέτουμε $z^4 = x + iy$. Τότε $x^2 + y^2 = 256$ και

$$|z^4 + 1|^2 = (x + 1)^2 + y^2 = 257 + 2x.$$

Στο άνω άκρο,

$$|z^4 + 1| = 17 \iff 257 + 2x = 289 \iff x = 16.$$

Η σχέση $x^2 + y^2 = 256$ επιβάλλει τότε $y = 0$, άρα $z^4 = 16$. Στο κάτω άκρο,

$$|z^4 + 1| = 15 \iff 257 + 2x = 225 \iff x = -16,$$

οπότε πάλι $y = 0$ και $z^4 = -16$. Λύνοντας τις δύο εξισώσεις βρίσκουμε τις ίδιες ακριβώς περιπτώσεις ισότητας. Συνεπώς

$$\boxed{\max_{|z|=2} |z^4 + 1| = 17, \qquad \min_{|z|=2} |z^4 + 1| = 15.}$$

Εκφώνηση. *[1ο Φυλλάδιο, Πρόβλημα 10+Σημειώσεις]*

Έστω $a = re^{i\theta} \neq 0$ και $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Να βρεθούν όλες οι λύσεις της $z^n = a$, να αποδειχθεί ότι είναι ακριβώς n διαφορετικές και ότι σχηματίζουν κανονικό n-γωνο. Στη συνέχεια να λυθεί η εξίσωση $z^4 = -16$.

Λύση. Ακολουθούμε τη σειρά της απόδειξης των σημειώσεων. Γράφουμε έναν υποψήφιο αριθμό στη μορφή

$$z = te^{i\varphi}, \qquad t \geq 0.$$

Επειδή $a \neq 0$, μια λύση δεν μπορεί να είναι μηδέν, άρα $t > 0$. Τότε $z^n = t^n e^{in\varphi}$ και

$$z^n = a \iff t^n e^{in\varphi} = re^{i\theta}.$$

Ισότητα δύο μη μηδενικών μιγαδικών σε πολική μορφή σημαίνει ισότητα των μέτρων και διαφορά των γωνιών κατά ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π. Επομένως

$$t^n = r, \qquad n\varphi = \theta + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Άρα

$$t = r^{1/n}, \qquad \varphi = \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n},$$

και οι λύσεις είναι

$$\boxed{z_k = r^{1/n} e^{i(\theta/n + 2\pi k/n)}, \qquad k = 0, 1, \dots, n-1.}$$

Γιατί αρκούν αυτές οι n τιμές του k;

Κάθε ακέραιος γράφεται $k = qn + j$, με $0 \leq j \leq n - 1$. Τότε

$$e^{i(\theta/n + 2\pi k/n)} = e^{i(\theta/n + 2\pi j/n)} e^{2\pi i q} = e^{i(\theta/n + 2\pi j/n)}.$$

Άρα οι υπόλοιπες ακέραιες τιμές επαναλαμβάνουν τις ίδιες λύσεις.

Γιατί οι λύσεις είναι διαφορετικές;

Αν $z_k = z_\ell$ για $k, \ell \in \{0, \dots, n-1\}$, τότε

$$e^{2\pi i(k-\ell)/n} = 1.$$

Συνεπώς $(k-\ell)/n \in \mathbb{Z}$, δηλαδή το $k-\ell$ είναι πολλαπλάσιο του n. Όμως $|k-\ell| < n$, οπότε $k = \ell$.

Γεωμετρική περιγραφή

Όλες οι ρίζες έχουν το ίδιο μέτρο $r^{1/n}$ και διαδοχικά ορίσματα που διαφέρουν κατά $2\pi/n$. Βρίσκονται λοιπόν στον κύκλο με κέντρο 0 και ακτίνα $r^{1/n}$, σε ίσες γωνιακές αποστάσεις. Για $n \geq 3$ είναι οι κορυφές κανονικού n-γώνου. Για $n = 2$ είναι δύο αντιδιαμετρικά σημεία, ενώ για $n = 1$ η εξίσωση έχει απλώς τη μοναδική λύση $z = a$.

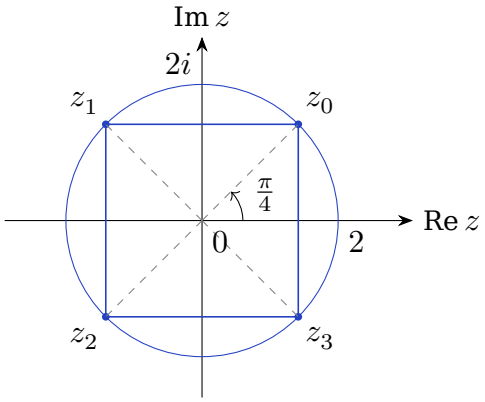
Εφαρμογή: $z^4 = -16$

Γράφουμε $-16 = 16e^{i\pi}$. Άρα

$$z_k = 2e^{i(\pi/4 + k\pi/2)}, \qquad k = 0, 1, 2, 3.$$

Αναλυτικά,

$$\boxed{\sqrt{2} + i\sqrt{2}, \quad -\sqrt{2} + i\sqrt{2}, \quad -\sqrt{2} - i\sqrt{2}, \quad \sqrt{2} - i\sqrt{2}.}$$



Σχήμα 2: Οι τέσσερις ρίζες του -16 σχηματίζουν τετράγωνο.

Εκφώνηση. *[ο Φυλλάδιο, Πρόβλημα 11]*

(i) Να περιγραφεί γεωμετρικά η απεικόνιση $f(z) = iz$.

(ii) Να βρεθεί η εικόνα του

$$S = \{re^{i\theta} : 0 \leq r \leq 2,\ 0 \leq \theta \leq \pi/4\}$$

μέσω της $f(z) = z^2$.

(iii) Για $f(z) = 1/z$, $z \neq 0$, να περιγραφούν οι εικόνες των συνόλων $|z| < 1$, $|z| > 1$, $|z| = 1$, λαμβάνοντας υπόψη το πεδίο ορισμού.

