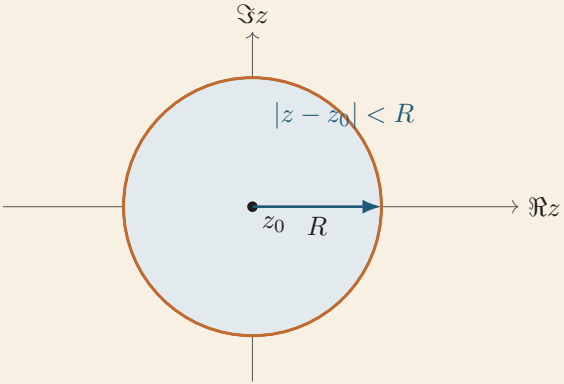
Δυναμοσειρές
και αναλυτικές συναρτήσεις



από σειρές αριθμών σε τοπική γεωμετρία στο μιγαδικό επίπεδο

Σειρές μιγαδικών αριθμών

Για μια σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

θέτουμε

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} z_n.$$

Σειρές μιγαδικών αριθμών

Για μια σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

θέτουμε

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} z_n.$$

Λέμε ότι συγκλίνει στο $S \in \mathbb{C}$ αν

$$S_N \to S.$$

Σειρές μιγαδικών αριθμών

Για μια σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

θέτουμε

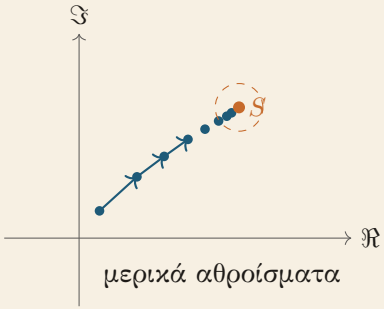
$$S_N = \sum_{n=1}^{N} z_n.$$

Λέμε ότι συγκλίνει στο $S \in \mathbb{C}$ αν

$$S_N \to S.$$

Αν $z_n = x_n + iy_n$, τότε

$$\sum z_n \text{ συγκλίνει} \iff \sum x_n, \sum y_n \text{ συγκλίνουν.}$$



Κριτήριο σύγκρισης

Πρόταση

Αν

$$|z_n| \leq c_n, \qquad c_n \geq 0,$$

και

$$\sum c_n < \infty,$$

τότε

$$\sum z_n$$

συγκλίνει απολύτως.

Κριτήριο σύγκρισης

Πρόταση

Αν

$$|z_n| \leq c_n, \qquad c_n \geq 0,$$

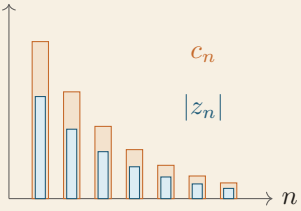
και

$$\sum c_n < \infty,$$

τότε

$$\sum z_n$$

συγκλίνει απολύτως.



Ομοιόμορφη σύγκλιση

Για $f_n : E \to \mathbb{C}$,

$$f_n \to f \quad \text{ομοιόμορφα στο } E$$

σημαίνει ότι

$$\|f_n - f\|_{\infty,E} \to 0,$$

όπου

$$\|g\|_{\infty,E} = \sup_{z \in E} |g(z)|.$$

Ομοιόμορφη σύγκλιση

Για $f_n : E \to \mathbb{C}$,

$$f_n \to f \quad \text{ομοιόμορφα στο } E$$

σημαίνει ότι

$$\|f_n - f\|_{\infty,E} \to 0,$$

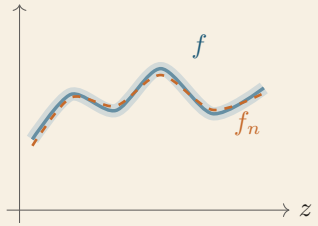
όπου

$$\|g\|_{\infty,E} = \sup_{z\in E} |g(z)|.$$

Ισοδύναμα:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \ n \geq N \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$$

για όλα τα $z \in E$.



ίδιο N για όλα τα σημεία

Κριτήριο Weierstrass

Θεώρημα

Αν

$$|f_n(z)| \le M_n \quad (z \in E), \qquad \sum M_n < \infty,$$

τότε

$$\sum f_n(z)$$

συγκλίνει απολύτως και ομοιόμορφα στο E.

Κριτήριο Weierstrass

Θεώρημα

Αν

$$|f_n(z)| \le M_n \quad (z \in E), \qquad \sum M_n < \infty,$$

τότε

$$\sum f_n(z)$$

συγκλίνει απολύτως και ομοιόμορφα στο E.

Απόδειξη.

Για $m > n$, αν $S_N = \sum_{k=1}^{N} f_k$, τότε

$$\|S_m - S_n\|_{\infty,E} \le \sum_{k=n+1}^{m} \|f_k\|_{\infty,E} \le \sum_{k=n+1}^{m} M_k.$$

Κριτήριο Weierstrass

Θεώρημα

Αν

$$|f_n(z)| \le M_n \quad (z \in E), \qquad \sum M_n < \infty,$$

τότε

$$\sum f_n(z)$$

συγκλίνει απολύτως και ομοιόμορφα στο E.

Απόδειξη.

Για $m > n$, αν $S_N = \sum_{k=1}^{N} f_k$, τότε

$$\|S_m - S_n\|_{\infty,E} \le \sum_{k=n+1}^{m} \|f_k\|_{\infty,E} \le \sum_{k=n+1}^{m} M_k.$$

Η δεξιά πλευρά τείνει στο 0, επειδή $\sum M_k$ συγκλίνει. Άρα τα S_N είναι Cauchy για τη νόρμα sup και συγκλίνουν ομοιόμορφα. □

Ομοιόμορφο όριο συνεχών συναρτήσεων

Θεώρημα

Αν οι f_n είναι συνεχείς στο E και

$$f_n \to f$$

ομοιόμορφα στο E, τότε η f είναι συνεχής.

