Μιγαδική Ανάλυση I

1. Μιγαδικοί αριθμοί, γεωμετρία και βασικές απεικονίσεις

1 Οι μιγαδικοί αριθμοί

Η μετάβαση από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{C}$ μπορεί να ιδωθεί ως ένα ακόμη βήμα στην επέκταση των αριθμητικών συστημάτων. Για παράδειγμα, η εξίσωση

$$x^2 = 2$$

δεν έχει λύση στο $\mathbb{Q}$, αλλά έχει λύση στο $\mathbb{R}$. Αντίθετα, η εξίσωση

$$x^2 = -1$$

δεν έχει λύση στο $\mathbb{R}$. Εισάγουμε λοιπόν ένα νέο σύμβολο i με την ιδιότητα

$$i^2 = -1.$$

Ορισμός 1.1. Το σύνολο των *μιγαδικών αριθμών* είναι

$$\mathbb{C} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Αν $z = x + iy$, ορίζουμε

$$\operatorname{Re} z = x, \qquad \operatorname{Im} z = y.$$

Η γραφή $z = x + iy$ είναι μοναδική. Η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός γίνονται με τους συνηθισμένους αλγεβρικούς κανόνες, χρησιμοποιώντας τη σχέση $i^2 = -1$:

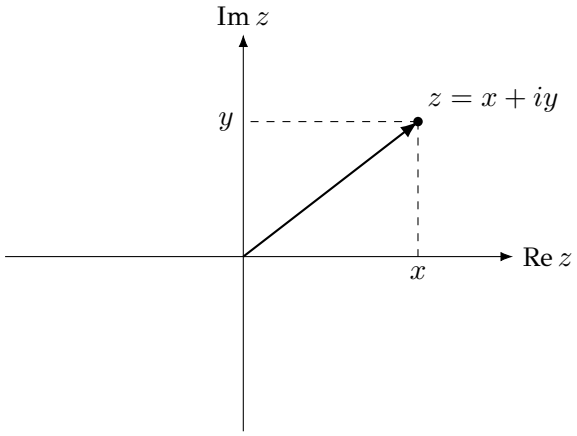
$$(x + iy) + (u + iv) = (x + u) + i(y + v),$$

και

$$(x + iy)(u + iv) = (xu - yv) + i(xv + yu).$$

Το μιγαδικό επίπεδο

Ταυτίζουμε τον μιγαδικό αριθμό $z = x + iy$ με το σημείο $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Έτσι ο οριζόντιος άξονας είναι ο πραγματικός άξονας και ο κατακόρυφος ο φανταστικός άξονας.



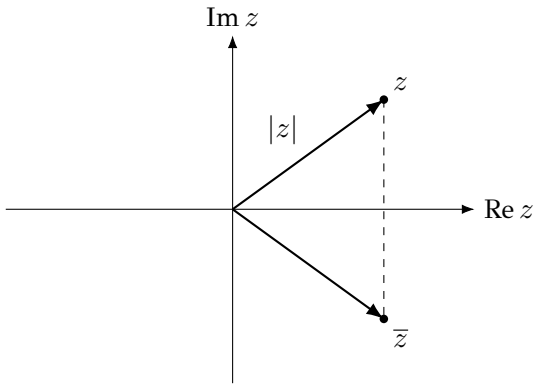
Ορισμός 1.2. Αν $z = x + iy$, ο *συζυγής* του z είναι

$$\overline{z} = x - iy,$$

και το *μέτρο* του z είναι

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Γεωμετρικά, το $\overline{z}$ είναι η ανάκλαση του z ως προς τον πραγματικό άξονα, ενώ το $|z|$ είναι η απόσταση του z από το 0.



Οι βασικές ταυτότητες είναι

$$z\overline{z} = |z|^2, \qquad \operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2}, \qquad \operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$

Ειδικότερα, αν $z \neq 0$, τότε

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Άρα κάθε μη μηδενικός μιγαδικός έχει πολλαπλασιαστικό αντίστροφο.

Πρόταση 1.3 (Βασικές ιδιότητες του μέτρου). *Για κάθε $z, w \in \mathbb{C}$ ισχύουν*

$$|zw| = |z|\,|w|$$

και

$$|z + w| \leq |z| + |w|.$$

Απόδειξη. Η πρώτη σχέση προκύπτει από

$$|zw|^2 = zw\,\overline{zw} = zw\,\overline{z}\,\overline{w} = |z|^2|w|^2.$$

Για τη δεύτερη,

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w)(\overline{z} + \overline{w}) \\ &= |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re}(z\overline{w}) \\ &\leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z\overline{w}| \\ &= (|z| + |w|)^2. \end{aligned}$$

Παίρνοντας τετραγωνικές ρίζες παίρνουμε την τριγωνική ανισότητα. □

Το μέτρο ως απόσταση

Αν $z_1 = x_1 + iy_1$ και $z_2 = x_2 + iy_2$, τότε

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Επομένως $|z_1 - z_2|$ είναι ακριβώς η ευκλείδεια απόσταση των δύο σημείων στο επίπεδο.

Παράδειγμα 1.4 (Απόσταση δύο μιγαδικών)**.** Θεωρούμε

$$z_1 = 2 + 4i, \qquad z_2 = 5 + i.$$

Τότε

$$|z_1| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}, \qquad |z_2| = \sqrt{26},$$

ενώ

$$|z_1 - z_2| = |-3 + 3i| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

Άρα το z_2 βρίσκεται μακρύτερα από το 0, και η μεταξύ τους απόσταση είναι $3\sqrt{2}$.

Παρατήρηση 1.5. Στο $\mathbb{C}$ δεν υπάρχει φυσική διάταξη συμβατή με τις πράξεις όπως στο $\mathbb{R}$. Έτσι εκφράσεις όπως $z_1 < z_2$ δεν έχουν γενικά νόημα. Μπορούμε όμως να συγκρίνουμε τα πραγματικά μεγέθη $|z_1|$ και $|z_2|$.