(i) Πολλαπλασιασμός με i

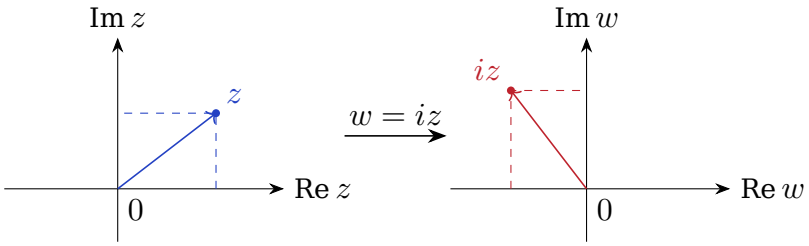
Εφόσον $i = e^{i\pi/2}$, για $z = re^{i\theta}$ έχουμε

$$iz = re^{i(\theta+\pi/2)}.$$

Το μέτρο μένει ίδιο και η γωνία αυξάνεται κατά $\pi/2$. Άρα η απεικόνιση είναι αριστερόστροφη περιστροφή κατά 90° γύρω από το 0. Σε καρτεσιανές συντεταγμένες,

$$z = x + iy \quad \Longrightarrow \quad iz = -y + ix,$$

δηλαδή $(x, y) \mapsto (-y, x)$.



Σχήμα 3: Η απεικόνιση $z \mapsto iz$ στρέφει κάθε διάνυσμα κατά $\pi/2$.

(ii) Η εικόνα ενός τομέα μέσω της $z \mapsto z^2$

Για $z = re^{i\theta} \in S$ παίρνουμε

$$w = z^2 = r^2 e^{2i\theta}.$$

Θέτοντας $\rho = r^2$ και $\varphi = 2\theta$, έχουμε

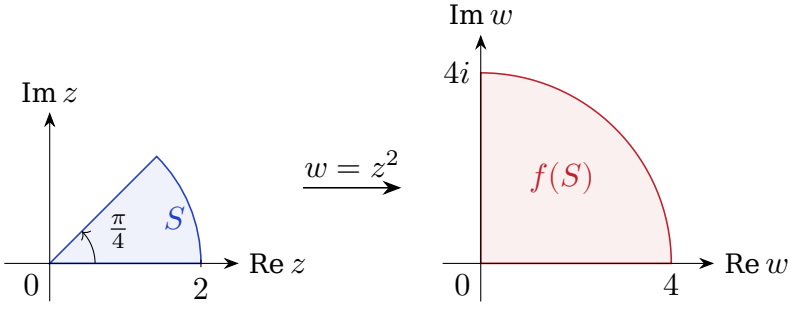
$$0 \le \rho \le 4, \qquad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}.$$

Επομένως $f(S)$ περιέχεται στο κλειστό τεταρτοκύκλιο ακτίνας 4 του πρώτου τεταρτημορίου. Για την αντίστροφη συμπερίληψη, αν $w = \rho e^{i\varphi}$ με αυτές τις ιδιότητες, επιλέγουμε

$$z = \sqrt{\rho}\, e^{i\varphi/2}.$$

Τότε $0 \le \sqrt{\rho} \le 2$, $0 \le \varphi/2 \le \pi/4$, άρα $z \in S$ και $z^2 = w$. Συνεπώς

$$\boxed{f(S) = \{\rho e^{i\varphi} : 0 \le \rho \le 4,\ 0 \le \varphi \le \pi/2\}.}$$



Σχήμα 4: Η ακτίνα υψώνεται στο τετράγωνο και η γωνία διπλασιάζεται.

(iii) Η αντιστροφή $z \mapsto 1/z$

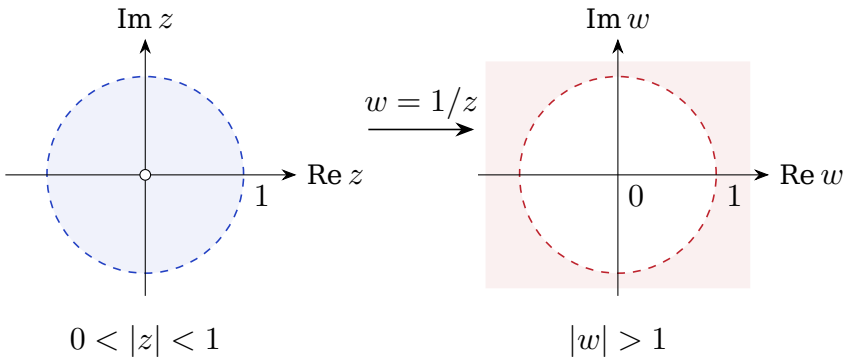
Για $z = re^{i\theta} \neq 0$ ισχύει

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}.$$

Άρα το μέτρο αντικαθίσταται από το αντίστροφό του και το όρισμα αλλάζει πρόσημο. Έτσι

$$\begin{aligned} f(\{0 < |z| < 1\}) &= \{w \in \mathbb{C} : |w| > 1\}, \\ f(\{|z| > 1\}) &= \{w \in \mathbb{C} : 0 < |w| < 1\}, \\ f(\{|z| = 1\}) &= \{w \in \mathbb{C} : |w| = 1\}. \end{aligned}$$

Οι ισότητες είναι αμφίδρομες, αφού η αντίστροφη της απεικόνισης $z \mapsto 1/z$ είναι η ίδια η απεικόνιση: για $w \neq 0$, παίρνουμε $z = 1/w$. Στον μοναδιαίο κύκλο ειδικότερα, $1/z = \overline{z}$, οπότε εκεί η απεικόνιση είναι ανάκλαση ως προς τον πραγματικό άξονα.



Σχήμα 5: Ο διάτρητος μοναδιαίος δίσκος απεικονίζεται στο εξωτερικό του μοναδιαίου κύκλου.

Παρατήρηση. Το 0 αφαιρείται από το αρχικό σύνολο $|z| < 1$, επειδή η $1/z$ δεν ορίζεται εκεί.

