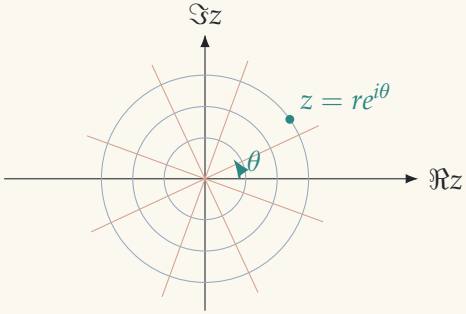
Τριγωνομετρικές, όρισμα και λογάριθμος

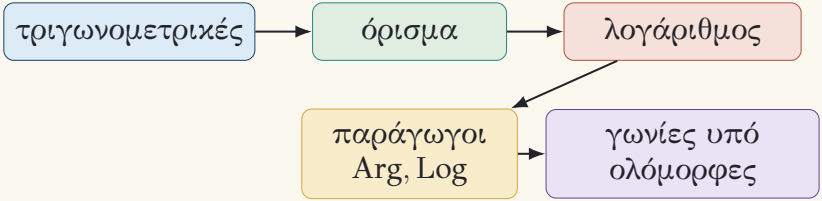
Κλάδοι, κύριος λογάριθμος και γωνίες υπό ολόμορφες απεικονίσεις

Μιγαδική Ανάλυση

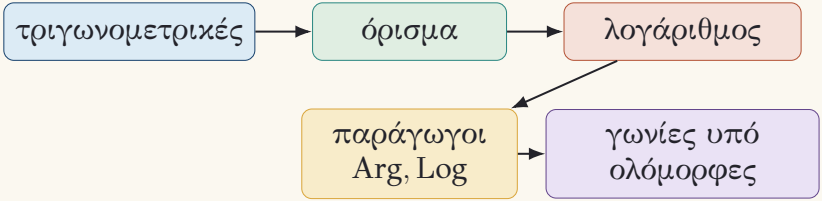


κύκλοι και ακτίνες: οι φυσικές συντεταγμένες του λογαρίθμου

Η σειρά του μαθήματος



Η σειρά του μαθήματος



Κεντρική ιδέα: για να γίνει ο λογάριθμος συνάρτηση πρέπει να επιλέξουμε συν

Ορισμός των μιγαδικών τριγωνομετρικών

Αφού έχουμε ορίσει τη μιγαδική εκθετική, ορίζουμε

Ορισμός των μιγαδικών τριγωνομετρικών

Αφού έχουμε ορίσει τη μιγαδική εκθετική, ορίζουμε

$$\boxed{\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.}$$

Ορισμός των μιγαδικών τριγωνομετρικών

Αφού έχουμε ορίσει τη μιγαδική εκθετική, ορίζουμε

$$\boxed{\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.}$$

Για πραγματικό x, από τον τύπο του Euler

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

παίρνουμε ακριβώς τους ίδιους τύπους.

Ορισμός των μιγαδικών τριγωνομετρικών

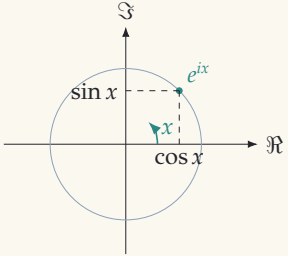
Αφού έχουμε ορίσει τη μιγαδική εκθετική, ορίζουμε

$$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Για πραγματικό x, από τον τύπο του Euler

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

παίρνουμε ακριβώς τους ίδιους τύπους.



Τύποι για $\sin(x+iy)$ και $\cos(x+iy)$

Για $z = x + iy$ έχουμε

$$iz = ix - y.$$

Τύποι για $\sin(x+iy)$ και $\cos(x+iy)$

Για $z = x + iy$ έχουμε

$$iz = ix - y.$$

Άρα

$$e^{iz} = e^{-y}(\cos x + i \sin x), \qquad e^{-iz} = e^{y}(\cos x - i \sin x).$$

Τύποι για $\sin(x+iy)$ και $\cos(x+iy)$

Για $z = x + iy$ έχουμε

$$iz = ix - y.$$

Άρα

$$e^{iz} = e^{-y}(\cos x + i \sin x), \qquad e^{-iz} = e^{y}(\cos x - i \sin x).$$

$$\boxed{\cos(x+iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y}$$

Τύποι για $\sin(x+iy)$ και $\cos(x+iy)$

Για $z = x + iy$ έχουμε

$$iz = ix - y.$$

Άρα

$$e^{iz} = e^{-y}(\cos x + i \sin x), \qquad e^{-iz} = e^{y}(\cos x - i \sin x).$$

$$\boxed{\cos(x+iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y}$$

$$\boxed{\sin(x+iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y.}$$

Τύποι για $\sin(x+iy)$ και $\cos(x+iy)$

Για $z = x + iy$ έχουμε

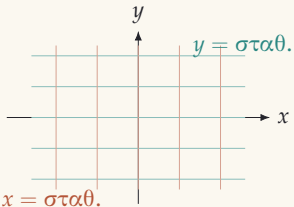
$$iz = ix - y.$$

Άρα

$$e^{iz} = e^{-y}(\cos x + i \sin x), \qquad e^{-iz} = e^{y}(\cos x - i \sin x).$$

$$\boxed{\cos(x+iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y}$$

$$\boxed{\sin(x+iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y.}$$



οι υπερβολικές συναρτήσεις μπαίνουν από τη φανταστική διεύθυνση

Μια διαφορά από το πραγματικό $\sin, \cos$

Στο πραγματικό επίπεδο:

$$|\sin x| \leq 1, \qquad |\cos x| \leq 1.$$

Μια διαφορά από το πραγματικό $\sin, \cos$

Στο πραγματικό επίπεδο:

$$|\sin x| \leq 1, \qquad |\cos x| \leq 1.$$

Στο μιγαδικό επίπεδο:

$$\cos(iy) = \cosh y, \qquad \sin(iy) = i \sinh y.$$

Μια διαφορά από το πραγματικό $\sin, \cos$

Στο πραγματικό επίπεδο:

$$|\sin x| \leq 1, \qquad |\cos x| \leq 1.$$

Στο μιγαδικό επίπεδο:

$$\cos(iy) = \cosh y, \qquad \sin(iy) = i \sinh y.$$

Άρα οι $\sin z$ και $\cos z$ δεν είναι φραγμένες στο $\mathbb{C}$.

Μια διαφορά από το πραγματικό $\sin, \cos$

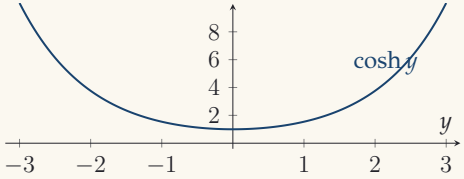
Στο πραγματικό επίπεδο:

$$|\sin x| \leq 1, \qquad |\cos x| \leq 1.$$

Στο μιγαδικό επίπεδο:

$$\cos(iy) = \cosh y, \qquad \sin(iy) = i \sinh y.$$

Άρα οι $\sin z$ και $\cos z$ δεν είναι φραγμένες στο $\mathbb{C}$.