Κύκλοι, δίσκοι και ελλείψεις

Η γεωμετρική ερμηνεία του $|z - z_0|$ κάνει πολλές εξισώσεις στο $\mathbb{C}$ άμεσα αναγνωρίσιμες.

Παράδειγμα 1.6. Να περιγραφούν γεωμετρικά τα παρακάτω σύνολα:

1. $|z + 4 - i| = 2$,
2. $|z + 4 - i| \leq 2$,
3. $|z + 2 + 2i| + |z + 1 + i| = 3\sqrt{2}$.

Για τα δύο πρώτα γράφουμε

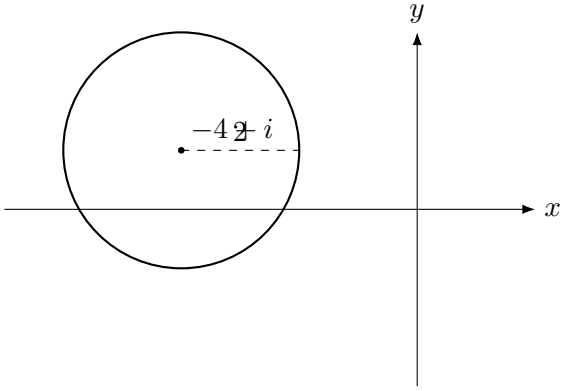
$$|z + 4 - i| = |z - (-4 + i)|.$$

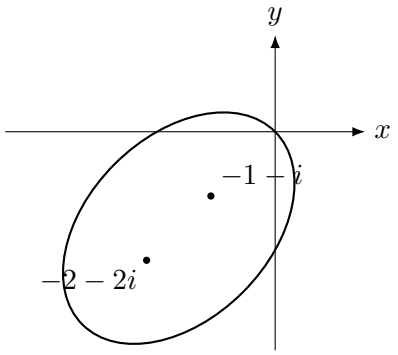
Άρα το πρώτο σύνολο είναι ο κύκλος με κέντρο $-4 + i$ και ακτίνα 2, ενώ το δεύτερο είναι ο αντίστοιχος κλειστός δίσκος.

Για το τρίτο,

$$|z - (-2 - 2i)| + |z - (-1 - i)| = 3\sqrt{2}.$$

Πρόκειται για τα σημεία των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από τα δύο σταθερά σημεία $-2 - 2i$ και $-1 - i$ είναι σταθερό. Άρα είναι έλλειψη με εστίες αυτά τα δύο σημεία.





2 Πολική μορφή

Η καρτεσιανή γραφή $z = x + iy$ είναι χρήσιμη για πρόσθεση και αφαίρεση. Για πολλαπλασιασμό, δυνάμεις και ρίζες είναι συχνά καλύτερη η πολική μορφή.

Για $\theta \in \mathbb{R}$ χρησιμοποιούμε τη σημειογραφία

$$e^{i\theta} := \cos\theta + i\sin\theta.$$

Προς το παρόν αυτό είναι απλώς συντομογραφία. Η μιγαδική εκθετική συνάρτηση θα μελετηθεί αργότερα συστηματικά.

Αν $z = x + iy \neq 0$, γράφουμε

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

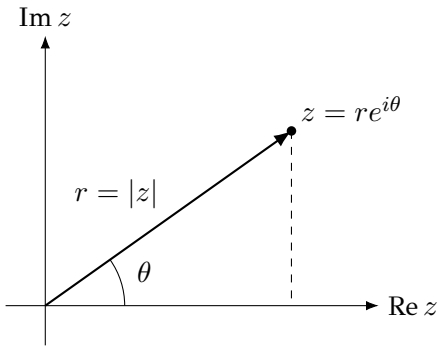
Υπάρχει $\theta \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta.$$

Άρα

$$\boxed{z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}.}$$

Ο αριθμός θ λέγεται *όρισμα* του z και γράφουμε $\theta = \arg(z)$. Δεν είναι μοναδικός: αν θ είναι όρισμα, τότε και $\theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, είναι όρισμα.



Θεώρημα 2.1. *Για κάθε $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$,*

$$e^{i\theta}e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)}.$$

Απόδειξη. Από τους τύπους πρόσθεσης,

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\varphi + i\sin\varphi) &= \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi + i(\sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi)\\ &= \cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi).\end{aligned}$$

□

Άρα αν

$$z = re^{i\theta}, \qquad w = se^{i\varphi},$$

τότε

$$zw = rs\,e^{i(\theta+\varphi)}.$$

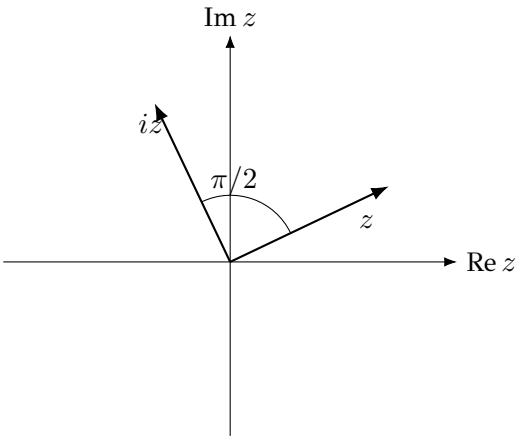
Δηλαδή στον πολλαπλασιασμό *πολλαπλασιάζονται τα μέτρα και προστίθενται τα ορίσματα.*