Ομοιόμορφο όριο συνεχών συναρτήσεων

Θεώρημα

Αν οι f_n είναι συνεχείς στο E και

$$f_n \to f$$

ομοιόμορφα στο E, τότε η f είναι συνεχής.

Απόδειξη.

Έστω $\alpha \in E$ και $\varepsilon > 0$. Από την ομοιόμορφη σύγκλιση, παίρνουμε n ώστε

$$\|f - f_n\|_{\infty,E} < \varepsilon.$$

Ομοιόμορφο όριο συνεχών συναρτήσεων

Θεώρημα

Αν οι f_n είναι συνεχείς στο E και

$$f_n \to f$$

ομοιόμορφα στο E, τότε η f είναι συνεχής.

Απόδειξη.

Έστω $\alpha \in E$ και $\varepsilon > 0$. Από την ομοιόμορφη σύγκλιση, παίρνουμε n ώστε

$$\|f - f_n\|_{\infty,E} < \varepsilon.$$

Από τη συνέχεια της f_n στο α, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$|z - \alpha| < \delta \Rightarrow |f_n(z) - f_n(\alpha)| < \varepsilon.$$

Ομοιόμορφο όριο συνεχών συναρτήσεων

Θεώρημα

Αν οι f_n είναι συνεχείς στο E και

$$f_n \to f$$

ομοιόμορφα στο E, τότε η f είναι συνεχής.

Απόδειξη.

Έστω $\alpha \in E$ και $\varepsilon > 0$. Από την ομοιόμορφη σύγκλιση, παίρνουμε n ώστε

$$\|f - f_n\|_{\infty,E} < \varepsilon.$$

Από τη συνέχεια της f_n στο α, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$|z - \alpha| < \delta \Rightarrow |f_n(z) - f_n(\alpha)| < \varepsilon.$$

Άρα

$$\begin{aligned} |f(z) - f(\alpha)| &\leq |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(\alpha)| + |f_n(\alpha) - f(\alpha)| \\ &< 3\varepsilon. \end{aligned}$$

□

Η βασική εφαρμογή στις δυναμοσειρές

Πρόταση

Αν

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n < \infty,$$

τότε η σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

συγκλίνει απολύτως και ομοιόμορφα στον κλειστό δίσκο

$$|z| \leq r.$$

Η βασική εφαρμογή στις δυναμοσειρές

Πρόταση

Αν

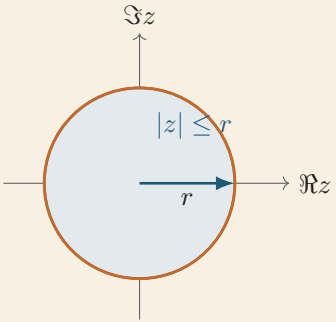
$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n < \infty,$$

τότε η σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

συγκλίνει απολύτως και ομοιόμορφα στον κλειστό δίσκο

$$|z| \leq r.$$



Απόδειξη.

Για $|z| \leq r$,

$$|a_n z^n| \leq |a_n| r^n.$$

Το αποτέλεσμα ακολουθεί από το κριτήριο Weierstrass. □

lim sup και κριτήριο ρίζας

Αν

$$L = \limsup x_n,$$

τότε για κάθε $\varepsilon > 0$:

lim sup και κριτήριο ρίζας

Αν

$$L = \limsup x_n,$$

τότε για κάθε $\varepsilon > 0$:

$$x_n < L + \varepsilon \quad \text{τελικά},$$

lim sup και κριτήριο ρίζας

Αν

$$L = \limsup x_n,$$

τότε για κάθε $\varepsilon > 0$:

$$x_n < L + \varepsilon \quad \text{τελικά},$$

και

$$x_n > L - \varepsilon \quad \text{για άπειρα πολλά } n.$$

lim sup και κριτήριο ρίζας

Αν

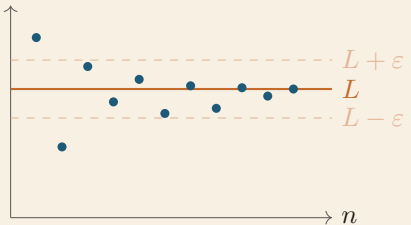
$$L = \limsup x_n,$$

τότε για κάθε $\varepsilon > 0$:

$$x_n < L + \varepsilon \quad \text{τελικά},$$

και

$$x_n > L - \varepsilon \quad \text{για άπειρα πολλά } n.$$



πάνω όριο συσσώρευσης

Για σειρές:

$\limsup |c_n|^{1/n} < 1 \Rightarrow \sum c_n$ συγκλίνει απόλυτα.

Μιγαδική δυναμοσειρά: από διάστημα σε δίσκο

Μια μιγαδική δυναμοσειρά με κέντρο z_0 είναι

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Μιγαδική δυναμοσειρά: από διάστημα σε δίσκο

Μια μιγαδική δυναμοσειρά με κέντρο z_0 είναι

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Για κάθε σταθερό z, είναι απλώς μια σειρά μιγαδικών αριθμών.