Παράγωγοι των μιγαδικών τριγωνομετρικών

Από τον ορισμό

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Παράγωγοι των μιγαδικών τριγωνομετρικών

Από τον ορισμό

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας:

$$\begin{aligned}(\sin z)' &= \frac{1}{2i}\left(ie^{iz} - (-i)e^{-iz}\right) \\ &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\ &= \cos z.\end{aligned}$$

Παράγωγοι των μιγαδικών τριγωνομετρικών

Από τον ορισμό

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας:

$$\begin{aligned}(\sin z)' &= \frac{1}{2i}\left(ie^{iz} - (-i)e^{-iz}\right) \\ &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\ &= \cos z.\end{aligned}$$

Ομοίως

$$\boxed{(\cos z)' = -\sin z.}$$

Παράγωγοι των μιγαδικών τριγωνομετρικών

Από τον ορισμό

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας:

$$\begin{aligned}(\sin z)' &= \frac{1}{2i}\left(ie^{iz} - (-i)e^{-iz}\right) \\ &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\ &= \cos z.\end{aligned}$$

Ομοίως

$$\boxed{(\cos z)' = -\sin z.}$$

Οι τύποι παραγώγισης είναι οι γνωστοί, αλλά οι συναρτήσεις έχουν νέα γεωμετρία.

Μια επαλήθευση με Cauchy–Riemann

Από

$$\sin(x+iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

παίρνουμε

$$u(x,y) = \sin x \cosh y, \qquad v(x,y) = \cos x \sinh y.$$

Μια επαλήθευση με Cauchy–Riemann

Από

$$\sin(x+iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

παίρνουμε

$$u(x,y) = \sin x \cosh y, \qquad v(x,y) = \cos x \sinh y.$$

$$u_x = \cos x \cosh y, \qquad u_y = \sin x \sinh y,$$
$$v_x = -\sin x \sinh y, \qquad v_y = \cos x \cosh y.$$

Μια επαλήθευση με Cauchy–Riemann

Από

$$\sin(x+iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

παίρνουμε

$$u(x,y) = \sin x \cosh y, \qquad v(x,y) = \cos x \sinh y.$$

$$u_x = \cos x \cosh y, \qquad u_y = \sin x \sinh y,$$
$$v_x = -\sin x \sinh y, \qquad v_y = \cos x \cosh y.$$

Άρα

$$\boxed{u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x.}$$

Μια επαλήθευση με Cauchy–Riemann

Από

$$\sin(x+iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

παίρνουμε

$$u(x,y) = \sin x \cosh y, \qquad v(x,y) = \cos x \sinh y.$$

$$u_x = \cos x \cosh y, \qquad u_y = \sin x \sinh y,$$
$$v_x = -\sin x \sinh y, \qquad v_y = \cos x \cosh y.$$

Άρα

$$\boxed{u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x.}$$

Επομένως η $\sin z$ είναι ολόμορφη και

$$(\sin z)' = u_x + i v_x = \cos z.$$

Παράδειγμα: αποτυχία αναλυτικότητας

$$f(x+iy) = x^2 + i(2y+x).$$

Παράδειγμα: αποτυχία αναλυτικότητας

$$f(x+iy) = x^2 + i(2y+x).$$

$$u(x,y) = x^2, \qquad v(x,y) = 2y + x.$$

Παράδειγμα: αποτυχία αναλυτικότητας

$$f(x+iy) = x^2 + i(2y+x).$$

$$u(x,y) = x^2, \qquad v(x,y) = 2y + x.$$

$$u_y = 0, \qquad v_x = 1.$$

Παράδειγμα: αποτυχία αναλυτικότητας

$$f(x+iy) = x^2 + i(2y+x).$$

$$u(x,y) = x^2, \qquad v(x,y) = 2y + x.$$

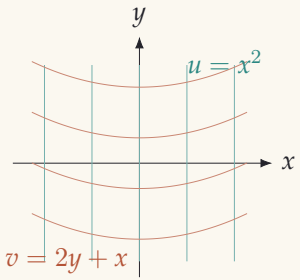
$$u_y = 0, \qquad v_x = 1.$$

Η δεύτερη Cauchy–Riemann ζητά

$$u_y = -v_x,$$

δηλαδή

$$0 = -1.$$



Παράδειγμα: αποτυχία αναλυτικότητας

$$f(x+iy) = x^2 + i(2y+x).$$

$$u(x,y) = x^2, \qquad v(x,y) = 2y + x.$$

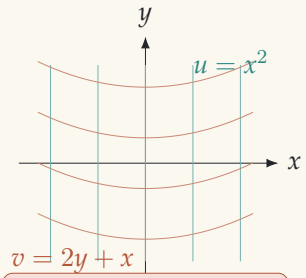
$$u_y = 0, \qquad v_x = 1.$$

Η δεύτερη Cauchy–Riemann ζητά

$$u_y = -v_x,$$

δηλαδή

$$0 = -1.$$



δεν υπάρχει μιγαδική παράγωγος πουθενά

Πολική μορφή και πολλές γωνίες

Για $z \neq 0$ γράφουμε

$$z = |z|e^{i\theta}.$$

Πολική μορφή και πολλές γωνίες

Για $z \neq 0$ γράφουμε

$$z = |z|e^{i\theta}.$$

Αν μία γωνία είναι θ, τότε όλες οι

$$\theta + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

δίνουν το ίδιο σημείο.

Πολική μορφή και πολλές γωνίες

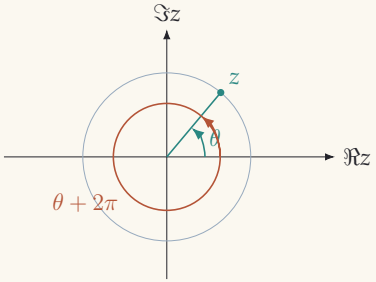
Για $z \neq 0$ γράφουμε

$$z = |z|e^{i\theta}.$$

Αν μία γωνία είναι θ, τότε όλες οι

$$\theta + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

δίνουν το ίδιο σημείο.



Πολική μορφή και πολλές γωνίες

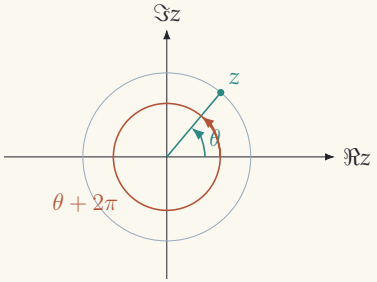
Για $z \neq 0$ γράφουμε

$$z = |z|e^{i\theta}.$$

Αν μία γωνία είναι θ, τότε όλες οι

$$\theta + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

δίνουν το ίδιο σημείο.



$\arg z$ είναι σύνολο τιμών, όχι μία τιμή

Το όρισμα

Definition

Το *όρισμα* του $z \neq 0$ είναι το σύνολο

$$\arg z = \left\{ \theta \in \mathbb{R} : z = |z| e^{i\theta} \right\}.$$

Το όρισμα

Definition

Το *όρισμα* του $z \neq 0$ είναι το σύνολο

$$\arg z = \left\{\theta \in \mathbb{R} : z = |z|e^{i\theta}\right\}.$$

Αν θ_0 είναι μία τιμή του ορίσματος, τότε

$$\boxed{\arg z = \{\theta_0 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.}$$

Το όρισμα

Definition

Το *όρισμα* του $z \neq 0$ είναι το σύνολο

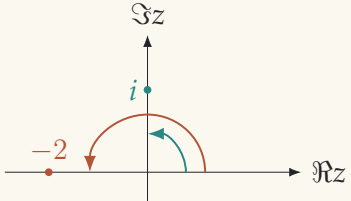
$$\arg z = \left\{\theta \in \mathbb{R} : z = |z|e^{i\theta}\right\}.$$

Αν θ_0 είναι μία τιμή του ορίσματος, τότε

$$\boxed{\arg z = \{\theta_0 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.}$$

$$\arg i = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$\arg(-2) = \{\pi + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$



Το κύριο όρισμα

Για να πάρουμε μία τιμή, διαλέγουμε διάστημα μήκους 2π.