Εκφώνηση. *[1ο Φυλλάδιο, Πρόβλημα 12]*

Να υπολογιστούν, όπου υπάρχουν, τα όρια

$$\textit{(i)} \quad \lim_{z \to 2} \frac{z^4 - 16}{z - 2}, \qquad \textit{(ii)} \quad \lim_{z \to 0} z e^{i/|z|},$$

$$\textit{(iii)} \quad \lim_{z \to 0} \frac{\overline{z}}{z}, \qquad \textit{(iv)} \quad \lim_{z \to 0} \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}.$$

(i) Παραγοντοποίηση

Για $z \neq 2$,

$$\frac{z^4 - 16}{z - 2} = \frac{(z^2 - 4)(z^2 + 4)}{z - 2} = (z + 2)(z^2 + 4).$$

Η τελευταία παράσταση είναι πολυώνυμο και επομένως συνεχής στο 2. Άρα

$$\boxed{\lim_{z \to 2} \frac{z^4 - 16}{z - 2} = 4 \cdot 8 = 32.}$$

(ii) Εκτίμηση με το μέτρο

Για $z \neq 0$, ο αριθμός $1/|z|$ είναι πραγματικός. Επομένως

$$\left|e^{i/|z|}\right| = \sqrt{\cos^2(1/|z|) + \sin^2(1/|z|)} = 1$$

και άρα

$$\left|ze^{i/|z|}\right| = |z|.$$

Τελικά,

$$\lim_{z\to 0} \left|ze^{i/|z|}\right| = \lim_{z\to 0} |z| = 0.$$

Εδώ θυμόμαστε ότι εαν $|w_n| \to 0$ τότε $w_n \to 0$ (hint: ϵ, δ) και παίρνουμε

$$\boxed{\lim_{z\to 0} ze^{i/|z|} = 0.}$$

Παρατήρηση. Η σχέση που χρησιμοποιούμε είναι $|e^{i/|z|}| = 1$. Ο ίδιος ο μιγαδικός αριθμός $e^{i/|z|}$ δεν είναι σταθερά ίσος με 1.

(iii) Προσέγγιση από πραγματικό και φανταστικό άξονα

Αν $z = x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, τότε $\overline{z} = z = x$, άρα

$$\frac{\overline{z}}{z} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to 0} \frac{\overline{x}}{x} = 1.$$

Αν όμως $z = iy$, με $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, τότε $\overline{z} = -iy$ και

$$\frac{\overline{z}}{z} = -1 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{y\to 0} \frac{\overline{iy}}{iy} = -1.$$

Αν υπήρχε το μιγαδικό όριο, κάθε προσέγγιση του 0 θα έδινε την ίδια τιμή. Οι τιμές 1 και -1 είναι διαφορετικές, οπότε το όριο δεν υπάρχει. Το ίδιο φαίνεται από τις ακολουθίες $z_n = 1/n$ και $w_n = i/n$, που συγκλίνουν και οι δύο στο 0, ενώ οι αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης είναι σταθερά 1 και -1.

(iv) Δεξιά και αριστερά στον πραγματικό άξονα

Για $z = x > 0$,

$$\frac{\operatorname{Re} z}{|z|} = \frac{x}{x} = 1,$$

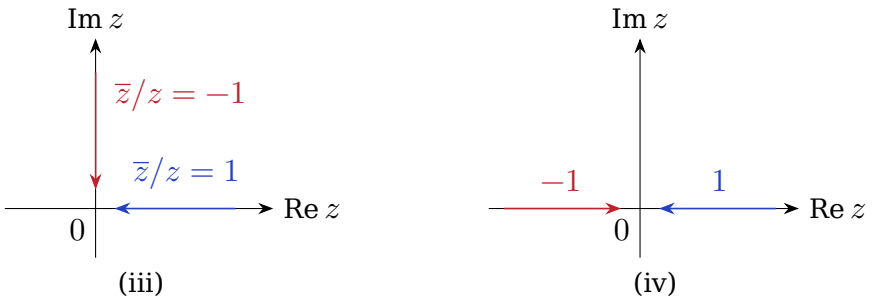
ενώ για $z = x < 0$,

$$\frac{\operatorname{Re} z}{|z|} = \frac{x}{-x} = -1.$$

Άρα ήδη οι δύο πλευρικές προσεγγίσεις πάνω στον πραγματικό άξονα δίνουν

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{Re} x}{|x|} = 1, \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{Re} x}{|x|} = -1.$$

Συνεπώς ούτε αυτό το μιγαδικό όριο υπάρχει. Επιπλέον, πάνω στον φανταστικό άξονα η συνάρτηση έχει τιμή 0, αφού $\operatorname{Re}(iy) = 0$.



Σχήμα 6: Διαφορετικές προσεγγίσεις του 0 δίνουν διαφορετικές τιμές. Οι αριθμοί στο σχήμα είναι τιμές των αντίστοιχων συναρτήσεων.

Εκφώνηση. *[1ο Φυλλάδιο, Πρόβλημα 13] Έστω $K \subset \mathbb{C}$ συμπαγές και $F \subset K$ κλειστό. Να αποδειχθεί, με τον ακολουθιακό ορισμό της συμπάγειας και της κλειστότητας, ότι το F είναι συμπαγές.*

Λύση. Αν $F = \emptyset$ δεν έχουμε κάτι να δείξουμε. Υποθέτουμε λοιπόν $F \neq \emptyset$ και παίρνουμε οποιαδήποτε ακολουθία

$$(z_n)_{n\geq 1} \subset F.$$

Πρέπει να βρούμε υπακολουθία που συγκλίνει σε σημείο του F. Επειδή $F \subset K$, η ίδια ακολουθία βρίσκεται στο K. Από τη συμπάγεια του K υπάρχουν υπακολουθία (z_{n_k}) και $z \in K$ τέτοια ώστε

$$z_{n_k} \longrightarrow z.$$

Όλοι οι όροι της υπακολουθίας ανήκουν στο F. Εφόσον το F είναι κλειστό, περιέχει το όριο κάθε συγκλίνουσας ακολουθίας σημείων του. Άρα $z \in F$.

Επομένως κάθε ακολουθία του F έχει υπακολουθία που συγκλίνει σε σημείο του F. Αυτό είναι ακριβώς ο ακολουθιακός ορισμός της συμπάγειας.