Μιγαδική δυναμοσειρά: από διάστημα σε δίσκο

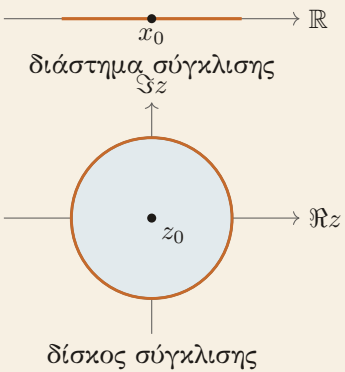
Μια μιγαδική δυναμοσειρά με κέντρο z_0 είναι

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Για κάθε σταθερό z, είναι απλώς μια σειρά μιγαδικών αριθμών.

πραγματική περίπτωση: διάστημα

μιγαδική περίπτωση: δίσκος



Cauchy–Hadamard

Θεώρημα

Για

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

θέτουμε

$$\boxed{\frac{1}{R} = \limsup_{n \to \infty} |a_n|^{1/n}}$$

με $1/0 = \infty$, $1/\infty = 0$.

Cauchy–Hadamard

Θεώρημα

Για

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

θέτουμε

$$\boxed{\frac{1}{R} = \limsup_{n \to \infty} |a_n|^{1/n}}$$

με $1/0 = \infty$, $1/\infty = 0$. Τότε

$$|z - z_0| < R \Rightarrow \text{απόλυτη σύγκλιση},$$

$$|z - z_0| > R \Rightarrow \text{απόκλιση}.$$

Cauchy–Hadamard

Θεώρημα

Για

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

θέτουμε

$$\boxed{\frac{1}{R} = \limsup_{n \to \infty} |a_n|^{1/n}}$$

με $1/0 = \infty$, $1/\infty = 0$. Τότε

$$|z - z_0| < R \Rightarrow \text{απόλυτη σύγκλιση},$$

$$|z - z_0| > R \Rightarrow \text{απόκλιση}.$$

Για κάθε $r < R$, η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη στον $|z - z_0| \leq r$.

Απόδειξη Cauchy–Hadamard: το εσωτερικό

Θέτουμε

$$L = \limsup |a_n|^{1/n}.$$

Απόδειξη Cauchy–Hadamard: το εσωτερικό

Θέτουμε

$$L = \limsup |a_n|^{1/n}.$$

Για σταθερό z,

$$\limsup |a_n (z - z_0)^n|^{1/n} = L|z - z_0|.$$

Απόδειξη Cauchy–Hadamard: το εσωτερικό

Θέτουμε

$$L = \limsup |a_n|^{1/n}.$$

Για σταθερό z,

$$\limsup |a_n (z - z_0)^n|^{1/n} = L|z - z_0|.$$

Αν

$$L|z - z_0| < 1,$$

τότε από το κριτήριο ρίζας η σειρά συγκλίνει απόλυτα.

Απόδειξη Cauchy–Hadamard: το εσωτερικό

Θέτουμε

$$L = \limsup |a_n|^{1/n}.$$

Για σταθερό z,

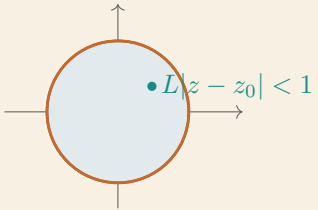
$$\limsup |a_n (z - z_0)^n|^{1/n} = L|z - z_0|.$$

Αν

$$L|z - z_0| < 1,$$

τότε από το κριτήριο ρίζας η σειρά συγκλίνει απόλυτα. Άρα η σύγκλιση ισχύει για

$$|z - z_0| < \frac{1}{L} = R.$$



Απόδειξη Cauchy–Hadamard: έξω και ομοιόμορφα

Αν

$$L|z - z_0| > 1,$$

τότε οι όροι $a_n(z - z_0)^n$ δεν τείνουν στο 0 για άπειρα πολλά n. Άρα η σειρά αποκλίνει.

Απόδειξη Cauchy–Hadamard: έξω και ομοιόμορφα

Αν

$$L|z - z_0| > 1,$$

τότε οι όροι $a_n(z - z_0)^n$ δεν τείνουν στο 0 για άπειρα πολλά n. Άρα η σειρά αποκλίνει. Για την ομοιόμορφη σύγκλιση, αν

$$r < R,$$

επιλέγουμε

$$r < \rho < R.$$

Απόδειξη Cauchy–Hadamard: έξω και ομοιόμορφα

Αν

$$L|z - z_0| > 1,$$

τότε οι όροι $a_n(z - z_0)^n$ δεν τείνουν στο 0 για άπειρα πολλά n. Άρα η σειρά αποκλίνει. Για την ομοιόμορφη σύγκλιση, αν

$$r < R,$$

επιλέγουμε

$$r < \rho < R.$$

Τελικά

$$|a_n|^{1/n} < \frac{1}{\rho},$$

οπότε για $|z - z_0| \leq r$,

$$|a_n(z - z_0)^n| \leq \left(\frac{r}{\rho}\right)^n.$$

Απόδειξη Cauchy–Hadamard: έξω και ομοιόμορφα

Αν

$$L|z - z_0| > 1,$$

τότε οι όροι $a_n(z - z_0)^n$ δεν τείνουν στο 0 για άπειρα πολλά n. Άρα η σειρά αποκλίνει. Για την ομοιόμορφη σύγκλιση, αν

$$r < R,$$

επιλέγουμε

$$r < \rho < R.$$

Τελικά

$$|a_n|^{1/n} < \frac{1}{\rho},$$

οπότε για $|z - z_0| \leq r$,

$$|a_n(z - z_0)^n| \leq \left(\frac{r}{\rho}\right)^n.$$

Η δεξιά πλευρά είναι γεωμετρική σειρά.