Παρατήρηση 2.2 (Μια πρώτη γεωμετρική πράξη). Ο πολλαπλασιασμός με $i = e^{i\pi/2}$ στρέφει κάθε σημείο κατά γωνία $\pi/2$ αριστερόστροφα γύρω από το 0:

$$z = x + iy \quad \Longrightarrow \quad iz = -y + ix.$$

Στις συντεταγμένες,

$$(x, y) \longmapsto (-y, x).$$



Παράδειγμα 2.3 (Πολική μορφή). Για τους αριθμούς

$$5, \qquad -3i, \qquad \sqrt{3}+i, \qquad 1+i, \qquad 1-i, \qquad -1-i,$$

βρίσκουμε το μέτρο και ένα όρισμα και τους γράφουμε σε πολική μορφή:

z	$\lvert z\rvert$	θ	$z = \lvert z\rvert e^{i\theta}$
5	5	0	$5e^{i0}$
$-3i$	3	$-\pi/2$	$3e^{-i\pi/2}$
$\sqrt{3}+i$	2	$\pi/6$	$2e^{i\pi/6}$
$1+i$	$\sqrt{2}$	$\pi/4$	$\sqrt{2}e^{i\pi/4}$
$1-i$	$\sqrt{2}$	$-\pi/4$	$\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$
$-1-i$	$\sqrt{2}$	$-3\pi/4$	$\sqrt{2}e^{-3i\pi/4}$

Φυσικά, σε κάθε γραμμή μπορούμε να αντικαταστήσουμε το θ με $\theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

3 Εκθετική μορφή και γινόμενο μιγαδικών

Θυμόμαστε ότι για $\theta \in \mathbb{R}$ ορίζουμε

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Η σημειογραφία αυτή δεν είναι τυχαία: η μιγαδική εκθετική ικανοποιεί τον ίδιο βασικό κανόνα με την πραγματική εκθετική.

Πρόταση 3.1. *Για κάθε $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$,*

$$e^{i(\theta+\varphi)} = e^{i\theta}e^{i\varphi}.$$

Απόδειξη. Από τον ορισμό,

$$e^{i(\theta+\varphi)} = \cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi).$$

Χρησιμοποιώντας τους τύπους πρόσθεσης,

$$\cos(\theta+\varphi) = \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi$$

και

$$\sin(\theta+\varphi) = \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi.$$

Άρα

$$\begin{aligned} e^{i(\theta+\varphi)} &= \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi \\ &\quad + i\big(\sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi\big) \\ &= (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ &= e^{i\theta}e^{i\varphi}. \end{aligned}$$

□

Τώρα, αν

$$\alpha = a + ib \in \mathbb{C},$$

ορίζουμε

$$e^{\alpha} = e^{a}e^{ib}.$$

Πρόταση 3.2. *Για κάθε* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

$$\boxed{e^{\alpha+\beta} = e^{\alpha}e^{\beta}.}$$

Απόδειξη. Γράφουμε

$$\alpha = a_1 + ia_2, \qquad \beta = b_1 + ib_2.$$

Τότε

$$\alpha + \beta = (a_1 + b_1) + i(a_2 + b_2),$$

οπότε

$$\begin{aligned} e^{\alpha+\beta} &= e^{a_1+b_1}e^{i(a_2+b_2)} \\ &= e^{a_1}e^{b_1}e^{ia_2}e^{ib_2} \\ &= \big(e^{a_1}e^{ia_2}\big)\big(e^{b_1}e^{ib_2}\big) \\ &= e^{\alpha}e^{\beta}. \end{aligned}$$

□

Η γεωμετρία του γινομένου

Έστω

$$z_1 = r_1e^{i\theta_1}, \qquad z_2 = r_2e^{i\theta_2}.$$

Τότε

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1r_2e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} \\ &= r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}. \end{aligned}$$

Άρα

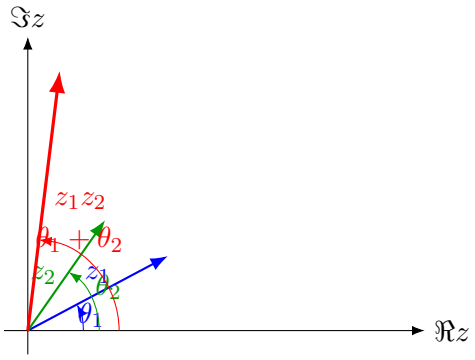
$$\boxed{|z_1z_2| = |z_1||z_2|}$$

και

$$\boxed{\arg(z_1z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \pmod{2\pi}.}$$

Δηλαδή:

στο γινόμενο πολλαπλασιάζουμε τα μήκη και προσθέτουμε τις γωνίες.



Ένα ιδιαίτερα απλό παράδειγμα είναι ο πολλαπλασιασμός με i:

$$i = e^{i\pi/2}.$$

Άρα

$$iz$$

έχει το ίδιο μέτρο με το z, ενώ η γωνία του αυξάνεται κατά $\pi/2$.

Ο πολλαπλασιασμός με i είναι στροφή κατά 90°.

Από τον ίδιο κανόνα προκύπτει αμέσως ότι

$$\left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta}.$$

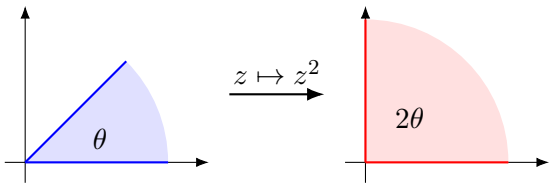
Επομένως η απεικόνιση

$$z \longmapsto z^n$$

κάνει δύο πράγματα:

$$r \longmapsto r^n, \qquad \theta \longmapsto n\theta.$$

Έτσι η γωνία πολλαπλασιάζεται επί n.