Παρατήρηση. Αρκεί το F να είναι κλειστό ως προς το K. Πράγματι, γνωρίζουμε ήδη ότι το όριο z ανήκει στο K, και η σχετική κλειστότητα τότε εξασφαλίζει ότι ανήκει και στο F.

Εκφώνηση. *[1ο Φυλλάδιο, Πρόβλημα 14]*

Έστω $K \subset \mathbb{C}$ συμπαγές και

$$F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \cdots$$

μη κενά κλειστά υποσύνολα του K. Να αποδειχθεί ότι

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset.$$

1ος τρόπος: επιλογή σημείων και συγκλίνουσα υπακολουθία

Για κάθε n επιλέγουμε ένα σημείο $z_n \in F_n$, κάτι που είναι δυνατόν επειδή $F_n \neq \emptyset$. Αφού όλα τα F_n περιέχονται στο K, η ακολουθία (z_n) βρίσκεται στο συμπαγές K. Υπάρχουν επομένως υπακολουθία (z_{n_k}) και $z \in K$ ώστε $z_{n_k} \to z$.

Θα δείξουμε ότι το ίδιο σημείο z ανήκει σε κάθε F_m. Αφού η n_k είναι υπακολουθία, τότε ξέρουμε ότι $n_k \geq k$ για κάθε k. Αρκεί λοιπόν να πάρουμε k ώστε $k \geq m$. Αυτό, μαζί με την το γεγονός οτι τα σύνολα φθίνουν, μας δίνει

$$z_{n_k} \in F_{n_k} \subset F_m \qquad (k \geq m).$$

Άρα μια ουρά της υπακολουθίας βρίσκεται στο κλειστό F_m και συγκλίνει στο z. Από την κλειστότητα, $z \in F_m$. Επειδή το m ήταν αυθαίρετο,

$$z \in \bigcap_{m=1}^{\infty} F_m.$$

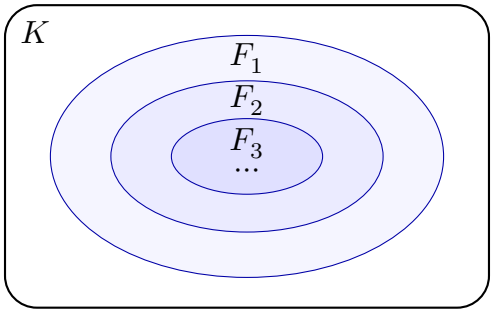
Παρατήρηση. Εαν βοηθάει παρατηρήστε οτι στην απόδειξη εκεί που παίρνουμε το αυθαίρετο m θα μπορούσαμε να είχαμε πάρει για $m = 10, 15, 10000$ ή όποιον φυσικό αριθμό προτιμάτε.

2ος τρόπος: ανοικτή κάλυψη και πεπερασμένη υποκάλυψη

Υποθέτουμε προς άτοπο ότι $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$. Τότε, από τους νόμους του De Morgan,

$$K = K \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (K \setminus F_n).$$

Θέτουμε $U_n = K \setminus F_n$. Επειδή κάθε F_n είναι κλειστό στο K, το U_n είναι ανοικτό ως προς το K. Άρα τα (U_n) αποτελούν σχετικά ανοικτή κάλυψη του συμπαγούς K.



Η συμπάγεια δίνει πεπερασμένους δείκτες $n_1, \dots, n_p$ με

$$K = U_{n_1} \cup \cdots \cup U_{n_p}.$$

Η φθίνουσα διάταξη των F_n σημαίνει ότι τα συμπληρώματά τους έχουν την αντίστροφη διάταξη:

$$U_1 \subset U_2 \subset U_3 \subset \cdots.$$

Αν $N = \max\{n_1, \dots, n_p\}$, η παραπάνω πεπερασμένη ένωση είναι ακριβώς το U_N. Συνεπώς

$$K = U_N = K \setminus F_N,$$

οπότε $F_N = \emptyset$, αντίφαση με την υπόθεση.

Και τώρα δύο ασκήσεις που δεν έχω προλάβει να γίνουν ακόμα αλλά θα ήθελα...

Εκφώνηση. *Υπολογίστε το*

$$(1+z)(1+z^2)\cdots(1+z^{2^{n-1}})$$

Εκφώνηση. *Έστω $a_0, a_1, \dots, a_n$ πραγματικοι αριθμοί τέτοιοι ώστε $0 < a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n$ και το πολυώνυμο $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$. Δείξτε οτι το P δεν έχει ρίζα στον ανοιχτό μοναδιαίο δίσκο $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.*

Υπόδειξη: Ίδια ιδέα με την αποπάνω.

2 13 Οκτωβρίου 2026

Εικόνες συνόλων, εκθετική και λογάριθμος. Συνέχεια και μιγαδική διαφορισιμότητα.

Εκφώνηση. *Να βρεθεί η εικόνα του συνόλου*

$$V = \{re^{i\theta} : 0 \le r \le 3/2,\ 0 \le \theta \le \pi/2\}$$

μέσω της $f(z) = z^3$.

Λύση. Για $z = re^{i\theta} \in V$ έχουμε

$$w = z^3 = r^3 e^{3i\theta}.$$

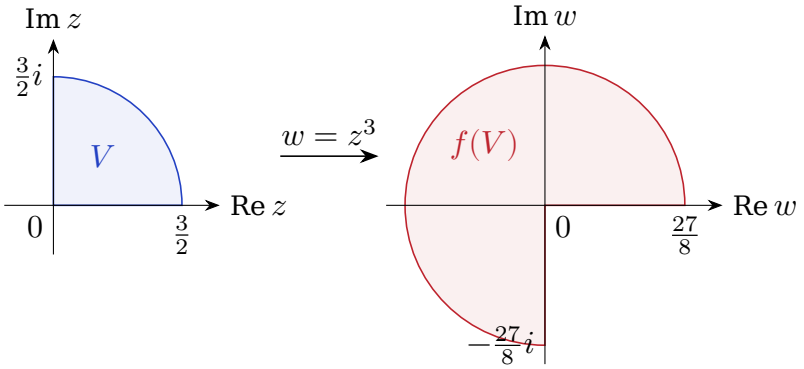
Θέτοντας $\rho = r^3$ και $\varphi = 3\theta$, παίρνουμε

$$0 \le \rho \le \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}, \qquad 0 \le \varphi \le \frac{3\pi}{2}.$$

Αντίστροφα, κάθε $w = \rho e^{i\varphi}$ με αυτές τις ιδιότητες έχει προεικόνα $z = \rho^{1/3} e^{i\varphi/3} \in V$. Επομένως

$$\boxed{f(V) = \{\rho e^{i\varphi} : 0 \le \rho \le 27/8,\ 0 \le \varphi \le 3\pi/2\}.}$$

Το σύνολο αυτό αποτελείται από τα τρία πρώτα κλειστά τεταρτημόρια του δίσκου ακτίνας $27/8$. Δεν περιέχει τα σημεία του ανοικτού τέταρτου τεταρτημορίου.