Παράδειγμα: γιατί χρειαζόμαστε $\limsup$

Θεωρούμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad a_n = \begin{cases} 2^n, & n \text{ άρτιος}, \\ 2^{-n}, & n \text{ περιττός}. \end{cases}$$

Παράδειγμα: γιατί χρειαζόμαστε $\limsup$

Θεωρούμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad a_n = \begin{cases} 2^n, & n \text{ άρτιος}, \\ 2^{-n}, & n \text{ περιττός}. \end{cases}$$

Τότε

$$|a_n|^{1/n} = \begin{cases} 2, & n \text{ άρτιος}, \\ 1/2, & n \text{ περιττός}. \end{cases}$$

Παράδειγμα: γιατί χρειαζόμαστε lim sup

Θεωρούμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad a_n = \begin{cases} 2^n, & n \text{ άρτιος}, \\ 2^{-n}, & n \text{ περιττός}. \end{cases}$$

Τότε

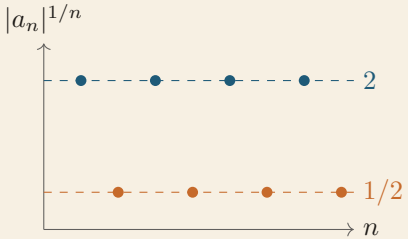
$$|a_n|^{1/n} = \begin{cases} 2, & n \text{ άρτιος}, \\ 1/2, & n \text{ περιττός}. \end{cases}$$

Δεν υπάρχει όριο, αλλά

$$\limsup |a_n|^{1/n} = 2.$$

Άρα

$$\boxed{R = \frac{1}{2}.}$$



δύο υποακολουθίες

Πράξεις με δυναμοσειρές

Αν

$$f(z) = \sum a_n (z - z_0)^n, \qquad g(z) = \sum b_n (z - z_0)^n,$$

τότε στο κοινό εσωτερικό των δίσκων σύγκλισης:

Πράξεις με δυναμοσειρές

Αν

$$f(z) = \sum a_n (z - z_0)^n, \qquad g(z) = \sum b_n (z - z_0)^n,$$

τότε στο κοινό εσωτερικό των δίσκων σύγκλισης:

$$f + g = \sum (a_n + b_n)(z - z_0)^n.$$

Πράξεις με δυναμοσειρές

Αν

$$f(z) = \sum a_n (z - z_0)^n, \qquad g(z) = \sum b_n (z - z_0)^n,$$

τότε στο κοινό εσωτερικό των δίσκων σύγκλισης:

$$f + g = \sum (a_n + b_n)(z - z_0)^n.$$

Για το γινόμενο:

$$fg = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \qquad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Πράξεις με δυναμοσειρές

Αν

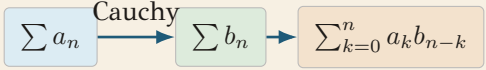
$$f(z) = \sum a_n (z - z_0)^n, \qquad g(z) = \sum b_n (z - z_0)^n,$$

τότε στο κοινό εσωτερικό των δίσκων σύγκλισης:

$$f + g = \sum (a_n + b_n)(z - z_0)^n.$$

Για το γινόμενο:

$$fg = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \qquad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$



Πηλίκο.

Πηλίκο. Αν

$$g(z_0) \neq 0,$$

τότε

$$\frac{1}{g(z)}$$

έχει ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά κοντά στο z_0.

Πηλίκο και σύνθεση

Πηλίκο. Αν

$$g(z_0) \neq 0,$$

τότε

$$\frac{1}{g(z)}$$

έχει ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά κοντά στο z_0. Ιδέα:

$$g(z) = b_0(1 + h(z)), \quad h(z_0) = 0,$$

και για $|h| < 1$,

$$\frac{1}{1+h} = 1 - h + h^2 - \cdots .$$

Σύνθεση.

Πηλίκο και σύνθεση

Πηλίκο. Αν

$$g(z_0) \neq 0,$$

τότε

$$\frac{1}{g(z)}$$

έχει ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά κοντά στο z_0. Ιδέα:

$$g(z) = b_0(1 + h(z)), \quad h(z_0) = 0,$$

και για $|h| < 1$,

$$\frac{1}{1+h} = 1 - h + h^2 - \cdots .$$

Σύνθεση. Αν

$$f(w) = \sum a_n (w - w_0)^n, \qquad g(z_0) = w_0,$$

τότε για z κοντά στο z_0,

$$f(g(z)) = \sum a_n (g(z) - w_0)^n.$$

Πηλίκο και σύνθεση

Πηλίκο. Αν

$$g(z_0) \neq 0,$$

τότε

$$\frac{1}{g(z)}$$

έχει ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά κοντά στο z_0. Ιδέα:

$$g(z) = b_0(1 + h(z)), \quad h(z_0) = 0,$$

και για $|h| < 1$,

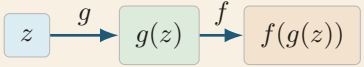
$$\frac{1}{1+h} = 1 - h + h^2 - \cdots.$$

Σύνθεση. Αν

$$f(w) = \sum a_n (w - w_0)^n, \qquad g(z_0) = w_0,$$

τότε για z κοντά στο z_0,

$$f(g(z)) = \sum a_n (g(z) - w_0)^n.$$



Αναλυτική συνάρτηση

Ορισμός

Η f είναι *αναλυτική στο* z_0 αν υπάρχουν $r > 0$ και $a_n \in \mathbb{C}$ ώστε

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n}$$

για κάθε

$$|z - z_0| < r.$$

Αναλυτική συνάρτηση

Ορισμός

Η f είναι *αναλυτική στο* z_0 αν υπάρχουν $r > 0$ και $a_n \in \mathbb{C}$ ώστε

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

για κάθε

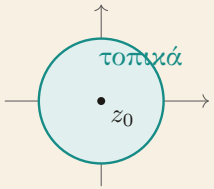
$$|z - z_0| < r.$$

Από τις πράξεις με δυναμοσειρές:

f, g αναλυτικές $\Rightarrow f + g, fg$ αναλυτικές,

$\frac{f}{g}$ αναλυτική όπου $g \neq 0$,

$f \circ g$ αναλυτική.