4 Οι n-οστές ρίζες ενός μιγαδικού αριθμού

Έστω

$$z = re^{i\theta}, \qquad r > 0.$$

Θέλουμε να βρούμε όλους τους $w \in \mathbb{C}$ για τους οποίους

$$w^n = z.$$

Γράφουμε

$$w = te^{i\varphi}, \qquad t \geq 0.$$

Τότε

$$w^n = t^n e^{in\varphi}.$$

Η εξίσωση

$$w^n = re^{i\theta}$$

ισοδυναμεί με

$$t^n = r$$

και

$$e^{in\varphi} = e^{i\theta}.$$

Η πρώτη εξίσωση δίνει

$$t = r^{1/n}.$$

Για τη δεύτερη πρέπει

$$n\varphi = \theta + 2\pi k, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Άρα

$$\varphi = \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}.$$

Έτσι οι λύσεις είναι

$$\boxed{w_k = r^{1/n} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.}$$

Δεν χρειάζονται άλλες τιμές του k, επειδή η αντικατάσταση $k \mapsto k + n$ προσθέτει 2π στη γωνία και επομένως δίνει το ίδιο σημείο.

Οι ρίζες της μονάδας

Θέτουμε τώρα

$$z = 1 = e^{2\pi i m}.$$

Η εξίσωση

$$w^n = 1$$

δίνει

$$|w|^n = 1,$$

άρα

$$|w| = 1.$$

Επομένως γράφουμε

$$w = e^{i\varphi}.$$

Τότε

$$w^n = e^{in\varphi} = 1.$$

Αλλά

$$1 = e^{2\pi i k}, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

οπότε

$$n\varphi = 2\pi k.$$

Άρα

$$\varphi = \frac{2\pi k}{n}.$$

Συνεπώς οι n-οστές ρίζες της μονάδας είναι

$$\boxed{\omega_k = e^{2\pi i k/n}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.}$$

Είναι ακριβώς n διαφορετικοί αριθμοί.

Πράγματι, αν

$$e^{2\pi ik/n} = e^{2\pi i\ell/n},$$

τότε

$$\frac{2\pi(k-\ell)}{n} \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

Άρα

$$n \mid (k-\ell).$$

Για

$$0 \leq k, \ell \leq n-1$$

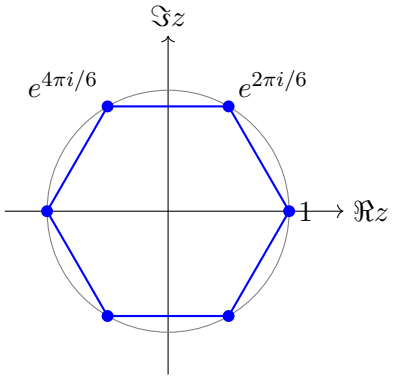
αυτό συνεπάγεται

$$k = \ell.$$

Γεωμετρικά, οι ρίζες αυτές βρίσκονται στον μοναδιαίο κύκλο και οι διαδοχικές γωνίες τους διαφέρουν κατά

$$\frac{2\pi}{n}.$$

Επομένως αποτελούν τις κορυφές κανονικού n-γώνου.



Αν θέσουμε

$$\omega = e^{2\pi i/n},$$

τότε όλες οι ρίζες της μονάδας γράφονται

$$\boxed{1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}.}$$

Επιπλέον,

$$\omega^n = 1.$$

5 Όρια και συμπαγή σύνολα

Για να ορίσουμε τη μιγαδική παράγωγο θα χρειαστούμε πρώτα την έννοια του ορίου στο μιγαδικό επίπεδο.

Επειδή

$$\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2,$$

οι βασικές τοπολογικές έννοιες εκφράζονται μέσω της απόστασης

$$|z-w|.$$

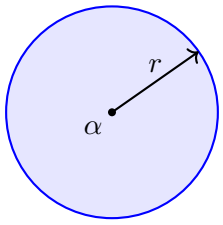
Ανοικτοί και κλειστοί δίσκοι

Ορισμός 5.1. Για $\alpha \in \mathbb{C}$ και $r > 0$, ο *ανοικτός δίσκος* με κέντρο α και ακτίνα r είναι

$$D(\alpha, r) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z - \alpha| < r\}.$$

Ο αντίστοιχος κλειστός δίσκος είναι

$$\overline{D}(\alpha, r) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z - \alpha| \leq r\}.$$

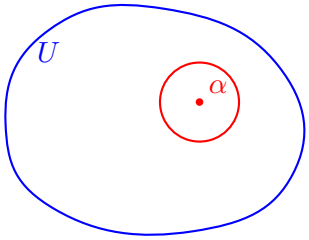


$D(\alpha, r)$

Ορισμός 5.2. Ένα σύνολο $U \subset \mathbb{C}$ λέγεται *ανοικτό* αν για κάθε $\alpha \in U$ υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε

$$D(\alpha, r) \subset U.$$

Η ακτίνα r επιτρέπεται να εξαρτάται από το σημείο α.



$D(\alpha, r) \subset U$

Παραδείγματα ανοικτών συνόλων είναι:

$$\{z = x + iy : \ y > 0\}$$

και

$$\{z = x + iy : \ x > 0, \ y > 0\}.$$

Αν όμως προσθέσουμε στο πρώτο τεταρτημόριο τους δύο άξονες, το σύνολο δεν είναι πλέον ανοικτό.

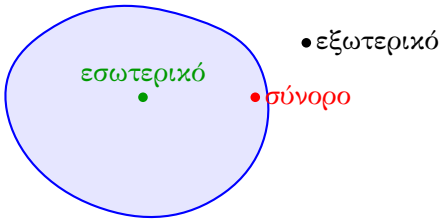
Ορισμός 5.3. Έστω $S \subset \mathbb{C}$.

Ένα σημείο α λέγεται *εσωτερικό σημείο* του S αν υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε

$$D(\alpha, r) \subset S.$$

Ένα σημείο α λέγεται *συνοριακό σημείο* του S αν κάθε δίσκος $D(\alpha, r)$ περιέχει τόσο σημεία του S όσο και σημεία του $\mathbb{C} \setminus S$.

Ένα σημείο α λέγεται *σημείο προσκόλλησης* (adherent point) του S αν κάθε δίσκος $D(\alpha, r)$ περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο του S.