Το κύριο όρισμα

Για να πάρουμε μία τιμή, διαλέγουμε διάστημα μήκους 2π.

Definition

Το *κύριο όρισμα* είναι η μοναδική τιμή

$$\operatorname{Arg} z \in (-\pi, \pi]$$

που ανήκει στο $\arg z$.

Το κύριο όρισμα

Για να πάρουμε μία τιμή, διαλέγουμε διάστημα μήκους 2π.

Definition

Το *κύριο όρισμα* είναι η μοναδική τιμή

$$\operatorname{Arg} z \in (-\pi, \pi]$$

που ανήκει στο $\arg z$.

$$\operatorname{Arg}(1) = 0, \qquad \operatorname{Arg}(i) = \frac{\pi}{2}, \qquad \operatorname{Arg}(-1) = \pi, \qquad \operatorname{Arg}(-i) = -\frac{\pi}{2}.$$

Το κύριο όρισμα

Για να πάρουμε μία τιμή, διαλέγουμε διάστημα μήκους 2π.

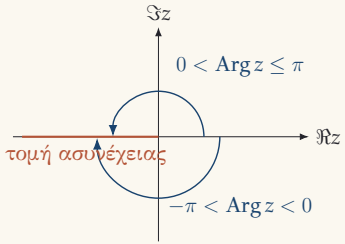
Definition

Το *κύριο όρισμα* είναι η μοναδική τιμή

$$\operatorname{Arg} z \in (-\pi, \pi]$$

που ανήκει στο $\arg z$.

$$\operatorname{Arg}(1) = 0, \qquad \operatorname{Arg}(i) = \frac{\pi}{2}, \qquad \operatorname{Arg}(-1) = \pi, \qquad \operatorname{Arg}(-i) = -\frac{\pi}{2}.$$



Η ασυνέχεια του Arg

Στον αρνητικό πραγματικό ημιάξονα έχουμε άλμα.

Η ασυνέχεια του Arg

Στον αρνητικό πραγματικό ημιάξονα έχουμε άλμα. Αν $x < 0$, τότε

$$\mathrm{Arg}(x + iy) \longrightarrow \pi \quad \text{καθώς } y \downarrow 0,$$

ενώ

$$\mathrm{Arg}(x + iy) \longrightarrow -\pi \quad \text{καθώς } y \uparrow 0.$$

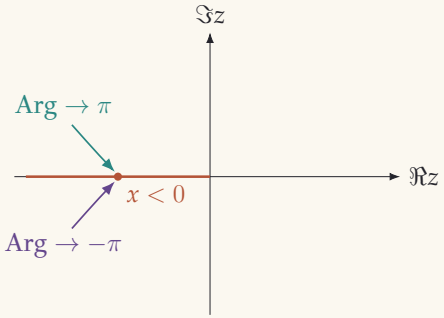
Η ασυνέχεια του Arg

Στον αρνητικό πραγματικό ημιάξονα έχουμε άλμα. Αν $x < 0$, τότε

$$\mathrm{Arg}(x + iy) \longrightarrow \pi \quad \text{καθώς } y \downarrow 0,$$

ενώ

$$\mathrm{Arg}(x + iy) \longrightarrow -\pi \quad \text{καθώς } y \uparrow 0.$$



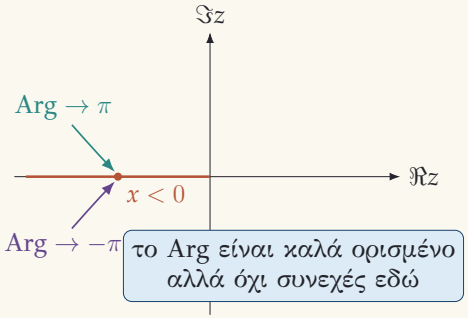
Η ασυνέχεια του Arg

Στον αρνητικό πραγματικό ημιάξονα έχουμε άλμα. Αν $x < 0$, τότε

$$\mathrm{Arg}(x + iy) \longrightarrow \pi \quad \text{καθώς } y \downarrow 0,$$

ενώ

$$\mathrm{Arg}(x + iy) \longrightarrow -\pi \quad \text{καθώς } y \uparrow 0.$$



Κλάδοι του ορίσματος

Δεν είμαστε υποχρεωμένοι να διαλέξουμε το $(-\pi, \pi]$.

Κλάδοι του ορίσματος

Δεν είμαστε υποχρεωμένοι να διαλέξουμε το $(-\pi, \pi]$. Για $\alpha \in \mathbb{R}$, ορίζουμε $\arg_\alpha z$ από τη συνθήκη

$$\boxed{\alpha < \arg_\alpha z \leq \alpha + 2\pi.}$$

Κλάδοι του ορίσματος

Δεν είμαστε υποχρεωμένοι να διαλέξουμε το $(-\pi, \pi]$. Για $\alpha \in \mathbb{R}$, ορίζουμε $\arg_\alpha z$ από τη συνθήκη

$$\boxed{\alpha < \arg_\alpha z \leq \alpha + 2\pi.}$$

Ο αντίστοιχος κλάδος του λογαρίθμου θα είναι

$$\boxed{\log_\alpha z = \ln |z| + i \arg_\alpha z.}$$

Κλάδοι του ορίσματος

Δεν είμαστε υποχρεωμένοι να διαλέξουμε το $(-\pi, \pi]$. Για $\alpha \in \mathbb{R}$, ορίζουμε $\arg_\alpha z$ από τη συνθήκη

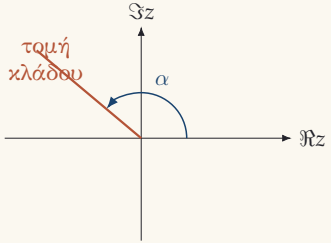
$$\boxed{\alpha < \arg_\alpha z \leq \alpha + 2\pi.}$$