Σχήμα 7: Ο τομέας γωνίας $\pi/2$ μετατρέπεται σε τομέα γωνίας $3\pi/2$.

Εκφώνηση. *Να βρεθούν όλοι οι* $z \in \mathbb{C}$ *για τους οποίους* $e^z = 1 + i$.

Λύση. Γράφουμε $z = x + iy$, με $x, y \in \mathbb{R}$. Τότε

$$e^z = e^x e^{iy}, \qquad 1 + i = \sqrt{2} e^{i\pi/4}.$$

Συγκρίνοντας μέτρα και ορίσματα παίρνουμε

$$e^x = \sqrt{2}, \qquad y = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Η πρώτη σχέση ισοδυναμεί με $x = \ln\sqrt{2} = \frac{1}{2}\ln 2$. Άρα

$$\boxed{z = \frac{1}{2}\ln 2 + i\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right), \qquad k \in \mathbb{Z}.}$$

Κάθε τέτοιος αριθμός είναι πράγματι λύση, διότι

$$\exp\left(\frac{1}{2}\ln 2 + i\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right)\right) = \sqrt{2}e^{i\pi/4}e^{2\pi ik} = 1 + i.$$

Οι άπειρες λύσεις οφείλονται στην $2\pi i$-περιοδικότητα της μιγαδικής εκθετικής συνάρτησης.

Εκφώνηση. *Για $\theta \in \mathbb{R}$ να γραφεί στη μορφή $a + ib$ ο αριθμός*

$$Q = \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{\cos(3\theta) + i\sin(3\theta)}.$$

Λύση. Ο παρονομαστής έχει μέτρο 1, άρα δεν μηδενίζεται. Από τον τύπο του Euler,

$$\cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta}, \qquad \cos(3\theta) + i\sin(3\theta) = e^{3i\theta}.$$

Επομένως

$$Q = \frac{e^{-i\theta}}{e^{3i\theta}} = e^{-4i\theta} = \cos(4\theta) - i\sin(4\theta).$$

Άρα

$$\boxed{a = \cos(4\theta), \qquad b = -\sin(4\theta).}$$

Ο ίδιος υπολογισμός γίνεται αλγεβρικά: πολλαπλασιάζοντας με τον συζυγή του παρονομαστή βρίσκουμε

$$\begin{aligned} Q &= (\cos\theta - i\sin\theta)(\cos 3\theta - i\sin 3\theta) \\ &= \big(\cos\theta\cos 3\theta - \sin\theta\sin 3\theta\big) \\ &\quad - i\big(\sin\theta\cos 3\theta + \cos\theta\sin 3\theta\big) \\ &= \cos 4\theta - i\sin 4\theta. \end{aligned}$$

Εκφώνηση. *Να βρεθεί η εικόνα του*

$$S = \{re^{i\theta} : 1/2 < r < 1,\ -\pi < \theta < \pi\}$$

μέσω της $f(z) = \operatorname{Log} z$.

Λύση. Το S είναι ο ανοικτός δακτύλιος $1/2 < |z| < 1$ από τον οποίο έχει αφαιρεθεί το τμήμα του αρνητικού πραγματικού ημιάξονα. Επομένως βρίσκεται μέσα στο πεδίο ολομορφίας του κύριου λογαρίθμου.

Για $z = re^{i\theta} \in S$, η γωνία θ ανήκει στο $(-\pi, \pi)$, οπότε είναι ακριβώς το κύριο όρισμα του z. Άρα

$$w = \operatorname{Log} z = \ln r + i\theta.$$

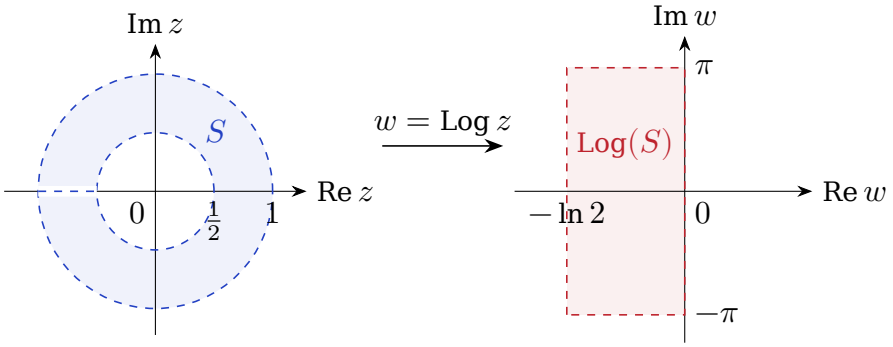
Αν $w = u + iv$, έχουμε $u = \ln r$, $v = \theta$. Η $\ln r$ είναι γνησίως αύξουσα για $r > 0$, και επομένως

$$\frac{1}{2} < r < 1 \iff -\ln 2 < u < 0, \qquad -\pi < v < \pi.$$

Αντίστροφα, για κάθε $w = u + iv$ με αυτές τις ανισότητες, ο αριθμός $z = e^u e^{iv}$ ανήκει στο S και $\operatorname{Log} z = w$. Έτσι

$$\boxed{\operatorname{Log}(S) = \{u + iv : -\ln 2 < u < 0,\ -\pi < v < \pi\}.}$$

Η εικόνα είναι ανοικτό ορθογώνιο. Τα κυκλικά σύνορα $r = 1/2$ και $r = 1$ αντιστοιχούν στις κατακόρυφες πλευρές $u = -\ln 2$ και $u = 0$. Οι δύο πλευρές της τομής κλάδου, $\theta \to \pi^-$ και $\theta \to -\pi^+$, αντιστοιχούν στις οριζόντιες πλευρές $v = \pi$ και $v = -\pi$. Κανένα από αυτά τα σύνορα δεν περιλαμβάνεται.