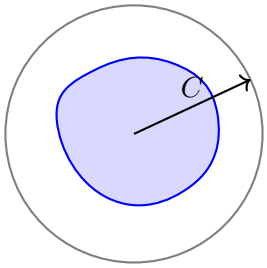
Ορισμός 5.4. Το S λέγεται *κλειστό* αν περιέχει όλα τα συνοριακά σημεία του.

Η *κλειστότητα* του S, συμβολικά $\overline{S}$, είναι το S μαζί με όλα τα συνοριακά του σημεία.

Ορισμός 5.5. Ένα σύνολο $S \subset \mathbb{C}$ λέγεται *φραγμένο* αν υπάρχει $C > 0$ τέτοιο ώστε

$$|z| \leq C \qquad \text{για κάθε } z \in S.$$

Ισοδύναμα, ολόκληρο το S χωρά μέσα σε κάποιον κλειστό δίσκο με κέντρο το 0.



$S \subset \overline{D}(0, C)$

Όρια

Ορισμός 5.6. Έστω $f : S \to \mathbb{C}$, και έστω α σημείο προσκόλλησης του S. Λέμε ότι

$$\lim_{z \to \alpha} f(z) = w$$

αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

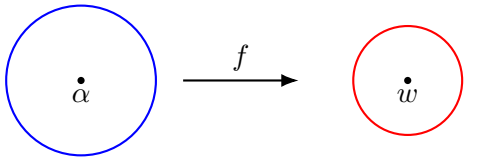
$$z \in S, \qquad |z - \alpha| < \delta$$

να συνεπάγεται

$$|f(z) - w| < \varepsilon.$$

Δηλαδή:

$$\boxed{z \text{ κοντά στο } \alpha \quad \Longrightarrow \quad f(z) \text{ κοντά στο } w.}$$



$|z - \alpha| < \delta$ $\qquad$ $|f(z) - w| < \varepsilon$

Ορισμός 5.7. Αν $\alpha \in S$, η f λέγεται *συνεχής στο* α αν

$$\lim_{z \to \alpha} f(z) = f(\alpha).$$

Οι συνηθισμένοι κανόνες των ορίων ισχύουν όπως στον πραγματικό λογισμό:

$$\lim(f+g) = \lim f + \lim g,$$
$$\lim(fg) = (\lim f)(\lim g),$$

και, όταν ο παρονομαστής δεν μηδενίζεται,

$$\lim \frac{f}{g} = \frac{\lim f}{\lim g}.$$

Ακολουθίες στο $\mathbb{C}$

Λέμε ότι

$$z_n \longrightarrow z$$

αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει N τέτοιο ώστε

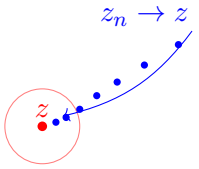
$$n \geq N \quad \Longrightarrow \quad |z_n - z| < \varepsilon.$$

Αν

$$z_n = x_n + iy_n, \qquad z = x + iy,$$

τότε

$$\boxed{z_n \to z \iff x_n \to x \text{ και } y_n \to y.}$$



Πρόταση 5.8. *Αν*

$$z_n \to z,$$

τότε

$$\boxed{|z_n| \to |z|.}$$

Απόδειξη. Από την αντίστροφη τριγωνική ανισότητα,

$$\big||z_n| - |z|\big| \leq |z_n - z|.$$

Εφόσον $z_n \to z$, έχουμε

$$|z_n - z| \to 0,$$

και επομένως

$$\big||z_n| - |z|\big| \to 0.$$

Άρα

$$|z_n| \to |z|.$$

□

Ορισμός 5.9. Μια ακολουθία (z_n) λέγεται *ακολουθία Cauchy* αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει N τέτοιο ώστε

$$m, n \geq N \quad \Longrightarrow \quad |z_m - z_n| < \varepsilon.$$

Αν

$$z_n = x_n + iy_n,$$

τότε

$$(z_n) \text{ είναι Cauchy } \iff (x_n) \text{ και } (y_n) \text{ είναι Cauchy.}$$

Επειδή κάθε πραγματική ακολουθία Cauchy συγκλίνει, παίρνουμε:

Πρόταση 5.10. *Κάθε ακολουθία Cauchy στο $\mathbb{C}$ συγκλίνει.*

Με άλλα λόγια, ο μετρικός χώρος $\mathbb{C}$ είναι *πλήρης*.

6 Συμπαγή σύνολα

Ορισμός 6.1. Ένα σημείο $v \in \mathbb{C}$ λέγεται *σημείο συσσώρευσης* μιας ακολουθίας (z_n) αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν άπειρα n τέτοια ώστε

$$|z_n - v| < \varepsilon.$$

Ισοδύναμα, κάποια υπακολουθία της (z_n) συγκλίνει στο v.

Ορισμός 6.2. Ένα σύνολο $K \subset \mathbb{C}$ λέγεται *συμπαγές* αν κάθε ακολουθία $(z_n) \subset K$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία με όριο που ανήκει στο K.

Η κρίσιμη πρόταση στο $\mathbb{C}$ είναι η εξής.

Θεώρημα 6.3 (Heine–Borel). *Ένα σύνολο $K \subset \mathbb{C}$ είναι συμπαγές αν και μόνο αν είναι κλειστό και φραγμένο.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε πρώτα ότι το K είναι συμπαγές.

Αν το K δεν ήταν φραγμένο, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θα μπορούσαμε να επιλέξουμε $z_n \in K$ τέτοιο ώστε

$$|z_n| > n.$$

Επειδή το K είναι συμπαγές, η ακολουθία (z_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία:

$$z_{n_k} \to z \qquad \text{για κάποιο } z \in K.$$

Από την προηγούμενη πρόταση,

$$|z_{n_k}| \to |z| < \infty.$$

Από την άλλη,

$$|z_{n_k}| > n_k \to \infty,$$

που είναι άτοπο.

