Πανεπιστήμιο Κρήτης
Τμήμα Μαθηματικών
και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Χειμερινό Εξάμηνο 2026-2027
Θ. Γαρεφαλάκης

ΒΙΟ-101.1 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ
Φυλλάδιο Ασκήσεων 2

Άσκηση 2.1: Λύστε τα παρακάτω ομογενή συστήματα και δώστε τη λύση σε διανυσματική μορφή (γενική παραμετρική λύση).

1. $$\begin{cases} -x_1 + 2x_3 + 5x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} x + 2z = 0 \\ 2x + 2y + 3z = 0 \\ 3x + 2y + 5z = 0 \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} 2x + 2y + 5z + 3w = 0 \\ 6x + y + 5z + 4w = 0 \\ 4x - y + w = 0 \end{cases}$$

Άσκηση 2.2: Να λυθούν τα μη-ομογενή γραμμικά συστήματα με τους ακόλουθους επαυξημένους πίνακες:

1. $$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

2. $$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 5 & 9 \end{array}\right)$$

3. $$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 5 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

4. $$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

Μπορείτε να δώσετε τη γενική διανυσματική λύση των αντίστοιχων ομογενών χωρίς να λύσετε ξανά τα συστήματα;

Άσκηση 2.3: Βρείτε για ποιες τιμές των παραμέτρων $a, b \in \mathbb{R}$, καθένα από τα παρακάτω συστήματα: (i) δεν έχει λύση, (ii) έχει άπειρες λύσεις, (iii) έχει μοναδική λύση. Λύστε το σύστημα στις δύο τελευταίες περιπτώσεις.

1. $$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ ax + z = b \\ x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} x + y + z = a \\ x - y = 0 \\ 3x + y + bz = 0 \end{cases}$$

Άσκηση 2.4: Βρείτε ποια σχέση πρέπει να ικανοποιούν τα $a, b, c \in \mathbb{R}$, ώστε το παρακάτω σύστημα να έχει λύση.

$$\begin{cases} x - z = a \\ -x + y = b \\ -2x + y + z = c \end{cases}$$

Άσκηση 2.5: Βρείτε γραμμικούς συνδυασμούς των διανυσμάτων

$$(3,-1,2), \quad (1,-1,4), \quad (2,0,-1)$$

ώστε:
1. Η πρώτη συνιστώσα να είναι 2,
2. Η πρώτη συνιστώσα να είναι 2 και η δεύτερη -2,
3. Η πρώτη συνιστώσα να είναι 2 και η δεύτερη 2.

Είναι αυτά τα αποτελέσματα μοναδικά;

Άσκηση 2.6: Εξετάστε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς και ποιες είναι ψευδείς. Όλες οι προτάσεις αναφέρονται σε ένα σύστημα $Ax = b$, όπου $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$.
1. Εάν $m > n$ και $b \neq 0$, το σύστημα είναι αδύνατο.
2. Εάν $m < n$ το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.
3. Εάν $m < n$ και $b = 0$, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.
4. Εάν το σύστημα $Ax = 0$ έχει άπειρες λύσεις, τότε και το σύστημα $Ax = b$ έχει άπειρες λύσεις.
5. Εάν το σύστημα $Ax = b$ έχει άπειρες λύσεις, τότε και το $Ax = 0$ έχει άπειρες λύσεις.
6. Εάν το σύστημα $Ax = b$ έχει μοναδική λύση, τότε και το σύστημα $Ax = 0$ έχει μοναδική λύση.
7. Εάν το σύστημα $Ax = 0$ έχει μοναδική λύση, τότε και το σύστημα $Ax = b$ έχει μοναδική λύση.

Άσκηση 2.7: Εξετάστε αν οι παρακάτω πίνακες έχουν αντίστροφο και αν ναι υπολογίστε τον.

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 2.8: Αν A ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

της προηγούμενης άσκησης, λύστε το σύστημα $Ax = b$ όπου $b = (1,2,3,4)^\top$ κάνοντας χρήση του αντιστρόφου A^{-1} που βρήκατε στην προηγούμενη άσκηση.

Άσκηση 2.9: Έστω ότι γνωρίζετε ότι ένας πληθυσμός εξελίσσεται σύμφωνα με την ακολουθία που ορίζεται αναδρομικά:

$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3}, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 2$$

Ορίζουμε τα διανύσματα

$$v_n = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix}, \quad n = 2,3,4,\ldots$$

1. Βρείτε πίνακα $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ τέτοιο ώστε
$$v_n = Av_{n-1}, \quad \text{για κάθε } n = 3,4,\ldots$$
2. Παρατηρήστε ότι $v_n = A^{n-2}v_2$ για $n = 2,3,\ldots$
3. Υπολογίστε το v_{100} και από αυτό το a_{100} (χρησιμοποιήστε υπολογιστή!).