Αλλαγή κέντρου: δήλωση χωρίς απόδειξη

Θεώρημα

Αν

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

έχει ακτίνα σύγκλισης $R > 0$, τότε η f είναι αναλυτική σε κάθε σημείο του δίσκου

$$D(z_0, R).$$

Αλλαγή κέντρου: δήλωση χωρίς απόδειξη

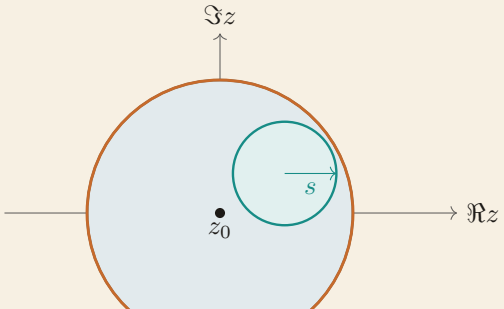
Θεώρημα

Αν

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

έχει ακτίνα σύγκλισης $R > 0$, τότε η f είναι αναλυτική σε κάθε σημείο του δίσκου

$$D(z_0, R).$$



Παράδειγμα Lang: $z^2/(z+2)$ γύρω από 1

Θέλουμε όρους μέχρι τρίτου βαθμού για

$$f(z) = \frac{z^2}{z+2}$$

γύρω από

$$z_0 = 1.$$

Παράδειγμα Lang: $z^2/(z+2)$ γύρω από 1

Θέλουμε όρους μέχρι τρίτου βαθμού για

$$f(z) = \frac{z^2}{z+2}$$

γύρω από

$$z_0 = 1.$$

Θέτουμε

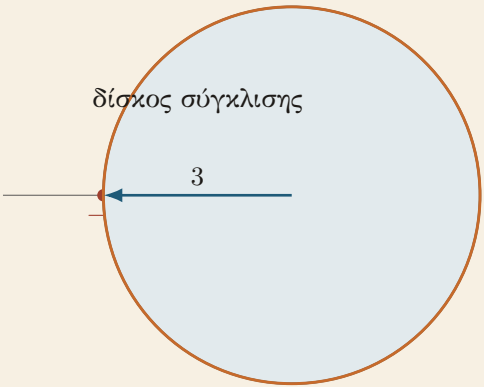
$$w = z - 1, \qquad z = 1 + w.$$

Τότε

$$z^2 = 1 + 2w + w^2,$$

και

$$z + 2 = 3 + w = 3\left(1 + \frac{w}{3}\right).$$



Παράδειγμα Lang: ο υπολογισμός

Για $|w| < 3$,

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{3}\frac{1}{1+w/3} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{w}{3} + \frac{w^2}{9} - \frac{w^3}{27} + \cdots\right).$$

Παράδειγμα Lang: ο υπολογισμός

Για $|w| < 3$,

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{3}\frac{1}{1+w/3} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{w}{3} + \frac{w^2}{9} - \frac{w^3}{27} + \cdots\right).$$

Άρα

$$\begin{aligned}\frac{z^2}{z+2} &= \frac{1}{3}(1 + 2w + w^2)\left(1 - \frac{w}{3} + \frac{w^2}{9} - \frac{w^3}{27} + \cdots\right) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{5}{9}w + \frac{4}{27}w^2 - \frac{4}{81}w^3 + \cdots.\end{aligned}$$

Παράδειγμα Lang: ο υπολογισμός

Για $|w| < 3$,

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{3}\frac{1}{1+w/3} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{w}{3} + \frac{w^2}{9} - \frac{w^3}{27} + \cdots\right).$$

Άρα

$$\begin{aligned}\frac{z^2}{z+2} &= \frac{1}{3}(1+2w+w^2)\left(1 - \frac{w}{3} + \frac{w^2}{9} - \frac{w^3}{27} + \cdots\right) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{5}{9}w + \frac{4}{27}w^2 - \frac{4}{81}w^3 + \cdots.\end{aligned}$$

Επιστρέφοντας στο z,

$$\boxed{\frac{z^2}{z+2} = \frac{1}{3} + \frac{5}{9}(z-1) + \frac{4}{27}(z-1)^2 - \frac{4}{81}(z-1)^3 + \cdots}$$

για $|z-1| < 3$.

Παραγώγιση δυναμοσειρών: δήλωση χωρίς απόδειξη

Θεώρημα

Αν

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

έχει ακτίνα σύγκλισης $R > 0$, τότε

$$\boxed{f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}}$$

για $|z - z_0| < R$.

Παραγώγιση δυναμοσειρών: δήλωση χωρίς απόδειξη

Θεώρημα

Αν

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

έχει ακτίνα σύγκλισης $R > 0$, τότε

$$\boxed{f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}}$$

για $|z - z_0| < R$. Η παράγωγος σειρά έχει την ίδια ακτίνα σύγκλισης.

Παραγώγιση δυναμοσειρών: δήλωση χωρίς απόδειξη

Θεώρημα

Αν

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

έχει ακτίνα σύγκλισης $R > 0$, τότε

$$\boxed{f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}}$$

για $|z - z_0| < R$. Η παράγωγος σειρά έχει την ίδια ακτίνα σύγκλισης.

Άρα κάθε αναλυτική συνάρτηση είναι ολόμορφη.