Άρα το K είναι φραγμένο.

Για να δείξουμε ότι είναι κλειστό, έστω

$$z \in \overline{K}.$$

Τότε για κάθε n μπορούμε να επιλέξουμε $z_n \in K$ ώστε

$$|z_n - z| < \frac{1}{n}.$$

Άρα

$$z_n \to z.$$

Επειδή το K είναι συμπαγές, υπάρχει υπακολουθία

$$z_{n_k} \to w \qquad \text{για κάποιο } w \in K.$$

Όμως, ως υπακολουθία της (z_n), έχουμε επίσης

$$z_{n_k} \to z.$$

Από τη μοναδικότητα του ορίου,

$$w = z.$$

Επομένως

$$z \in K,$$

και άρα το K είναι κλειστό.

Αντίστροφα, έστω ότι το K είναι κλειστό και φραγμένο. Για κάθε ακολουθία

$$z_n = x_n + iy_n \in K$$

οι πραγματικές ακολουθίες (x_n) και (y_n) είναι φραγμένες.

Από το θεώρημα Bolzano–Weierstrass υπάρχει υπακολουθία (x_{n_k}) που συγκλίνει σε κάποιο $a \in \mathbb{R}$. Από την αντίστοιχη υπακολουθία (y_{n_k}) επιλέγουμε υπο-υπακολουθία $(y_{n_{k_j}})$ που συγκλίνει σε κάποιο $b \in \mathbb{R}$.

Τότε

$$x_{n_{k_j}} \to a, \qquad y_{n_{k_j}} \to b,$$

και επομένως

$$z_{n_{k_j}} = x_{n_{k_j}} + iy_{n_{k_j}} \longrightarrow a + ib.$$

Επειδή το K είναι κλειστό και όλα τα $z_{n_{k_j}}$ ανήκουν στο K, έχουμε

$$a + ib \in K.$$

Άρα κάθε ακολουθία στο K έχει συγκλίνουσα υπακολουθία με όριο στο K, οπότε το K είναι συμπαγές. □

Γιατί μας ενδιαφέρει η συμπάγεια;

Πρόταση 6.4. *Αν $K \subset \mathbb{C}$ είναι συμπαγές και*

$$f : K \to \mathbb{C}$$

είναι συνεχής, τότε το $f(K)$ είναι συμπαγές.

Απόδειξη. Έστω $(w_n) \subset f(K)$. Για κάθε n υπάρχει $z_n \in K$ ώστε

$$w_n = f(z_n).$$

Επειδή K είναι συμπαγές, υπάρχει υπακολουθία

$$z_{n_k} \to z \in K.$$

Λόγω συνέχειας,

$$w_{n_k} = f(z_{n_k}) \longrightarrow f(z).$$

Άρα $f(K)$ είναι συμπαγές. □

Μια ιδιαίτερα σημαντική συνέπεια είναι η εξής.

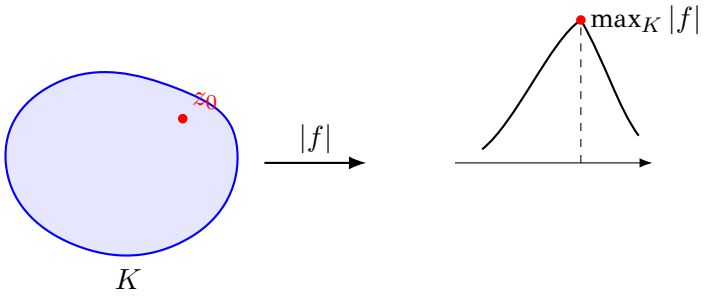
Πόρισμα 6.5. *Αν K είναι συμπαγές και $f : K \to \mathbb{C}$ συνεχής, τότε η συνάρτηση*

$$z \longmapsto |f(z)|$$

παίρνει μέγιστη τιμή στο K.

Δηλαδή υπάρχει $z_0 \in K$ τέτοιο ώστε

$$|f(z)| \leq |f(z_0)| \qquad \text{για κάθε } z \in K.$$



Αυτός είναι ένας από τους βασικούς λόγους για τους οποίους τα συμπαγή σύνολα θα εμφανίζονται συνεχώς στη μιγαδική ανάλυση.

Πόρισμα 6.6. *Αν K είναι συμπαγές και $f : K \to \mathbb{C}$ συνεχής, τότε η συνάρτηση*

$$z \longmapsto |f(z)|$$

παίρνει μέγιστη τιμή στο K.

Δηλαδή υπάρχει $z_0 \in K$ τέτοιο ώστε

$$|f(z)| \leq |f(z_0)| \qquad \text{για κάθε } z \in K.$$

Απόδειξη. Η συνάρτηση

$$g : K \to \mathbb{R}, \qquad g(z) = |f(z)|,$$

είναι συνεχής, αφού η f είναι συνεχής και η συνάρτηση

$$w \longmapsto |w|$$

είναι συνεχής στο $\mathbb{C}$.

Επειδή το K είναι συμπαγές, η συνεχής πραγματική συνάρτηση g παίρνει τη μέγιστη τιμή της στο K. Άρα υπάρχει $z_0 \in K$ τέτοιο ώστε

$$g(z) \leq g(z_0) \qquad \text{για κάθε } z \in K.$$

Δηλαδή

$$|f(z)| \leq |f(z_0)| \qquad \text{για κάθε } z \in K.$$

□

Ομοιόμορφη συνέχεια σε συμπαγή σύνολα

Υπενθυμίζουμε ότι μια συνάρτηση

$$f : S \to \mathbb{C}$$

λέγεται *ομοιόμορφα συνεχής* στο S αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$z, w \in S, \qquad |z - w| < \delta$$

να συνεπάγεται

$$|f(z) - f(w)| < \varepsilon.$$

Η διαφορά με τη συνήθη συνέχεια είναι ότι εδώ το δ εξαρτάται μόνο από το ε, και όχι από το σημείο του S.

