Μιγαδική Ανάλυση
2ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Πραγματική διαφορισιμότητα – Μιγαδική παράγωγος – Εξισώσεις Cauchy–Riemann – Εκθετική – Λογάριθμος – Κλάδοι – Ολομορφία

Πρόβλημα 1 Εάν

$$u(x, y) = yx^2 + x + y,$$

βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης

$$U(t) = u(\ln t, t^4), \qquad t > 0.$$

Πρόβλημα 2 Να λύσετε στο $\mathbb{C}$ τις εξισώσεις

(i) $e^z = 3$.

(ii) $e^{z+3} = i$.

Πρόβλημα 3 Να υπολογίσετε το

$$(-i)^{1+i}$$

(i) ως προς τον κύριο λογάριθμο,

(ii) ως προς τον 0-κλάδο του λογαρίθμου, δηλαδή τον κλάδο

$$\log_0 z = \ln|z| + i \arg_0 z, \qquad 0 < \arg_0 z \leq 2\pi.$$

Πρόβλημα 4 Έστω

$$f = u + iv$$

ολόμορφη σε ένα χωρίο Ω. Να δείξετε ότι

(i)
$$f'(z) = u_x - iu_y \qquad \text{και} \qquad f'(z) = v_y + iv_x,$$

(ii)
$$|f'(z)|^2 = u_x^2 + u_y^2 = v_x^2 + v_y^2.$$

Πρόβλημα 5 Να βρείτε όλα τα σημεία $z \in \mathbb{C}$ στα οποία η συνάρτηση

$$f(z) = |z|^2$$

είναι μιγαδικά διαφορίσιμη και να υπολογίσετε την παράγωγό της στα σημεία αυτά.

Πρόβλημα 6 Για καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο ανοικτό σύνολο στο οποίο είναι ολόμορφη και να υπολογίσετε τη μιγαδική παράγωγό της. Στα τέσσερα τελευταία ερωτήματα να χρησιμοποιήσετε τον κύριο κλάδο της δύναμης.

(i) $f(z) = ze^{z^2}$.

(ii) $f(z) = (1 + e^z)^5$.

(iii) $f(z) = \sin z \cos z$.

(iv) $f(z) = \mathrm{Log}(z + 1)$.

(v) $f(z) = \dfrac{\mathrm{Log}(3z - 1)}{z^2 + 1}$.

(vi) $f(z) = \sinh(3z + i)$.

(vii) $f(z) = \cosh(z^2 + 3i)$.

(viii) $f(z) = \log_{\pi/2}(z+1)$.

(ix) $f(z) = z^i$.

(x) $f(z) = (z+1)^{1/2}$.

(xi) $f(z) = \dfrac{1}{(z-i)^{1/2}}$.

(xii) $f(z) = z^z$.

Πρόβλημα 7 Να προσδιορίσετε το σύνολο στο οποίο η συνάρτηση

$$f(z) = \begin{cases} \overline{z}, & |z| \le 1, \\ z^2, & |z| > 1 \end{cases}$$

είναι ολόμορφη και να βρείτε την παράγωγό της στο σύνολο αυτό.

Πρόβλημα 8 Έστω $f = u + iv$ ολόμορφη σε ένα χωρίο Ω και υποθέστε ότι

$$f'(z) = 0 \qquad \text{για κάθε } z \in \Omega.$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή στο Ω.

Πρόβλημα 9 Έστω

$$f = u + iv$$

ολόμορφη σε ένα χωρίο Ω.

Να δείξετε ότι, αν μία από τις συναρτήσεις

$$\operatorname{Re} f \qquad \text{ή} \qquad \operatorname{Im} f$$

είναι σταθερή στο Ω, τότε η f είναι σταθερή στο Ω.

Πρόβλημα 10 Έστω f ολόμορφη σε ένα χωρίο Ω και υποθέστε ότι και η

$$\overline{f}$$

είναι ολόμορφη στο Ω. Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή.

Υπόδειξη. Εξετάστε τη συνάρτηση

$$f + \overline{f} = 2 \operatorname{Re} f.$$

Πρόβλημα 11 Έστω f ολόμορφη σε ένα χωρίο Ω και υποθέστε ότι

$$|f(z)| = c \qquad \text{για κάθε } z \in \Omega,$$

όπου $c \ge 0$ είναι σταθερά.

Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή στο Ω.

Υπόδειξη. Διακρίνετε τις περιπτώσεις $c = 0$ και $c > 0$. Στη δεύτερη περίπτωση παρατηρήστε ότι

$$\overline{f(z)} = \frac{c^2}{f(z)}.$$

Πρόβλημα 12 Έστω f ολόμορφη σε ένα χωρίο Ω και υποθέστε ότι

$$f(\Omega)$$

περιέχεται σε μία ευθεία του μιγαδικού επιπέδου. Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή στο Ω.

Υπόδειξη. Περιστρέψτε την ευθεία ώστε να γίνει οριζόντια ή κατακόρυφη και χρησιμοποιήστε το προηγούμενο αποτέλεσμα για σταθερό πραγματικό ή φανταστικό μέρος.