Συντελεστές Taylor

Παραγωγίζοντας επανειλημμένα:

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(z-z_0)^{n-k}.$$

Συντελεστές Taylor

Παραγωγίζοντας επανειλημμένα:

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(z-z_0)^{n-k}.$$

Θέτοντας $z = z_0$, μένει μόνο ο όρος $n = k$:

$$f^{(k)}(z_0) = k!a_k.$$

Συντελεστές Taylor

Παραγωγίζοντας επανειλημμένα:

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(z-z_0)^{n-k}.$$

Θέτοντας $z = z_0$, μένει μόνο ο όρος $n = k$:

$$f^{(k)}(z_0) = k!a_k.$$

Άρα

$$\boxed{a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}.}$$

Συντελεστές Taylor

Παραγωγίζοντας επανειλημμένα:

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(z-z_0)^{n-k}.$$

Θέτοντας $z = z_0$, μένει μόνο ο όρος $n = k$:

$$f^{(k)}(z_0) = k!a_k.$$

Άρα

$$\boxed{a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}.}$$

Επομένως η ανάπτυξη, αν υπάρχει, είναι μοναδικά

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n.}$$

Ολοκλήρωση κατά όρους

Αν

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

έχει ακτίνα σύγκλισης R, τότε

$$F(z) = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1}$$

έχει επίσης ακτίνα R και

$$\boxed{F'(z) = f(z).}$$

Ολοκλήρωση κατά όρους

Αν

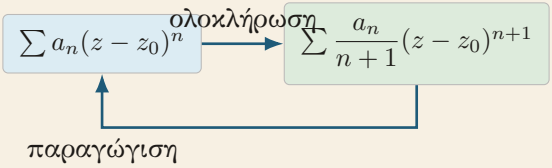
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

έχει ακτίνα σύγκλισης R, τότε

$$F(z) = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1}$$

έχει επίσης ακτίνα R και

$$\boxed{F'(z) = f(z).}$$



Παράδειγμα: η σειρά του $\mathrm{Log}(1+z)$

Ξεκινάμε από

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \qquad |z| < 1.$$

Παράδειγμα: η σειρά του $\mathrm{Log}(1+z)$

Ξεκινάμε από

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \qquad |z| < 1.$$

Ολοκληρώνοντας κατά όρους:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}.$$

Τότε

$$F'(z) = \frac{1}{1+z}.$$

Παράδειγμα: η σειρά του $\mathrm{Log}(1+z)$

Ξεκινάμε από

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \qquad |z| < 1.$$

Ολοκληρώνοντας κατά όρους:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}.$$

Τότε

$$F'(z) = \frac{1}{1+z}.$$

Για $|z| < 1$, το $1+z$ βρίσκεται στο δεξί ημιεπίπεδο, άρα

$$\frac{d}{dz} \mathrm{Log}(1+z) = \frac{1}{1+z}.$$

Παράδειγμα: η σειρά του $\mathrm{Log}(1+z)$

Ξεκινάμε από

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \qquad |z| < 1.$$

Ολοκληρώνοντας κατά όρους:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}.$$

Τότε

$$F'(z) = \frac{1}{1+z}.$$

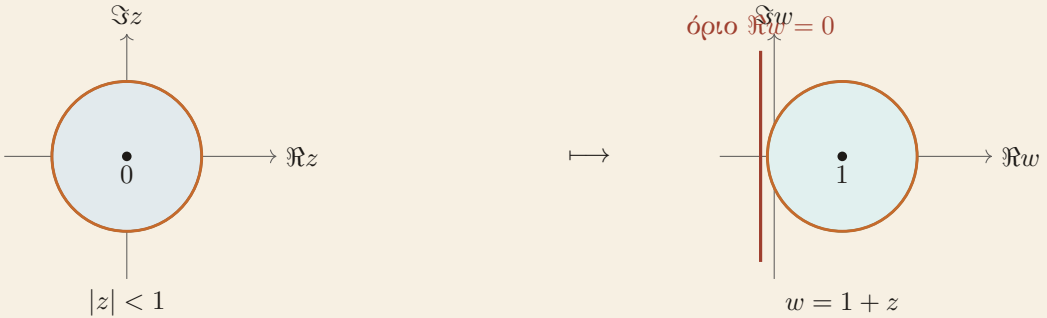
Για $|z| < 1$, το $1+z$ βρίσκεται στο δεξί ημιεπίπεδο, άρα

$$\frac{d}{dz} \mathrm{Log}(1+z) = \frac{1}{1+z}.$$

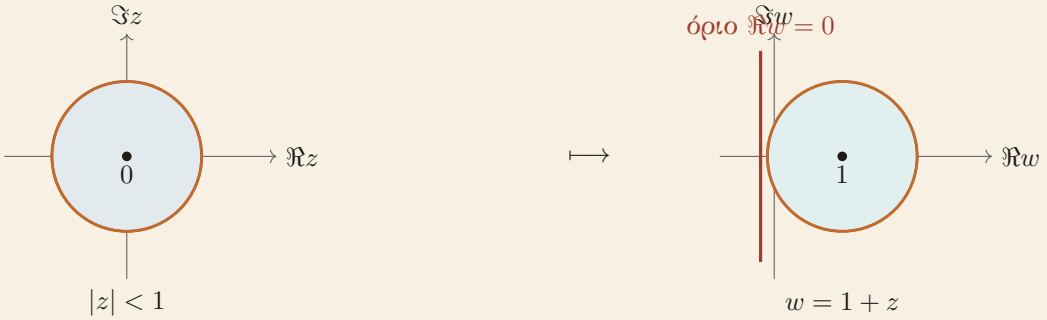
Επειδή $F(0) = 0 = \mathrm{Log}\, 1$,

$$\boxed{\mathrm{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}, \quad |z| < 1.}$$

Γεωμετρία του $\mathrm{Log}(1+z)$



Γεωμετρία του $\mathrm{Log}(1+z)$



Ο δίσκος $|z| < 1$ μεταφέρεται στον δίσκο $|w - 1| < 1$, μέσα στο δεξί ημιεπίπεδο.