Ο αντίστοιχος κλάδος του λογαρίθμου θα είναι

$$\boxed{\log_\alpha z = \ln|z| + i \arg_\alpha z.}$$

Η τομή κλάδου είναι η ημιευθεία

$$\{re^{i\alpha} : r \geq 0\}.$$



Γιατί δεν ορίζουμε λογάριθμο στο 0

Ο λογάριθμος προκύπτει από την εξίσωση

$$e^w = z.$$

Γιατί δεν ορίζουμε λογάριθμο στο 0

Ο λογάριθμος προκύπτει από την εξίσωση

$$e^w = z.$$

Για $z = 0$ θα χρειαζόταν

$$e^w = 0.$$

Γιατί δεν ορίζουμε λογάριθμο στο 0

Ο λογάριθμος προκύπτει από την εξίσωση

$$e^w = z.$$

Για $z = 0$ θα χρειαζόταν

$$e^w = 0.$$

Αλλά

$$e^{u+iv} = e^u e^{iv}, \qquad e^u > 0,$$

άρα

$$\boxed{e^w \neq 0 \quad \text{για κάθε } w \in \mathbb{C}.}$$

Γιατί δεν ορίζουμε λογάριθμο στο 0

Ο λογάριθμος προκύπτει από την εξίσωση

$$e^w = z.$$

Για $z = 0$ θα χρειαζόταν

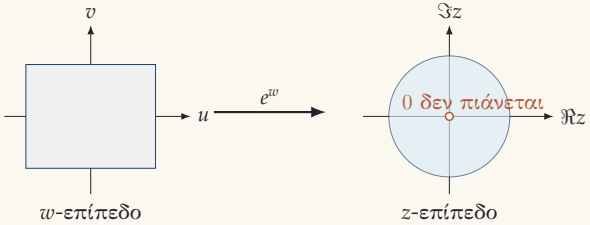
$$e^w = 0.$$

Αλλά

$$e^{u+iv} = e^u e^{iv}, \qquad e^u > 0,$$

άρα

$$\boxed{e^w \neq 0 \quad \text{για κάθε } w \in \mathbb{C}.}$$



Ο μιγαδικός λογάριθμος είναι πλειότιμος

Για $z \neq 0$, λύνουμε

$$e^w = z.$$

Ο μιγαδικός λογάριθμος είναι πλειότιμος

Για $z \neq 0$, λύνουμε

$$e^w = z.$$

Γράφουμε $w = u + iv$. Τότε

$$e^w = e^u e^{iv}.$$

Ο μιγαδικός λογάριθμος είναι πλειότιμος

Για $z \neq 0$, λύνουμε

$$e^w = z.$$

Γράφουμε $w = u + iv$. Τότε

$$e^w = e^u e^{iv}.$$

Άρα

$$e^u = |z|, \qquad v \in \arg z,$$

οπότε

$$u = \ln |z|.$$

Ο μιγαδικός λογάριθμος είναι πλειότιμος

Για $z \neq 0$, λύνουμε

$$e^w = z.$$

Γράφουμε $w = u + iv$. Τότε

$$e^w = e^u e^{iv}.$$

Άρα

$$e^u = |z|, \qquad v \in \arg z,$$

οπότε

$$u = \ln |z|.$$

$$\boxed{\log z = \{\ln |z| + i\theta : \theta \in \arg z\}.}$$

Ο μιγαδικός λογάριθμος είναι πλειότιμος

Για $z \neq 0$, λύνουμε

$$e^w = z.$$

Γράφουμε $w = u + iv$. Τότε

$$e^w = e^u e^{iv}.$$

Άρα

$$e^u = |z|, \qquad v \in \arg z,$$

οπότε

$$u = \ln |z|.$$

$$\boxed{\log z = \{\ln |z| + i\theta : \theta \in \arg z\}.}$$

Ισοδύναμα, αν $\theta_0 \in \arg z$,

$$\boxed{\log z = \{\ln |z| + i(\theta_0 + 2k\pi) : k \in \mathbb{Z}\}.}$$

Παράδειγμα: υπολογισμός λογαρίθμων

Παράδειγμα: υπολογισμός λογαρίθμων

$$\log i = \left\{ i \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Παράδειγμα: υπολογισμός λογαρίθμων

$$\log i = \left\{ i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

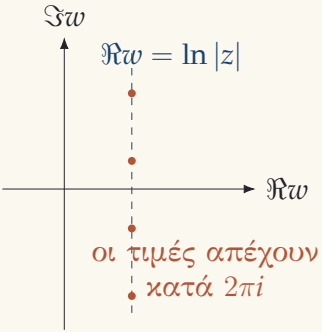
$$\log(1+i) = \left\{ \frac{1}{2}\ln 2 + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Παράδειγμα: υπολογισμός λογαρίθμων

$$\log i = \left\{ i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$\log(1+i) = \left\{ \frac{1}{2}\ln 2 + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$\log(-2) = \{\ln 2 + i(2k+1)\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$



Η κύρια τιμή του λογαρίθμου

Χρησιμοποιώντας το κύριο όρισμα, ορίζουμε

$$\boxed{\operatorname{Log} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z, \qquad z \neq 0.}$$

Η κύρια τιμή του λογαρίθμου

Χρησιμοποιώντας το κύριο όρισμα, ορίζουμε

$$\boxed{\operatorname{Log} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z, \qquad z \neq 0.}$$

Έχουμε πάντα

$$\boxed{e^{\operatorname{Log} z} = z.}$$

Η κύρια τιμή του λογαρίθμου

Χρησιμοποιώντας το κύριο όρισμα, ορίζουμε

$$\boxed{\operatorname{Log} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z, \qquad z \neq 0.}$$

Έχουμε πάντα

$$\boxed{e^{\operatorname{Log} z} = z.}$$

Αλλά γενικά

$$\operatorname{Log}(e^z) \neq z.$$

Η κύρια τιμή του λογαρίθμου

Χρησιμοποιώντας το κύριο όρισμα, ορίζουμε

$$\boxed{\operatorname{Log} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z, \qquad z \neq 0.}$$

Έχουμε πάντα

$$\boxed{e^{\operatorname{Log} z} = z.}$$

Αλλά γενικά

$$\operatorname{Log}(e^z) \neq z.$$

Στην πραγματικότητα

$$\boxed{\operatorname{Log}(e^z) = z \iff -\pi < \Im z \leq \pi.}$$

Η κύρια τιμή του λογαρίθμου

Χρησιμοποιώντας το κύριο όρισμα, ορίζουμε

$$\boxed{\operatorname{Log} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z, \qquad z \neq 0.}$$

Έχουμε πάντα

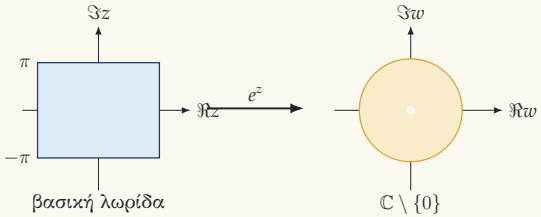
$$\boxed{e^{\operatorname{Log} z} = z.}$$

Αλλά γενικά

$$\operatorname{Log}(e^z) \neq z.$$

Στην πραγματικότητα

$$\boxed{\operatorname{Log}(e^z) = z \iff -\pi < \Im z \leq \pi.}$$



Οι γνωστές ταυτότητες θέλουν προσοχή

Στους πραγματικούς:

$$\ln(x_1 x_2) = \ln x_1 + \ln x_2.$$

Οι γνωστές ταυτότητες θέλουν προσοχή

Στους πραγματικούς:

$$\ln(x_1 x_2) = \ln x_1 + \ln x_2.$$

Για τον κύριο μιγαδικό λογάριθμο, όχι πάντα.

Οι γνωστές ταυτότητες θέλουν προσοχή

Στους πραγματικούς:

$$\ln(x_1 x_2) = \ln x_1 + \ln x_2.$$

Για τον κύριο μιγαδικό λογάριθμο, όχι πάντα.

$$\mathrm{Log}((-1)(-1)) = \mathrm{Log}(1) = 0.$$

Οι γνωστές ταυτότητες θέλουν προσοχή

Στους πραγματικούς:

$$\ln(x_1 x_2) = \ln x_1 + \ln x_2.$$

Για τον κύριο μιγαδικό λογάριθμο, όχι πάντα.

$$\mathrm{Log}((-1)(-1)) = \mathrm{Log}(1) = 0.$$

Αλλά

$$\mathrm{Log}(-1) + \mathrm{Log}(-1) = i\pi + i\pi = 2\pi i.$$

Οι γνωστές ταυτότητες θέλουν προσοχή

Στους πραγματικούς:

$$\ln(x_1 x_2) = \ln x_1 + \ln x_2.$$

Για τον κύριο μιγαδικό λογάριθμο, όχι πάντα.

$$\mathrm{Log}((-1)(-1)) = \mathrm{Log}(1) = 0.$$

Αλλά

$$\mathrm{Log}(-1) + \mathrm{Log}(-1) = i\pi + i\pi = 2\pi i.$$

Το πρόβλημα είναι η επιλογή κλάδου του ορίσματος.

