Πανεπιστήμιο Κρήτης
Τμήμα Μαθηματικών
και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Χειμερινό Εξάμηνο 2026-2027
Θ. Γαρεφαλάκης

ΒΙΟ-101.1 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ
Φυλλάδιο Ασκήσεων 1

Άσκηση 1.1:
1. Φτιάξτε τον 2×3 πίνακα $A = \left(a_{i,j}\right)$ όπου $a_{i,j} = i + 2j$.
2. Φτιάξτε τον 3×3 πίνακα $B = \left(b_{i,j}\right)$ όπου $b_{i,j} = i^2 + j^2$.
3. Υπολογίστε το γινόμενο AB.

Άσκηση 1.2: Υπολογίστε τα γινόμενα πινάκων:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\pi}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \frac{\pi}{6} & 7 \\ 3 & 2 & 2 \\ \frac{\pi}{3} & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 1.3: Υπολογίστε τα γινόμενα FGH και HGF:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 1.4: Ο πίνακας $P_{i,j} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ είναι ο πίνακας που προκύπτει από τον μοναδιαίο πίνακα I όταν αντιμεταθέσουμε τις στήλες i και j. Υπολογίστε τα γινόμενα $P_{2,3} \cdot A$ και $A \cdot P_{1,3}$, όπου

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Τι παρατηρείτε;

Άσκηση 1.5: Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Υπολογίστε τον πίνακα A^2. Εξηγήστε γιατί $A^n = A$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 1.6: Βρείτε παραδείγματα πραγματικών 2×2 πινάκων που να ικανοποιούν:
1. $B^2 = O$ με $B \neq O$,
2. $EF = O$ χωρίς κανένα στοιχείο των E, F να είναι 0.

Άσκηση 1.7: Έστω $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ αντιστρέψιμος πίνακας τέτοιος ώστε $3A = A^2 + AB$, όπου

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Βρείτε τον πίνακα A.

Άσκηση 1.8: Βρείτε τις δυνάμεις $A, A^2, A^3, \ldots, A^n$ του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Άσκηση 1.9: Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Δείξτε ότι $A^3 - 3A^2 + 4I_3 = O$. Δείξτε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και υπολογίστε τον αντίστροφό του.

Άσκηση 1.10: Έστω $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ δύο άνω (αντίστοιχα κάτω) τριγωνικοί πίνακες. Δείξτε ότι ο πίνακας AB είναι άνω (αντίστοιχα κάτω) τριγωνικός.

Άσκηση 1.11: Για τα παρακάτω ερωτήματα χρησιμοποιήστε τον ορισμό του πολλαπλασιασμού πινάκων.

1. Έστω ότι έχετε πίνακες $A \in \mathbb{R}^{m \times p}$, $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$. Υπολογίστε πόσους πολλαπλασιασμούς πραγματικών αριθμών πρέπει να κάνουμε για τον υπολογισμό του γινομένου AB.
2. Έστω ότι έχετε πίνακες $A \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}, B \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_3}, C \in \mathbb{R}^{n_3 \times n_4}$ και θέλετε να υπολογίσετε το γινόμενο ABC. Υπολογίστε το κόστος (σε πολλαπλασιασμούς αριθμών) του υπολογισμού $(A \cdot B) \cdot C$ και του $A \cdot (B \cdot C)$. Εάν $n_1 = 100, n_2 = 10, n_3 = 100, n_4 = 20$, ποιον από τους δύο υπολογισμούς θα κάνετε;

Άσκηση 1.12: Αν A, B είναι 2×2 πίνακες που το άθροισμα των στοιχείων κάθε στήλης τους είναι ίσο με 1, δείξτε ότι και το άθροισμα των στοιχείων κάθε στήλης του AB είναι ίσο με 1. (Το ίδιο ισχύει γενικότερα για πίνακες $A \in \mathbb{R}^{n \times p}, \quad B \in \mathbb{R}^{p \times m}$. Μπορείτε να το δείξετε;)