Παράδειγμα: παραγώγιση της γεωμετρικής σειράς

Για $|z| < 1$,

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Παράδειγμα: παραγώγιση της γεωμετρικής σειράς

Για $|z| < 1$,

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Παραγωγίζοντας κατά όρους:

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}.$$

Παράδειγμα: παραγώγιση της γεωμετρικής σειράς

Για $|z| < 1$,

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Παραγωγίζοντας κατά όρους:

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}.$$

Πολλαπλασιάζοντας επί z:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} n z^n = \frac{z}{(1-z)^2}, \qquad |z| < 1.}$$

Παράδειγμα: παραγώγιση της γεωμετρικής σειράς

Για $|z| < 1$,

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Παραγωγίζοντας κατά όρους:

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}.$$

Πολλαπλασιάζοντας επί z:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} n z^n = \frac{z}{(1-z)^2}, \qquad |z| < 1.}$$

Η ακτίνα σύγκλισης παραμένει

$$\boxed{R = 1.}$$

Η εκθετική ως δυναμοσειρά

Θεωρούμε

$$E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Η εκθετική ως δυναμοσειρά

Θεωρούμε

$$E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Έχει ακτίνα σύγκλισης $R = \infty$, και

$$E'(z) = E(z), \qquad E(0) = 1.$$

Η εκθετική ως δυναμοσειρά

Θεωρούμε

$$E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Έχει ακτίνα σύγκλισης $R = \infty$, και

$$E'(z) = E(z), \qquad E(0) = 1.$$

Η μιγαδική εκθετική ικανοποιεί επίσης

$$(e^z)' = e^z, \qquad e^0 = 1.$$

Η εκθετική ως δυναμοσειρά

Θεωρούμε

$$E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Έχει ακτίνα σύγκλισης $R = \infty$, και

$$E'(z) = E(z), \qquad E(0) = 1.$$

Η μιγαδική εκθετική ικανοποιεί επίσης

$$(e^z)' = e^z, \qquad e^0 = 1.$$

Άρα

$$\boxed{e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \qquad z \in \mathbb{C}.}$$



Οι σειρές των $\cos z$ και $\sin z$

Από

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

και τη σειρά της εκθετικής παίρνουμε:

Οι σειρές των $\cos z$ και $\sin z$

Από

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

και τη σειρά της εκθετικής παίρνουμε:

$$\boxed{\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}}$$

Οι σειρές των $\cos z$ και $\sin z$

Από

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

και τη σειρά της εκθετικής παίρνουμε:

$$\boxed{\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}}$$

και

$$\boxed{\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}}$$

Οι σειρές των $\cos z$ και $\sin z$

Από

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

και τη σειρά της εκθετικής παίρνουμε:

$$\boxed{\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}}$$

και

$$\boxed{\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}}$$

Και οι δύο σειρές συγκλίνουν για κάθε $z \in \mathbb{C}$.

Παράδειγμα: ze^{z^2}

Από

$$e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}$$

θέτουμε

$$w = z^2.$$

Παράδειγμα: ze^{z^2}

Από

$$e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}$$

θέτουμε

$$w = z^2.$$

Παίρνουμε

$$e^{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!}.$$

Παράδειγμα: ze^{z^2}

Από

$$e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}$$

θέτουμε

$$w = z^2.$$

Παίρνουμε

$$e^{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!}.$$

Πολλαπλασιάζοντας επί z:

$$\boxed{ze^{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{n!}.}$$

Παράδειγμα: ze^{z^2}

Από

$$e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}$$

θέτουμε

$$w = z^2.$$

Παίρνουμε

$$e^{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!}.$$

Πολλαπλασιάζοντας επί z:

$$\boxed{ze^{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{n!}.}$$

Η ακτίνα σύγκλισης είναι

$$\boxed{R = \infty.}$$

Παράδειγμα: $\frac{1}{1+z^2}$

Από τη γεωμετρική σειρά

$$\frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n, \qquad |w| < 1,$$

θέτουμε

$$w = -z^2.$$

Παράδειγμα: $\frac{1}{1+z^2}$

Από τη γεωμετρική σειρά

$$\frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n, \qquad |w| < 1,$$

θέτουμε

$$w = -z^2.$$

Άρα

$$\boxed{\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}, \qquad |z| < 1.}$$

Παράδειγμα: $\frac{1}{1+z^2}$

Από τη γεωμετρική σειρά

$$\frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n, \qquad |w| < 1,$$

θέτουμε

$$w = -z^2.$$

Άρα

$$\boxed{\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}, \qquad |z| < 1.}$$

Η ανάπτυξη δίνει $R = 1$. Παρατηρούμε ότι οι πλησιέστερες ανωμαλίες της συνάρτησης (δηλαδή εκεί που μηδενίζεται ο παρονομαστής) είναι τα $z = \pm i$, ακριβώς σε απόσταση 1 από το κέντρο. Αργότερα θα δούμε ότι αυτό δεν είναι σύμπτωση.