Σχήμα 8: Ο κύριος λογάριθμος μετατρέπει τον κομμένο δακτύλιο σε ανοικτό ορθογώνιο.

Εκφώνηση. *Να αποδειχθεί ότι οι $F(z) = \operatorname{Re} z$ και $G(z) = \overline{z}$ είναι συνεχείς σε όλο το $\mathbb{C}$ και δεν είναι μιγαδικά διαφορίσιμες σε κανένα σημείο.*

Συνέχεια

Για οποιαδήποτε $z, z_0 \in \mathbb{C}$ ισχύει

$$|F(z) - F(z_0)| = |\operatorname{Re}(z - z_0)| \le \sqrt{\operatorname{Re}^2(z - z_0) + \operatorname{Im}^2(z - z_0)} = |z - z_0|,$$

και

$$|G(z) - G(z_0)| = |\overline{z - z_0}| = |z - z_0|.$$

Έτσι, για κάθε $\varepsilon > 0$, η επιλογή $\delta = \varepsilon$ εξασφαλίζει ότι $|z - z_0| < \delta$ συνεπάγεται $|F(z) - F(z_0)| < \varepsilon$ και $|G(z) - G(z_0)| < \varepsilon$. Άρα και οι δύο συναρτήσεις είναι συνεχείς στο αυθαίρετο z_0.

Με την αρχή της μεταφοράς, οι ίδιες ανισότητες δείχνουν απευθείας ότι $z_n \to z_0$ συνεπάγεται $F(z_n) \to F(z_0)$ και $G(z_n) \to G(z_0)$.

1ος τρόπος μη διαφορισιμότητας: εξισώσεις Cauchy-Riemann

Για τη F, αν $z = x + iy$, τότε $u(x, y) = x$, $v(x, y) = 0$. Άρα

$$u_x = 1, \quad u_y = 0, \quad v_x = 0, \quad v_y = 0.$$

Η αναγκαία εξίσωση $u_x = v_y$ θα έδινε $1 = 0$, πράγμα αδύνατο. Επομένως η F δεν είναι μιγαδικά διαφορίσιμη πουθενά.

Για τη G έχουμε $G(x + iy) = x - iy$, άρα $u(x, y) = x$, $v(x, y) = -y$. Τότε $u_x = 1$ και $v_y = -1$, οπότε η ίδια αναγκαία εξίσωση θα έδινε $1 = -1$. Συνεπώς ούτε η G είναι μιγαδικά διαφορίσιμη σε κάποιο σημείο.

2ος τρόπος μη διαφορισιμότητας: προσέγγιση απο δύο κατευθυνσεις

Σταθεροποιούμε $z_0 \in \mathbb{C}$. Για τη F,

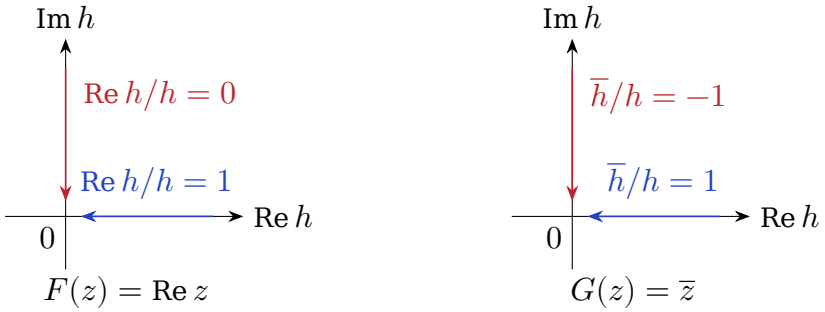
$$\frac{F(z_0 + h) - F(z_0)}{h} = \frac{\operatorname{Re} h}{h}.$$

Αν $h = t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, ο λόγος είναι 1. Αν $h = it$, με $t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, ο λόγος είναι 0. Επειδή οι δύο προσεγγίσεις του h στο 0 δίνουν διαφορετικά όρια, η παράγωγος $F'(z_0)$ δεν υπάρχει.

Για τη G,

$$\frac{G(z_0+h)-G(z_0)}{h} = \frac{\overline{h}}{h}.$$

Για $h = t$ ο λόγος είναι 1, ενώ για $h = it$ είναι -1. Άρα ούτε η $G'(z_0)$ υπάρχει. Το z_0 ήταν αυθαίρετο και στις δύο περιπτώσεις, οπότε η μη διαφορισιμότητα ισχύει σε όλο το $\mathbb{C}$.



Σχήμα 9: Οι οριζόντιες και κατακόρυφες αυξήσεις δίνουν διαφορετικά όρια του λόγου διαφορών.

Εκφώνηση. *[Μιγαδικός de l'Hospital]*

Έστω f, g μιγαδικά διαφορίσιμες στο z_0, με

$$f(z_0) = g(z_0) = 0, \qquad g'(z_0) \neq 0.$$

Να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Λύση. Από τον ορισμό της παραγώγου,

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \longrightarrow f'(z_0), \qquad \frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0} \longrightarrow g'(z_0) \neq 0.$$

Γράφουμε, κοντά στο z_0,

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}}{\dfrac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}}.$$

Παίρνοντας όρια στον αριθμητή και τον παρονομαστή βρίσκουμε

$$\boxed{\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.}$$

Παρατήρηση. Μπορούμε να γράψουμε το $\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}$ στον παρανομαστή γιατί κοντά στο z_0 θα είναι διάφορα το μηδεν.