Διαφορετικοί κλάδοι: ένα παράδειγμα

Για $\arg_0$ ισχύει

$$0 < \arg_0 z \leq 2\pi.$$

Διαφορετικοί κλάδοι: ένα παράδειγμα

Για $\arg_0$ ισχύει

$$0 < \arg_0 z \leq 2\pi.$$

Άρα

$$\log_0 i = \frac{\pi i}{2}.$$

Διαφορετικοί κλάδοι: ένα παράδειγμα

Για $\arg_0$ ισχύει

$$0 < \arg_0 z \leq 2\pi.$$

Άρα

$$\log_0 i = \frac{\pi i}{2}.$$

Για $\arg_{\pi/2}$ ισχύει

$$\frac{\pi}{2} < \arg_{\pi/2} z \leq \frac{5\pi}{2}.$$

Διαφορετικοί κλάδοι: ένα παράδειγμα

Για $\arg_0$ ισχύει

$$0 < \arg_0 z \leq 2\pi.$$

Άρα

$$\log_0 i = \frac{\pi i}{2}.$$

Για $\arg_{\pi/2}$ ισχύει

$$\frac{\pi}{2} < \arg_{\pi/2} z \leq \frac{5\pi}{2}.$$

Η γωνία $\pi/2$ δεν επιτρέπεται, οπότε

$$\log_{\pi/2} i = \frac{5\pi i}{2}.$$

Διαφορετικοί κλάδοι: ένα παράδειγμα

Για $\arg_0$ ισχύει

$$0 < \arg_0 z \leq 2\pi.$$

Άρα

$$\log_0 i = \frac{\pi i}{2}.$$

Για $\arg_{\pi/2}$ ισχύει

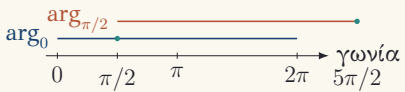
$$\frac{\pi}{2} < \arg_{\pi/2} z \leq \frac{5\pi}{2}.$$

Η γωνία $\pi/2$ δεν επιτρέπεται, οπότε

$$\log_{\pi/2} i = \frac{5\pi i}{2}.$$

Ενώ

$$\log_{\pi/2}(-2) = \ln 2 + i\pi.$$



Δεν υπάρχει καθολικός συνεχής κλάδος του ορίσματος

Δεν υπάρχει συνεχής

$$\Theta : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

με

$$e^{i\Theta(z)} = \frac{z}{|z|}.$$

Δεν υπάρχει καθολικός συνεχής κλάδος του ορίσματος

Δεν υπάρχει συνεχής

$$\Theta : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

με

$$e^{i\Theta(z)} = \frac{z}{|z|}.$$

Πράγματι, πάνω στον μοναδιαίο κύκλο θα είχαμε

$$e^{i\Theta(e^{it})} = e^{it}.$$

Δεν υπάρχει καθολικός συνεχής κλάδος του ορίσματος

Δεν υπάρχει συνεχής

$$\Theta : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

με

$$e^{i\Theta(z)} = \frac{z}{|z|}.$$

Πράγματι, πάνω στον μοναδιαίο κύκλο θα είχαμε

$$e^{i\Theta(e^{it})} = e^{it}.$$

Άρα

$$\Theta(e^{it}) - t \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

Δεν υπάρχει καθολικός συνεχής κλάδος του ορίσματος

Δεν υπάρχει συνεχής

$$\Theta : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

με

$$e^{i\Theta(z)} = \frac{z}{|z|}.$$

Πράγματι, πάνω στον μοναδιαίο κύκλο θα είχαμε

$$e^{i\Theta(e^{it})} = e^{it}.$$

Άρα

$$\Theta(e^{it}) - t \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

Η συνάρτηση

$$t \longmapsto \frac{\Theta(e^{it}) - t}{2\pi}$$

είναι συνεχής και παίρνει τιμές στο διακριτό σύνολο $\mathbb{Z}$.

Δεν υπάρχει καθολικός συνεχής κλάδος του ορίσματος

Δεν υπάρχει συνεχής

$$\Theta : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

με

$$e^{i\Theta(z)} = \frac{z}{|z|}.$$

Πράγματι, πάνω στον μοναδιαίο κύκλο θα είχαμε

$$e^{i\Theta(e^{it})} = e^{it}.$$

Άρα

$$\Theta(e^{it}) - t \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

Η συνάρτηση

$$t \longmapsto \frac{\Theta(e^{it}) - t}{2\pi}$$

είναι συνεχής και παίρνει τιμές στο διακριτό σύνολο $\mathbb{Z}$. Άρα είναι σταθερή:

$$\Theta(e^{it}) = t + 2k\pi.$$

Δεν υπάρχει καθολικός συνεχής κλάδος του ορίσματος

Δεν υπάρχει συνεχής

$$\Theta : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

με

$$e^{i\Theta(z)} = \frac{z}{|z|}.$$

Πράγματι, πάνω στον μοναδιαίο κύκλο θα είχαμε

$$e^{i\Theta(e^{it})} = e^{it}.$$

Άρα

$$\Theta(e^{it}) - t \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

Η συνάρτηση

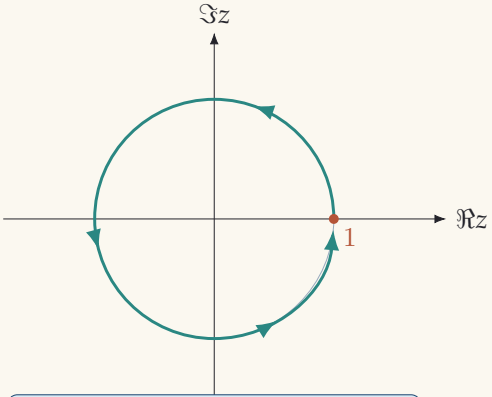
$$t \longmapsto \frac{\Theta(e^{it}) - t}{2\pi}$$

είναι συνεχής και παίρνει τιμές στο διακριτό σύνολο $\mathbb{Z}$. Άρα είναι σταθερή:

$$\Theta(e^{it}) = t + 2k\pi.$$

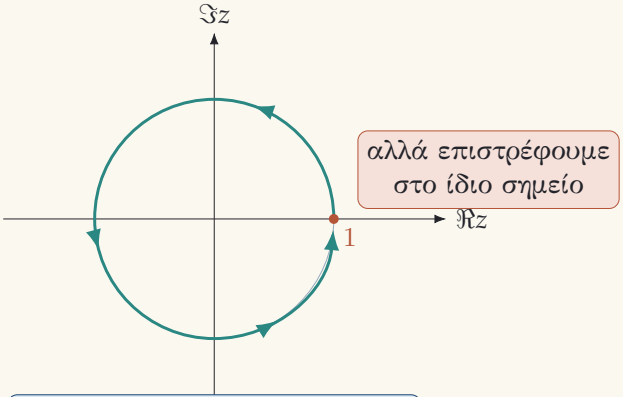
Για $t = 0$ και $t = 2\pi$ παίρνουμε δύο διαφορετικές τιμές για το ίδιο σημείο 1.

Η γεωμετρική ουσία του εμποδίου



μετά από μία πλήρη περιφορά
το όρισμα έχει αυξηθεί κατά 2π

Η γεωμετρική ουσία του εμποδίου



Το πεδίο του κύριου κλάδου

Για τον κύριο κλάδο αφαιρούμε τον αρνητικό πραγματικό ημιάξονα:

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].$$

Το πεδίο του κύριου κλάδου

Για τον κύριο κλάδο αφαιρούμε τον αρνητικό πραγματικό ημιάξονα:

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].$$

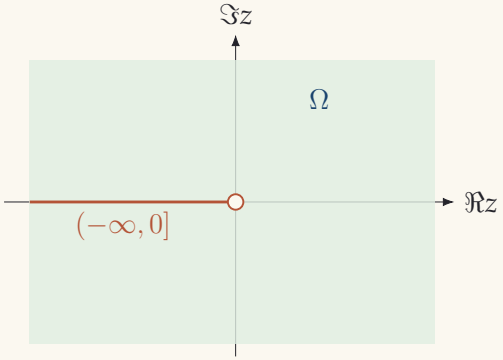
Στο Ω η $\operatorname{Arg} z$ είναι συνεχής.