Θεώρημα 6.7. *Έστω $K \subset \mathbb{C}$ συμπαγές και*

$$f : K \to \mathbb{C}$$

συνεχής. Τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο K.

Απόδειξη. Υποθέτουμε προς άτοπο ότι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Τότε υπάρχει $\varepsilon_0 > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\delta > 0$ να υπάρχουν $z, w \in K$ με

$$|z - w| < \delta,$$

αλλά

$$|f(z) - f(w)| \geq \varepsilon_0.$$

Ειδικότερα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να επιλέξουμε $z_n, w_n \in K$ τέτοια ώστε

$$|z_n - w_n| < \frac{1}{n}$$

και

$$|f(z_n) - f(w_n)| \geq \varepsilon_0.$$

Επειδή το K είναι συμπαγές, η ακολουθία (z_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία:

$$z_{n_k} \to z \qquad \text{για κάποιο } z \in K.$$

Όμως

$$|w_{n_k} - z| \leq |w_{n_k} - z_{n_k}| + |z_{n_k} - z|.$$

Και τα δύο μέλη στο δεξί μέρος τείνουν στο 0. Άρα

$$w_{n_k} \to z.$$

Από τη συνέχεια της f στο z,

$$f(z_{n_k}) \to f(z) \qquad \text{και} \qquad f(w_{n_k}) \to f(z).$$

Επομένως

$$|f(z_{n_k}) - f(w_{n_k})| \to 0,$$

σε αντίφαση με

$$|f(z_{n_k}) - f(w_{n_k})| \geq \varepsilon_0.$$

Άρα η f είναι ομοιόμορφα συνεχής. □

Πεπερασμένες καλύψεις συμπαγών συνόλων

Η συμπάγεια έχει και μια πολύ χρήσιμη γεωμετρική συνέπεια.

Θεώρημα 6.8. *Έστω $K \subset \mathbb{C}$ συμπαγές και $r > 0$. Τότε υπάρχουν πεπερασμένα σημεία*

$$z_1, \ldots, z_N \in K$$

τέτοια ώστε

$$\boxed{K \subset D(z_1, r) \cup \cdots \cup D(z_N, r).}$$

Δηλαδή, για κάθε σταθερή ακτίνα $r > 0$, ένα συμπαγές σύνολο μπορεί να καλυφθεί από πεπερασμένους ανοικτούς δίσκους ακτίνας r.

Απόδειξη. Υποθέτουμε προς άτοπο ότι αυτό δεν ισχύει.

Επιλέγουμε αρχικά ένα σημείο

$$z_1 \in K$$

και θεωρούμε τον δίσκο

$$D(z_1, r).$$

Αφού ένας μόνο τέτοιος δίσκος δεν καλύπτει το K, υπάρχει

$$z_2 \in K \setminus D(z_1, r).$$

Στη συνέχεια, αφού ούτε οι δύο δίσκοι

$$D(z_1, r), \qquad D(z_2, r)$$

καλύπτουν το K, μπορούμε να επιλέξουμε

$$z_3 \in K \setminus \big(D(z_1, r) \cup D(z_2, r)\big).$$

Συνεχίζοντας επαγωγικά, κατασκευάζουμε ακολουθία $(z_n) \subset K$ τέτοια ώστε

$$z_{n+1} \notin D(z_1, r) \cup \cdots \cup D(z_n, r).$$

Άρα για $m \neq n$,

$$|z_n - z_m| \geq r.$$

Επειδή το K είναι συμπαγές, η (z_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία

$$z_{n_k} \to z \in K.$$

Μια συγκλίνουσα ακολουθία είναι Cauchy, άρα για αρκετά μεγάλα k, ℓ θα έχουμε

$$|z_{n_k} - z_{n_\ell}| < r,$$

σε αντίφαση με

$$|z_{n_k} - z_{n_\ell}| \geq r.$$

Άρα υπάρχει πεπερασμένη κάλυψη του K από ανοικτούς δίσκους ακτίνας r. □

Ανοικτές καλύψεις

Έστω $S \subset \mathbb{C}$ και έστω

$$\{U_i\}_{i \in I}$$

μια οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{C}$.

Λέμε ότι η οικογένεια αυτή είναι μια *ανοικτή κάλυψη* του S αν

$$S \subset \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Αν υπάρχουν πεπερασμένοι δείκτες

$$i_1, \ldots, i_N \in I$$

τέτοιοι ώστε

$$S \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_N},$$

τότε τα σύνολα

$$U_{i_1}, \ldots, U_{i_N}$$

λέγονται *πεπερασμένη υποκάλυψη* της αρχικής κάλυψης.

Θεώρημα 6.9. *Έστω $K \subset \mathbb{C}$ συμπαγές και*

$$\{U_i\}_{i\in I}$$

μια ανοικτή κάλυψη του K. Τότε υπάρχουν $i_1, \dots, i_N \in I$ τέτοια ώστε

$$K \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_N}.$$

Απόδειξη. Για $z \in K$ θέτουμε

$$\rho(z) = \sup\{r \in [0,1] : B(z,r) \subset U_i \text{ για κάποιο } i \in I\}.$$

Επειδή η οικογένεια $\{U_i\}_{i\in I}$ καλύπτει το K και κάθε U_i είναι ανοικτό, έχουμε

$$\rho(z) > 0 \qquad \text{για κάθε } z \in K.$$

Επιπλέον, η ρ είναι 1-Lipschitz. Πράγματι, αν $z, w \in K$, τότε

$$|\rho(z) - \rho(w)| \le |z - w|.$$

Για να το δούμε, έστω $s < \rho(z)$. Τότε υπάρχει $r > s$ και $i \in I$ τέτοια ώστε

$$B(z,r) \subset U_i.$$

Από την τριγωνική ανισότητα,

$$B\big(w, r - |z-w|\big) \subset B(z,r),$$

όποτε $r > |z-w|$. Άρα

$$\rho(w) \ge s - |z-w|.$$

Αφήνοντας $s \uparrow \rho(z)$, παίρνουμε

$$\rho(w) \ge \rho(z) - |z-w|.$$

Ανταλλάσσοντας z και w, προκύπτει η ζητούμενη ανισότητα.