Γιατί αυτό εξηγεί το πραγματικό φαινόμενο

Η πραγματική συνάρτηση

$$\frac{1}{1+x^2}$$

είναι C^∞ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γιατί αυτό εξηγεί το πραγματικό φαινόμενο

Η πραγματική συνάρτηση

$$\frac{1}{1+x^2}$$

είναι C^∞ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Όμως η σειρά Maclaurin της έχει ακτίνα σύγκλισης μόνο 1:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots, \qquad |x| < 1.$$

Γιατί αυτό εξηγεί το πραγματικό φαινόμενο

Η πραγματική συνάρτηση

$$\frac{1}{1+x^2}$$

είναι C^∞ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Όμως η σειρά Maclaurin της έχει ακτίνα σύγκλισης μόνο 1:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots, \qquad |x| < 1.$$

Η μιγαδική εξήγηση: η συνάρτηση έχει πόλους στα i και $-i$, απόσταση 1 από το 0.

Αφαιρέσιμη ανωμαλία: $\sin z/z$

Ορίζουμε

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{\sin z}{z}, & z \neq 0, \\ 1, & z = 0. \end{cases}$$

Αφαιρέσιμη ανωμαλία: $\sin z/z$

Ορίζουμε

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{\sin z}{z}, & z \neq 0, \\ 1, & z = 0. \end{cases}$$

Από

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots$$

παίρνουμε

$$\sin z = z \left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \cdots \right).$$

Αφαιρέσιμη ανωμαλία: $\sin z/z$

Ορίζουμε

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{\sin z}{z}, & z \neq 0, \\ 1, & z = 0. \end{cases}$$

Από

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots$$

παίρνουμε

$$\sin z = z \left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \cdots \right).$$

Άρα

$$\boxed{\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \cdots}$$

και η δεξιά σειρά έχει ακτίνα ∞.

Η επέκταση είναι ακέραια

Επομένως

$$\boxed{g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!}}$$

για κάθε $z \in \mathbb{C}$.

Επομένως

$$\boxed{g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!}}$$

για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Άρα η g είναι ολόμορφη σε όλο το $\mathbb{C}$.

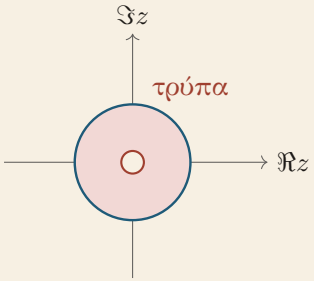
Η επέκταση είναι ακέραια

Επομένως

$$\boxed{g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!}}$$

για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Άρα η g είναι ολόμορφη σε όλο το $\mathbb{C}$.

$\dfrac{\sin z}{z}$ έχει αφαιρέσιμη ανωμαλία στο 0.



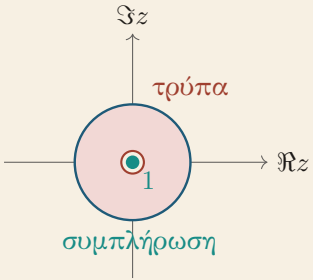
Η επέκταση είναι ακέραια

Επομένως

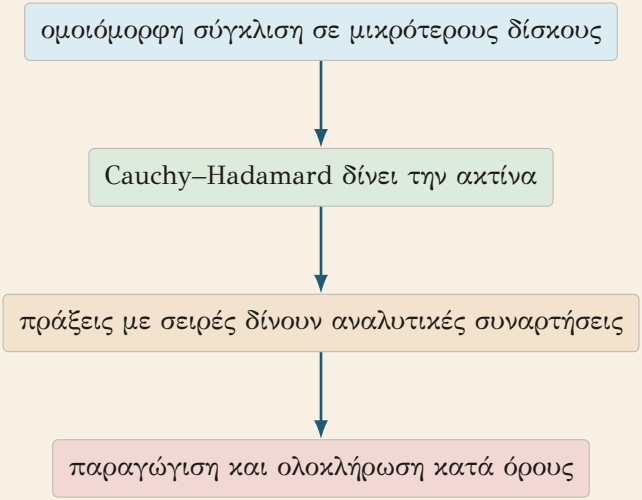
$$\boxed{g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!}}$$

για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Άρα η g είναι ολόμορφη σε όλο το $\mathbb{C}$.

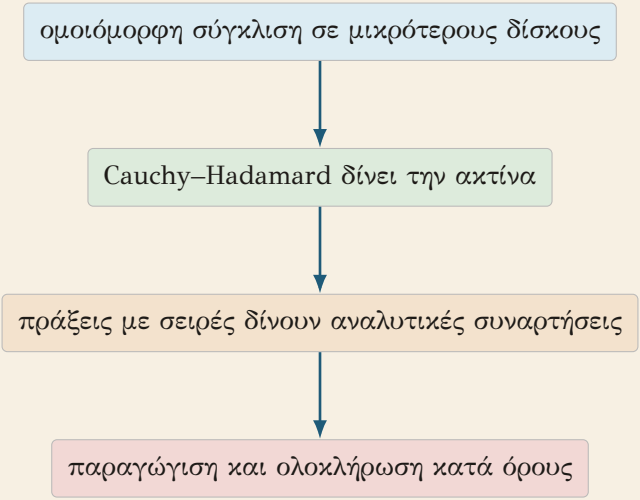
$\dfrac{\sin z}{z}$ έχει αφαιρέσιμη ανωμαλία στο 0.



Τι κρατάμε


ομοιόμορφη σύγκλιση σε μικρότερους δίσκους
Cauchy–Hadamard δίνει την ακτίνα
πράξεις με σειρές δίνουν αναλυτικές συναρτήσεις
παραγώγιση και ολοκλήρωση κατά όρους

Τι κρατάμε



Το επόμενο μεγάλο θεώρημα θα είναι το αντίστροφο: κάθε ολόμορφη συνάρτηση είναι αναλυτική.