Το πεδίο του κύριου κλάδου

Για τον κύριο κλάδο αφαιρούμε τον αρνητικό πραγματικό ημιάξονα:

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].$$

Στο Ω η $\operatorname{Arg} z$ είναι συνεχής.

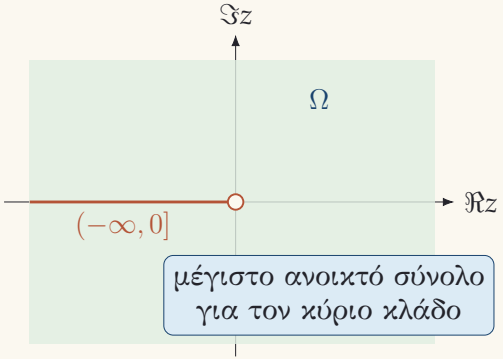


Το πεδίο του κύριου κλάδου

Για τον κύριο κλάδο αφαιρούμε τον αρνητικό πραγματικό ημιάξονα:

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].$$

Στο Ω η $\operatorname{Arg} z$ είναι συνεχής.



Ένας τύπος για το κύριο όρισμα

Στο κομμένο επίπεδο

$$\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$$

ισχύει

$$\boxed{\operatorname{Arg}(x+iy) = 2\arctan\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right).}$$

Ένας τύπος για το κύριο όρισμα

Στο κομμένο επίπεδο

$$\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$$

ισχύει

$$\boxed{\operatorname{Arg}(x+iy) = 2\arctan\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right).}$$

Ο παρονομαστής είναι θετικός στο κομμένο επίπεδο:

$$x + \sqrt{x^2+y^2} > 0.$$

Ένας τύπος για το κύριο όρισμα

Στο κομμένο επίπεδο

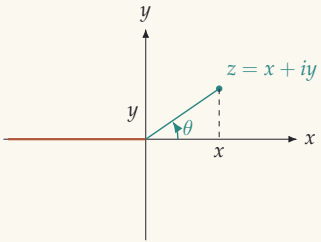
$$\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$$

ισχύει

$$\boxed{\operatorname{Arg}(x+iy) = 2\arctan\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right).}$$

Ο παρονομαστής είναι θετικός στο κομμένο επίπεδο:

$$x + \sqrt{x^2+y^2} > 0.$$



Απόδειξη του τύπου μισής γωνίας

Θέτουμε

$$\theta = \operatorname{Arg}(x + iy), \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Απόδειξη του τύπου μισής γωνίας

Θέτουμε

$$\theta = \operatorname{Arg}(x + iy), \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Τότε

$$\cos\theta = \frac{x}{r}, \qquad \sin\theta = \frac{y}{r}.$$

Απόδειξη του τύπου μισής γωνίας

Θέτουμε

$$\theta = \operatorname{Arg}(x + iy), \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Τότε

$$\cos\theta = \frac{x}{r}, \qquad \sin\theta = \frac{y}{r}.$$

Επειδή $-\pi < \theta < \pi$, έχουμε

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}.$$

Απόδειξη του τύπου μισής γωνίας

Θέτουμε

$$\theta = \operatorname{Arg}(x + iy), \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Τότε

$$\cos\theta = \frac{x}{r}, \qquad \sin\theta = \frac{y}{r}.$$

Επειδή $-\pi < \theta < \pi$, έχουμε

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}.$$

Χρησιμοποιούμε

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta}.$$

Απόδειξη του τύπου μισής γωνίας

Θέτουμε

$$\theta = \operatorname{Arg}(x + iy), \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Τότε

$$\cos\theta = \frac{x}{r}, \qquad \sin\theta = \frac{y}{r}.$$

Επειδή $-\pi < \theta < \pi$, έχουμε

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}.$$

Χρησιμοποιούμε

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta}.$$

Άρα

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{y/r}{1 + x/r} = \frac{y}{x + r}.$$

Απόδειξη του τύπου μισής γωνίας

Θέτουμε

$$\theta = \operatorname{Arg}(x + iy), \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Τότε

$$\cos\theta = \frac{x}{r}, \qquad \sin\theta = \frac{y}{r}.$$

Επειδή $-\pi < \theta < \pi$, έχουμε

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}.$$

Χρησιμοποιούμε

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta}.$$

Άρα

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{y/r}{1 + x/r} = \frac{y}{x + r}.$$

Επειδή η arctan αντιστρέφει την tan στο $(-\pi/2, \pi/2)$,

$$\theta = 2\arctan\left(\frac{y}{x + r}\right).$$

Το Arg είναι διαφορίσιμο στο κομμένο επίπεδο

Από τον προηγούμενο τύπο προκύπτει ότι

$$\mathrm{Arg} : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \longrightarrow (-\pi, \pi)$$

είναι συνεχής και πραγματικά διαφορίσιμη.

Το Arg είναι διαφορίσιμο στο κομμένο επίπεδο

Από τον προηγούμενο τύπο προκύπτει ότι

$$\operatorname{Arg} : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \longrightarrow (-\pi, \pi)$$

είναι συνεχής και πραγματικά διαφορίσιμη. Αν $z = x + iy$, τότε

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Arg} z = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Arg} z = \frac{x}{x^2 + y^2}.}$$

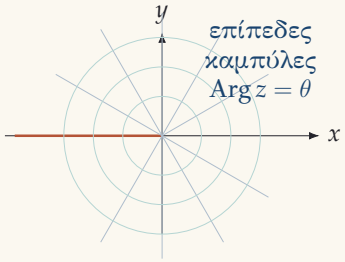
Το Arg είναι διαφορίσιμο στο κομμένο επίπεδο

Από τον προηγούμενο τύπο προκύπτει ότι

$$\operatorname{Arg} : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \longrightarrow (-\pi, \pi)$$

είναι συνεχής και πραγματικά διαφορίσιμη. Αν $z = x + iy$, τότε

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Arg} z = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Arg} z = \frac{x}{x^2 + y^2}.}$$



Ο κύριος λογάριθμος είναι ολόμορφος

Στο

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$$

γράφουμε

$$\operatorname{Log} z = u(x, y) + iv(x, y),$$

όπου

$$u(x, y) = \ln |z| = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2), \qquad v(x, y) = \operatorname{Arg} z.$$

Ο κύριος λογάριθμος είναι ολόμορφος

Στο

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$$

γράφουμε

$$\operatorname{Log} z = u(x, y) + iv(x, y),$$

όπου

$$u(x, y) = \ln |z| = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2), \qquad v(x, y) = \operatorname{Arg} z.$$

$$u_x = \frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad u_y = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Ο κύριος λογάριθμος είναι ολόμορφος

Στο

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$$

γράφουμε

$$\operatorname{Log} z = u(x, y) + iv(x, y),$$

όπου

$$u(x, y) = \ln |z| = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2), \qquad v(x, y) = \operatorname{Arg} z.$$

$$u_x = \frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad u_y = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Από το προηγούμενο θεώρημα:

$$v_x = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \qquad v_y = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Ο κύριος λογάριθμος είναι ολόμορφος