Εφαρμογή 1: $\lim\limits_{z\to i}\dfrac{(z^2+1)^7}{z-i}$

Θέτουμε $f(z)=(z^2+1)^7$ και $g(z)=z-i$. Τότε $f(i)=g(i)=0$, ενώ $g'(i)=1$. Από τον κανόνα αλυσίδας,

$$f'(z)=7(z^2+1)^6\cdot 2z=14z(z^2+1)^6,$$

οπότε $f'(i)=0$. Άρα

$$\boxed{\lim_{z\to i}\frac{(z^2+1)^7}{z-i}=0.}$$

Εφαρμογή 2: $\lim_{z\to i}\frac{z^3+(1-3i)z^2+(i-3)z+2+i}{z-i}$

Θεωρούμε

$$f(z)=z^3+(1-3i)z^2+(i-3)z+2+i,\qquad g(z)=z-i.$$

Ελέγχουμε πρώτα ότι

$$f(i)=-i+(-1+3i)+(-1-3i)+2+i=0,\qquad g(i)=0.$$

Έχουμε $g'(i)=1$ και

$$\begin{aligned}f'(i)&=3i^2+2(1-3i)i+(i-3)\\&=-3+(6+2i)+(i-3)=3i.\end{aligned}$$

Επομένως

$$\boxed{\lim_{z\to i}\frac{z^3+(1-3i)z^2+(i-3)z+2+i}{z-i}=3i.}$$

Εφαρμογή 3: $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z}$

Για $f(z)=\sin z$, $g(z)=z$ έχουμε $f(0)=g(0)=0$, $f'(0)=\cos 0=1$ και $g'(0)=1$. Άρα

$$\boxed{\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=1.}$$

Αυτός είναι επίσης ο λόγος διαφορών της $\sin z$ στο 0.

Εφαρμογή 4: $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{e^z-1}{z}$

Ο αριθμητής μηδενίζεται στο 0 και η παράγωγός του εκεί είναι $e^0=1$. Επειδή η παράγωγος του παρονομαστή είναι 1, παίρνουμε

$$\boxed{\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}=1.}$$

Εφαρμογή 5: $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\operatorname{Log}(1+z)}{z}$

Για να χρησιμοποιήσουμε την παράγωγο του κύριου λογαρίθμου, ελέγχουμε το πεδίο ορισμού κοντά στο 0. Αν $|z| < 1/2$, τότε

$$\operatorname{Re}(1+z) \geq 1 - |z| > \frac{1}{2}.$$

Άρα το $1+z$ δεν συναντά την τομή κλάδου $(-\infty, 0]$. Η $f(z) = \operatorname{Log}(1+z)$ είναι επομένως ολόμορφη σε γειτονιά του 0, με

$$f(0) = \operatorname{Log} 1 = 0, \qquad f'(z) = \frac{1}{1+z}, \qquad f'(0) = 1.$$

Κατά συνέπεια,

$$\boxed{\lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{Log}(1+z)}{z} = 1.}$$

Εφαρμογή 6: $\lim\limits_{z\to i} \dfrac{1+iz}{z(z-i)}$

Θέτουμε $f(z) = 1+iz$ και $g(z) = z(z-i)$. Τότε $f(i) = g(i) = 0$ και

$$f'(i) = i, \qquad g'(z) = 2z - i, \qquad g'(i) = i \neq 0.$$

Επομένως

$$\boxed{\lim_{z\to i} \frac{1+iz}{z(z-i)} = \frac{i}{i} = 1.}$$

Εκφώνηση. *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοικτό και $f : U \to \mathbb{C}$ συνεχής που δεν μηδενίζει στο U. Υποθέτουμε ότι $g = f^2$ είναι ολόμορφη σε όλο το U. Να αποδειχθεί ότι η f είναι ολόμορφη στο U.*

Σταθεροποιούμε $z_0 \in U$ με $f(z_0) \neq 0$. Από τη συνέχεια,

$$f(z) + f(z_0) \longrightarrow 2f(z_0) \neq 0.$$

Επομένως το άθροισμα $f(z) + f(z_0)$ δεν μηδενίζεται σε μια αρκετά μικρή γειτονιά του z_0. Εκεί, για $z \neq z_0$, η διαφορά τετραγώνων δίνει

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{f(z)^2 - f(z_0)^2}{z - z_0} \cdot \frac{1}{f(z) + f(z_0)}.$$

Ο πρώτος παράγοντας τείνει στο $g'(z_0)$, ενώ ο δεύτερος στο $1/(2f(z_0))$. Άρα

$$\boxed{f'(z_0) = \frac{g'(z_0)}{2f(z_0)} = \frac{(f^2)'(z_0)}{2f(z_0)} \qquad (f(z_0) \neq 0).}$$

Εκφώνηση. *Θεωρούμε τη συνάρτηση*

$$f(z) = \exp\left(\frac{z-1}{z+1}\right), \qquad |z| < 1.$$

(i) Να δειχθεί ότι $|e^{\zeta}| \leq 1$ αν και μόνο αν $\operatorname{Re}\zeta \leq 0$ και να προσδιοριστεί η περίπτωση ισότητας.

(ii) Να δειχθεί ότι η f είναι ολόμορφη στον μοναδιαίο δίσκο.

(iii) Να δειχθεί ότι η f είναι φραγμένη εκεί.

(iv) Να εξεταστεί αν η f επεκτείνεται συνεχώς στον κλειστό μοναδιαίο δίσκο, με ιδιαίτερη προσοχή στο -1.

Λύση.

(i) Το μέτρο της μιγαδικής εκθετικής

Για $\zeta = x + iy$, με $x, y \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$e^{\zeta} = e^{x}(\cos y + i \sin y).$$

Επειδή $|\cos y + i \sin y| = 1$,

$$|e^{\zeta}| = e^{x} = e^{\operatorname{Re}\zeta}.$$

Η πραγματική εκθετική είναι γνησίως αύξουσα και $e^{0} = 1$. Άρα

$$\boxed{|e^{\zeta}| \leq 1 \iff \operatorname{Re}\zeta \leq 0, \qquad |e^{\zeta}| = 1 \iff \operatorname{Re}\zeta = 0.}$$

Αντίστοιχα, $|e^{\zeta}| < 1$ αν και μόνο αν $\operatorname{Re}\zeta < 0$.

