Μιγαδική Ανάλυση
3ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Μιγαδική παράγωγος – Ολομορφία – Αρχή μεγίστου – Επικαμπύλια ολοκληρώματα – Παράγουσες

Πρόβλημα 1 Να βρείτε τα σημεία στα οποία η συνάρτηση $f(z) = x^3 + y + i(-x - y^3 + 3y)$, $z = x + iy$, είναι μιγαδικά παραγωγίσιμη και να υπολογίσετε την παράγωγο. Υπάρχει ανοικτός δίσκος στον οποίο η f είναι ολόμορφη;

Πρόβλημα 2 Να βρείτε τα σημεία στα οποία η συνάρτηση $f(z) = \overline{z}e^{-|z|^2}$ είναι μιγαδικά παραγωγίσιμη και να υπολογίσετε την παράγωγο σε αυτά.

Πρόβλημα 3 Έστω $f(z) = z^3$ και

$$z_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \qquad z_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Να δείξετε ότι δεν υπάρχει $z_0 \in [z_1, z_2]$ τέτοιο ώστε $f(z_2) - f(z_1) = f'(z_0)(z_2 - z_1)$.

Πρόβλημα 4 (i) Έστω $x_0 < 0$. Να δείξετε ότι δεν υπάρχει $\lim_{w \to x_0} \operatorname{Log} w$, με το όριο να λαμβάνεται στο πεδίο ορισμού του κύριου λογαρίθμου $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

(ii) Να δείξετε ότι δεν υπάρχει ολόμορφη $f = u + iv : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ τέτοια ώστε $u(x, y) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$.

Πρόβλημα 5 Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ στο οποίο η συνάρτηση

$$F(z) = \operatorname{Log}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

είναι ορισμένη και ολόμορφη. Ο κύριος λογάριθμος θεωρείται ορισμένος στο $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

Πρόβλημα 6 Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ χωρίο και f αναλυτική στο U. Αν υπάρχει $z_0 \in U$ με $|f(z_0)| \geq |f(z)|$ για κάθε $z \in U$, να δείξετε ότι η f είναι σταθερή στο U.

Πρόβλημα 7 Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_\gamma ze^{z^2}\,dz$ στις περιπτώσεις:

(i) Από το i στο $2 - i$, κατά μήκος ευθύγραμμου τμήματος.

(ii) Από το 0 στο $1 + i$, κατά μήκος της παραβολής $y = x^2$.

Πρόβλημα 8 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

$$(\alpha)\ \int_1^2 \left(\frac{1}{t} - i\right)^2 dt, \quad (\beta)\ \int_0^{\pi/6} e^{2it}\,dt, \quad (\gamma)\ \int_0^\infty e^{-zt}\,dt \quad (\mathcal{R}e(z) > 0).$$

Πρόβλημα 9 Να υπολογίσετε, για κάθε $m, n \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{imt}\overline{e^{int}}\,dt.$$

Πρόβλημα 10 Να υπολογίσετε τα παρακάτω επικαμπύλια ολοκληρώματα:

(i) $\int_\Gamma (1 + z^2)\,dz$, όπου Γ είναι το άνω ημικύκλιο $|z| = 1$, από το -1 στο 1.

(ii) $\int_\Gamma e^z\,dz$, όπου Γ είναι το ευθύγραμμο τμήμα από το 1 στο i.

(iii) $\int_\Gamma z^3\,dz$, όπου Γ είναι η τεθλασμένη από το 1 στο 0 και κατόπιν στο i. Να δώσετε και μια παραμετροποίηση της Γ.

Πρόβλημα 11 Να αποδείξετε ότι

$$\left| \int_\gamma \frac{e^{iz}}{z^2}\, dz \right| \leq \pi, \qquad \gamma(t) = e^{it}, \quad 0 \leq t \leq \pi,$$

και

$$\left| \int_\eta \frac{dz}{\overline{z}^2 + \overline{z} + 1} \right| \leq \frac{3\pi}{10}, \qquad \eta(t) = 3e^{it}, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Πρόβλημα 12 Έστω f αναλυτική στον δίσκο $D(0,1)$ και συνεχής στον κλειστό μοναδιαίο δίσκο. Αν $f(0) = -i$ και $|f(z)| > 1$ για κάθε $|z| = 1$, να δείξετε ότι η f έχει τουλάχιστον ένα μηδενικό στον $D(0,1)$.

Πρόβλημα 13 Έστω $U \subset \mathbb{C}$ χωρίο και $f : U \to \mathbb{C}$ ολόμορφη μη σταθερή συνάρτηση τέτοια ώστε $\mathcal{R}ef(z) \geq 0$ για κάθε $z \in U$. Να δείξετε ότι $\mathcal{R}ef(z) > 0$ για κάθε $z \in U$.

Παραδίδετε 6 Προβλήματα έως 26–10–2026.