Στο

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$$

γράφουμε

$$\operatorname{Log} z = u(x,y) + iv(x,y),$$

όπου

$$u(x,y) = \ln|z| = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2), \qquad v(x,y) = \operatorname{Arg} z.$$

$$u_x = \frac{x}{x^2+y^2}, \qquad u_y = \frac{y}{x^2+y^2}.$$

Από το προηγούμενο θεώρημα:

$$v_x = -\frac{y}{x^2+y^2}, \qquad v_y = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Άρα

$$\boxed{u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x.}$$

Η παράγωγος του Log

Από τις Cauchy–Riemann, η Log είναι ολόμορφη στο

$$\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].$$

Η παράγωγος του Log

Από τις Cauchy–Riemann, η Log είναι ολόμορφη στο

$$\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].$$

Και

$$\begin{aligned}(\operatorname{Log} z)' &= u_x + iv_x \\ &= \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} \\ &= \frac{x-iy}{x^2+y^2} \\ &= \frac{1}{x+iy}.\end{aligned}$$

Η παράγωγος του Log

Από τις Cauchy–Riemann, η Log είναι ολόμορφη στο

$$\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].$$

Και

$$\begin{aligned}(\operatorname{Log} z)' &= u_x + iv_x \\ &= \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} \\ &= \frac{x-iy}{x^2+y^2} \\ &= \frac{1}{x+iy}.\end{aligned}$$

Άρα

$$\boxed{(\operatorname{Log} z)' = \frac{1}{z}.}$$

Η παράγωγος του Log

Από τις Cauchy–Riemann, η Log είναι ολόμορφη στο

$$\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].$$

Και

$$\begin{aligned}(\operatorname{Log} z)' &= u_x + iv_x \\ &= \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} \\ &= \frac{x-iy}{x^2+y^2} \\ &= \frac{1}{x+iy}.\end{aligned}$$

Άρα

$$\boxed{(\operatorname{Log} z)' = \frac{1}{z}.}$$

Ο πραγματικός τύπος επιβιώνει, αλλά μόνο αφού διαλέξουμε κλάδο.

Γενικοί κλάδοι του λογαρίθμου

Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ ο κλάδος

$$\log_\alpha z = \ln |z| + i \arg_\alpha z$$

είναι ολόμορφος στο επίπεδο από το οποίο αφαιρούμε την ημιευθεία

$$\{re^{i\alpha} : r \geq 0\}.$$

Γενικοί κλάδοι του λογαρίθμου

Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ ο κλάδος

$$\log_\alpha z = \ln |z| + i \arg_\alpha z$$

είναι ολόμορφος στο επίπεδο από το οποίο αφαιρούμε την ημιευθεία

$$\{re^{i\alpha} : r \geq 0\}.$$

Και σε αυτό το πεδίο

$$\boxed{(\log_\alpha z)' = \frac{1}{z}.}$$

Γενικοί κλάδοι του λογαρίθμου

Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ ο κλάδος

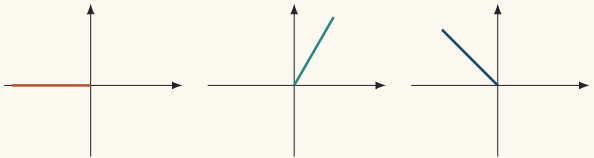
$$\log_\alpha z = \ln |z| + i \arg_\alpha z$$

είναι ολόμορφος στο επίπεδο από το οποίο αφαιρούμε την ημιευθεία

$$\{re^{i\alpha} : r \geq 0\}.$$

Και σε αυτό το πεδίο

$$\boxed{(\log_\alpha z)' = \frac{1}{z}.}$$



Η γεωμετρία του Log

Αν

$$w = \operatorname{Log} z,$$

τότε

$$\Re w = \ln |z|, \qquad \Im w = \operatorname{Arg} z.$$

Η γεωμετρία του Log

Αν

$$w = \operatorname{Log} z,$$

τότε

$$\Re w = \ln |z|, \qquad \Im w = \operatorname{Arg} z.$$

Άρα

$$|z| = r \quad \longmapsto \quad \Re w = \ln r,$$

και

$$\operatorname{Arg} z = \theta \quad \longmapsto \quad \Im w = \theta.$$

Η γεωμετρία του Log

Αν

$$w = \operatorname{Log} z,$$

τότε

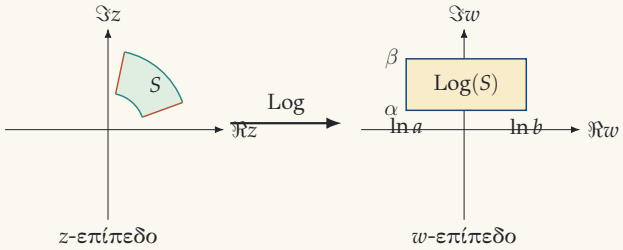
$$\Re w = \ln |z|, \qquad \Im w = \operatorname{Arg} z.$$

Άρα

$$|z| = r \quad \longmapsto \quad \Re w = \ln r,$$

και

$$\operatorname{Arg} z = \theta \quad \longmapsto \quad \Im w = \theta.$$



Η αντιστροφή $w = 1/z$

Αν

$$z = re^{i\theta},$$

τότε

$$\boxed{\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}.}$$

Η αντιστροφή $w = 1/z$

Αν

$$z = re^{i\theta},$$

τότε

$$\boxed{\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}.}$$

Άρα

$$r \longmapsto \frac{1}{r}, \qquad \theta \longmapsto -\theta.$$

Η αντιστροφή $w = 1/z$

Αν

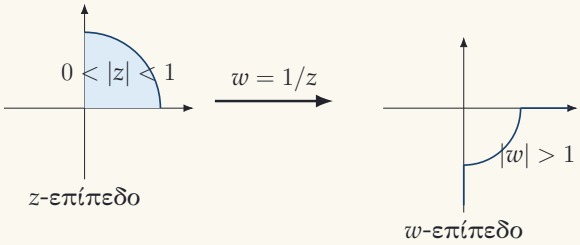
$$z = re^{i\theta},$$

τότε

$$\boxed{\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}.}$$

Άρα

$$r \longmapsto \frac{1}{r}, \qquad \theta \longmapsto -\theta.$$



Η τοπική εικόνα μιας ολόμορφης απεικόνισης

Αν f είναι ολόμορφη κοντά στο z_0, τότε για μικρά h έχουμε

$$f(z_0 + h) \approx f(z_0) + f'(z_0)h.$$

Η τοπική εικόνα μιας ολόμορφης απεικόνισης

Αν f είναι ολόμορφη κοντά στο z_0, τότε για μικρά h έχουμε

$$f(z_0 + h) \approx f(z_0) + f'(z_0)h.$$

Αν

$$f'(z_0) = \rho e^{i\theta}, \qquad \rho > 0,$$

τότε τοπικά

$$h \longmapsto \rho e^{i\theta} h.$$

Η τοπική εικόνα μιας ολόμορφης απεικόνισης

Αν f είναι ολόμορφη κοντά στο z_0, τότε για μικρά h έχουμε

$$f(z_0 + h) \approx f(z_0) + f'(z_0)h.$$

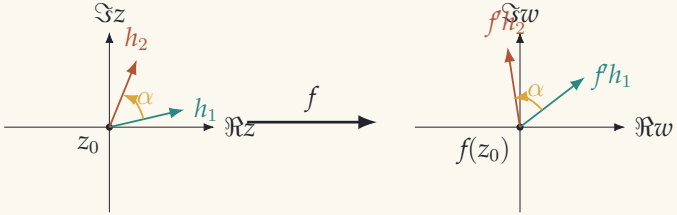
Αν

$$f'(z_0) = \rho e^{i\theta}, \qquad \rho > 0,$$

τότε τοπικά

$$h \longmapsto \rho e^{i\theta} h.$$

Δηλαδή: ομοιοθεσία με λόγο ρ και στροφή κατά θ.