(ii) Ολομορφία της f

Θέτουμε $q(z) = (z-1)/(z+1)$. Πρόκειται για ρητή συνάρτηση, η οποία είναι ολόμορφη σε κάθε σημείο όπου ο παρονομαστής δεν μηδενίζεται, δηλαδή στο $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$. Επειδή το -1 δεν ανήκει στον ανοικτό δίσκο $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$, η q είναι ολόμορφη στη $\mathbb{D}$.

Η εκθετική είναι ολόμορφη σε όλο το $\mathbb{C}$, οπότε η σύνθεση $f = \exp \circ q$ είναι ολόμορφη στη $\mathbb{D}$. Μάλιστα,

$$q'(z) = \frac{(z+1) - (z-1)}{(z+1)^2} = \frac{2}{(z+1)^2},$$

και επομένως

$$\boxed{f'(z) = \frac{2}{(z+1)^2} \exp\left(\frac{z-1}{z+1}\right), \qquad z \in \mathbb{D}.}$$

(iii) Η f είναι φραγμένη

Σύμφωνα με το πρώτο ερώτημα, αρκεί να ελέγξουμε το πραγματικό μέρος της q. Πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με $\overline{z} + 1$:

$$\begin{aligned} q(z) &= \frac{(z-1)(\overline{z}+1)}{|z+1|^2} \\ &= \frac{|z|^2 - 1 + z - \overline{z}}{|z+1|^2}. \end{aligned}$$

Η διαφορά $z - \overline{z}$ είναι καθαρά φανταστική. Άρα

$$\operatorname{Re} q(z) = \frac{|z|^2 - 1}{|z+1|^2}.$$

Για $|z| < 1$ ο αριθμητής είναι αρνητικός και ο παρονομαστής θετικός, οπότε $\operatorname{Re} q(z) < 0$. Επομένως

$$\boxed{0 < |f(z)| = \exp\left(\frac{|z|^2 - 1}{|z+1|^2}\right) < 1, \qquad z \in \mathbb{D}.}$$

Άρα η f είναι φραγμένη από το 1.

(iv) Συμπεριφορά πάνω στον μοναδιαίο κύκλο

Ο ίδιος τύπος ορίζει ολόμορφη συνάρτηση στο $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$. Άρα σε κάθε σημείο του κύκλου $|z| = 1$ διαφορετικό από το -1 η f επεκτείνεται συνεχώς, απλώς με τον ίδιο τύπο. Το μόνο σημείο που πρέπει να εξετάσουμε είναι το -1.

Παραμετροποιούμε τον κύκλο ως $z = e^{i\theta}$, με $-\pi < \theta < \pi$. Χρησιμοποιούμε τους τύπους

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Επομένως, όταν $\cos z \neq 0$, βγάζοντας κοινό παράγοντα το e^{-iz} στον αριθμητή και στον παρονομαστή, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \tan z = \frac{\sin z}{\cos z} &= \frac{1}{i}\,\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} \\ &= \frac{1}{i}\,\frac{e^{-iz}(e^{2iz} - 1)}{e^{-iz}(e^{2iz} + 1)} = -i\,\frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1}. \end{aligned}$$

Θέτοντας $z = \theta/2$, συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} + 1} = i \tan\frac{\theta}{2}, \qquad e^{i\theta} \neq -1.$$

Ο δεύτερος παράγοντας δεν μηδενίζεται για $-\pi < \theta < \pi$. Επομένως

$$\frac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} + 1} = i \tan\frac{\theta}{2},$$

και έτσι οι τιμές της φυσικής επέκτασης στον κύκλο είναι

$$\boxed{f(e^{i\theta}) = \exp\left(i \tan\frac{\theta}{2}\right), \qquad -\pi < \theta < \pi.}$$

Για την αντίθετη φορά παραμέτρησης, $z = e^{-i\theta}$, ο τύπος γίνεται $f(e^{-i\theta}) = \exp(-i\tan(\theta/2))$.

Όταν $\theta \to \pi^-$, η $\tan(\theta/2)$ τείνει στο $+\infty$. Το μέτρο της παραπάνω εκθετικής παραμένει 1, ενώ το όρισμά της μεγαλώνει απεριόριστα. Οι τιμές περιστρέφονται γύρω

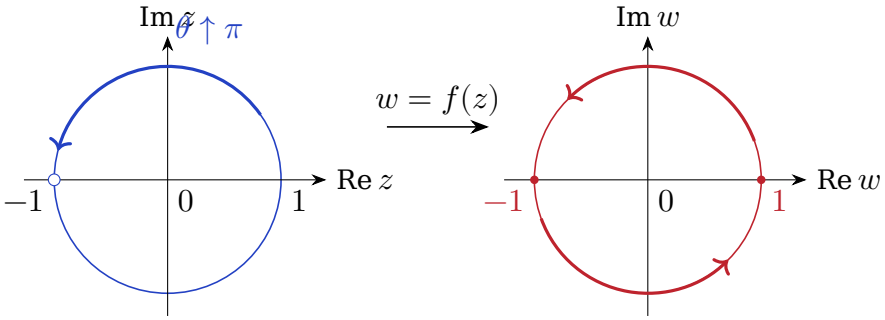
από τον μοναδιαίο κύκλο και δεν έχουν όριο. Για να το αποδείξουμε ”αυστηρά”, θέτουμε

$$\theta_n = 2\arctan(2\pi n), \qquad \varphi_n = 2\arctan((2n+1)\pi).$$

Τότε $\theta_n, \varphi_n \to \pi^-$, άρα $e^{i\theta_n}, e^{i\varphi_n} \to -1$, αλλά

$$f(e^{i\theta_n}) = e^{2\pi i n} = 1, \qquad f(e^{i\varphi_n}) = e^{i(2n+1)\pi} = -1.$$

Συνεπώς οι τιμές πάνω στον κύκλο δεν μπορούν να συμπληρωθούν συνεχώς στο -1.



Σχήμα 10: Καθώς το $e^{i\theta}$ πλησιάζει το -1, οι συνοριακές τιμές κάνουν άπειρες περιστροφές.