Διατήρηση γωνιών

Έστω δύο καμπύλες γ_1, γ_2 που τέμνονται στο z_0.

Διατήρηση γωνιών

Έστω δύο καμπύλες γ_1, γ_2 που τέμνονται στο z_0. Τα εφαπτόμενα διανύσματα είναι

$$\gamma_1'(t_1), \qquad \gamma_2'(t_2).$$

Διατήρηση γωνιών

Έστω δύο καμπύλες γ_1, γ_2 που τέμνονται στο z_0. Τα εφαπτόμενα διανύσματα είναι

$$\gamma_1'(t_1), \qquad \gamma_2'(t_2).$$

Μετά την f γίνονται

$$(f \circ \gamma_1)'(t_1) = f'(z_0)\gamma_1'(t_1),$$
$$(f \circ \gamma_2)'(t_2) = f'(z_0)\gamma_2'(t_2).$$

Διατήρηση γωνιών

Έστω δύο καμπύλες γ_1, γ_2 που τέμνονται στο z_0. Τα εφαπτόμενα διανύσματα είναι

$$\gamma_1'(t_1), \qquad \gamma_2'(t_2).$$

Μετά την f γίνονται

$$(f \circ \gamma_1)'(t_1) = f'(z_0)\gamma_1'(t_1),$$
$$(f \circ \gamma_2)'(t_2) = f'(z_0)\gamma_2'(t_2).$$

Αν $f'(z_0) = \rho e^{i\theta} \neq 0$, τότε και τα δύο διανύσματα

- στρέφονται κατά την ίδια γωνία θ,
- πολλαπλασιάζονται κατά τον ίδιο θετικό αριθμό ρ.

Διατήρηση γωνιών

Έστω δύο καμπύλες γ_1, γ_2 που τέμνονται στο z_0. Τα εφαπτόμενα διανύσματα είναι

$$\gamma_1'(t_1), \qquad \gamma_2'(t_2).$$

Μετά την f γίνονται

$$(f \circ \gamma_1)'(t_1) = f'(z_0)\gamma_1'(t_1),$$
$$(f \circ \gamma_2)'(t_2) = f'(z_0)\gamma_2'(t_2).$$

Αν $f'(z_0) = \rho e^{i\theta} \neq 0$, τότε και τα δύο διανύσματα

- στρέφονται κατά την ίδια γωνία θ,
- πολλαπλασιάζονται κατά τον ίδιο θετικό αριθμό ρ.

Άρα η γωνία μεταξύ τους δεν αλλάζει.

Σύμμορφες απεικονίσεις

Definition

Μια απεικόνιση που διατηρεί τις προσανατολισμένες γωνίες λέγεται *σύμμορφη*.

Σύμμορφες απεικονίσεις

Definition

Μια απεικόνιση που διατηρεί τις προσανατολισμένες γωνίες λέγεται *σύμμορφη*.

Theorem

Αν f είναι ολόμορφη κοντά στο z_0 και

$$f'(z_0) \neq 0,$$

τότε η f είναι σύμμορφη στο z_0.

Σύμμορφες απεικονίσεις

Definition

Μια απεικόνιση που διατηρεί τις προσανατολισμένες γωνίες λέγεται *σύμμορφη*.

Theorem

Αν f είναι ολόμορφη κοντά στο z_0 και

$$f'(z_0) \neq 0,$$

τότε η f είναι σύμμορφη στο z_0.

Η μιγαδική παράγωγος είναι τοπικά πολλαπλασιασμός με μιγαδικό αριθμό.

Γιατί χρειάζεται $f'(z_0) \neq 0$

Πάρτε

$$f(z) = z^2.$$

Γιατί χρειάζεται $f'(z_0) \neq 0$

Πάρτε

$$f(z) = z^2.$$

Στο 0 έχουμε

$$f'(0) = 0.$$

Γιατί χρειάζεται $f'(z_0) \neq 0$

Πάρτε

$$f(z) = z^2.$$

Στο 0 έχουμε

$$f'(0) = 0.$$

Αν

$$z = re^{i\theta},$$

τότε

$$f(z) = r^2 e^{2i\theta}.$$

Γιατί χρειάζεται $f'(z_0) \neq 0$

Πάρτε

$$f(z) = z^2.$$

Στο 0 έχουμε

$$f'(0) = 0.$$

Αν

$$z = re^{i\theta},$$

τότε

$$f(z) = r^2 e^{2i\theta}.$$

Άρα στο 0 η γωνία διπλασιάζεται.

Γιατί χρειάζεται $f'(z_0) \neq 0$

Πάρτε

$$f(z) = z^2.$$

Στο 0 έχουμε

$$f'(0) = 0.$$

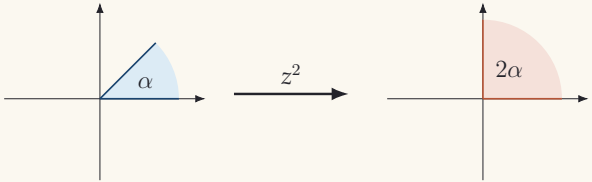
Αν

$$z = re^{i\theta},$$

τότε

$$f(z) = r^2 e^{2i\theta}.$$

Άρα στο 0 η γωνία διπλασιάζεται.



Σύνοψη

- Οι μιγαδικές τριγωνομετρικές ορίζονται μέσω της εκθετικής.

Σύνοψη

- Οι μιγαδικές τριγωνομετρικές ορίζονται μέσω της εκθετικής.
- Το $\arg z$ είναι σύνολο τιμών· το $\operatorname{Arg} z$ είναι μία συγκεκριμένη επιλογή.

Σύνοψη

- Οι μιγαδικές τριγωνομετρικές ορίζονται μέσω της εκθετικής.
- Το $\arg z$ είναι σύνολο τιμών· το $\operatorname{Arg} z$ είναι μία συγκεκριμένη επιλογή.
- Ο μιγαδικός λογάριθμος είναι πλειότιμος.

Σύνοψη

- Οι μιγαδικές τριγωνομετρικές ορίζονται μέσω της εκθετικής.
- Το $\arg z$ είναι σύνολο τιμών· το $\operatorname{Arg} z$ είναι μία συγκεκριμένη επιλογή.
- Ο μιγαδικός λογάριθμος είναι πλειότιμος.
- Ο κύριος κλάδος

$$\operatorname{Log} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$$

είναι ολόμορφος στο $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

Σύνοψη

- Οι μιγαδικές τριγωνομετρικές ορίζονται μέσω της εκθετικής.
- Το $\arg z$ είναι σύνολο τιμών· το $\operatorname{Arg} z$ είναι μία συγκεκριμένη επιλογή.
- Ο μιγαδικός λογάριθμος είναι πλειότιμος.
- Ο κύριος κλάδος
$$\operatorname{Log} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$$
είναι ολόμορφος στο $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.
- Εκεί
$$(\operatorname{Log} z)' = \frac{1}{z}.$$

Σύνοψη

- Οι μιγαδικές τριγωνομετρικές ορίζονται μέσω της εκθετικής.
- Το $\arg z$ είναι σύνολο τιμών· το $\operatorname{Arg} z$ είναι μία συγκεκριμένη επιλογή.
- Ο μιγαδικός λογάριθμος είναι πλειότιμος.
- Ο κύριος κλάδος
$$\operatorname{Log} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$$
είναι ολόμορφος στο $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.
- Εκεί
$$(\operatorname{Log} z)' = \frac{1}{z}.$$

- Ολόμορφες συναρτήσεις με $f'(z_0) \neq 0$ διατηρούν τις γωνίες στο z_0.