Άρα η ρ είναι συνεχής. Επειδή το K είναι συμπαγές, η ρ παίρνει την ελάχιστη τιμή της στο K. Θέτουμε

$$\delta = \min_{z\in K} \rho(z).$$

Εφόσον $\rho(z) > 0$ για κάθε $z \in K$, έχουμε

$$\delta > 0.$$

Από το προηγούμενο θεώρημα, υπάρχουν $z_1, \dots, z_N \in K$ τέτοια ώστε

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{N} B\left(z_j, \frac{\delta}{2}\right).$$

Για κάθε j,

$$\frac{\delta}{2} < \rho(z_j),$$

οπότε, από τον ορισμό της ρ, υπάρχει $i_j \in I$ τέτοιο ώστε

$$B\left(z_j, \frac{\delta}{2}\right) \subset U_{i_j}.$$

Επομένως

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{N} B\left(z_j, \frac{\delta}{2}\right) \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_N}.$$

Άρα η ανοικτή κάλυψη έχει πεπερασμένη υποκάλυψη. □

Πριν περάσουμε στη μιγαδική παράγωγο, ένα απλό παράδειγμα δείχνει γιατί η ιδιότητα της πεπερασμένης υποκάλυψης είναι ουσιαστική και δεν ισχύει για κάθε σύνολο.

Παράδειγμα 6.10 (Ανοικτή κάλυψη χωρίς πεπερασμένη υποκάλυψη). Θεωρούμε το $\mathbb{C}$ και, για $n \geq 1$, τους ανοικτούς δίσκους

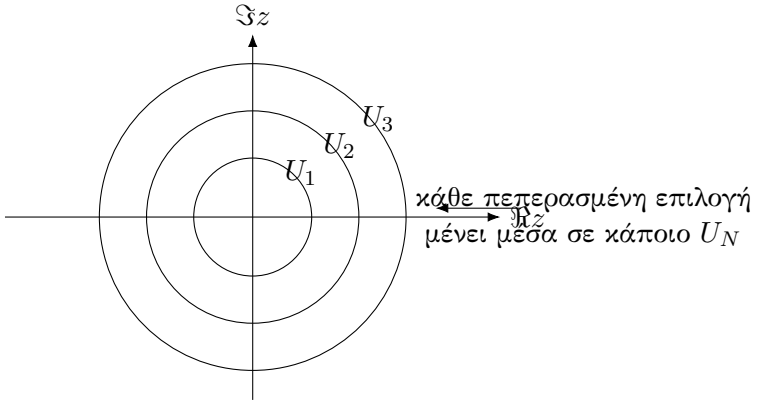
$$U_n = D(0, n) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < n\}.$$

Τότε

$$\mathbb{C} = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n,$$

άρα $(U_n)_{n\geq 1}$ είναι ανοικτή κάλυψη του $\mathbb{C}$. Δεν έχει όμως πεπερασμένη υποκάλυψη: αν επιλέξουμε πεπερασμένα πολλά $U_{n_1}, \ldots, U_{n_k}$ και $N = \max\{n_1, \ldots, n_k\}$, τότε

$$U_{n_1} \cup \cdots \cup U_{n_k} = U_N \neq \mathbb{C}.$$



Η συμπάγεια επιβάλλει ακριβώς την αντίθετη συμπεριφορά: κάθε ανοικτή κάλυψη ενός συμπαγούς συνόλου έχει πεπερασμένη υποκάλυψη. Από εδώ και πέρα επιστρέφουμε στη βασική αναλυτική δομή του $\mathbb{C}$.

7 Μιγαδικές συναρτήσεις και βασικές απεικονίσεις

Ορισμός 7.1. Έστω $S \subseteq \mathbb{C}$. Μια μιγαδική συνάρτηση είναι μια απεικόνιση

$$f : S \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Αν $z = x + iy$, μπορούμε να γράψουμε

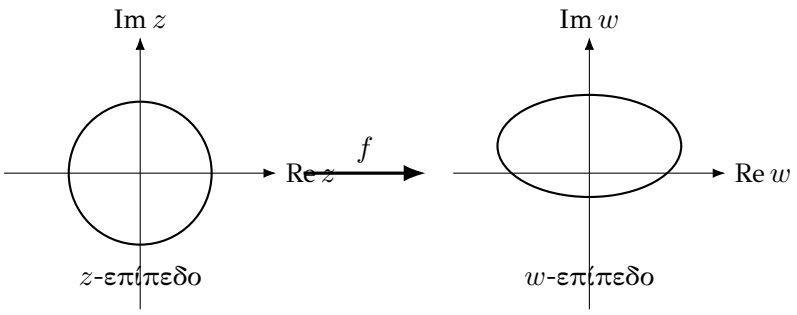
$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

όπου $u, v : S \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της f.

Έτσι, από τη σκοπιά του Λογισμού πολλών μεταβλητών, μια μιγαδική συνάρτηση είναι μια απεικόνιση

$$(x, y) \longmapsto (u(x, y), v(x, y))$$

από ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ σε ένα άλλο. Για να την οπτικοποιήσουμε χρησιμοποιούμε δύο επίπεδα, το z-επίπεδο και το w-επίπεδο.



Μεταφορά

Για σταθερό $a \in \mathbb{C}$, η απεικόνιση

$$f(z) = z + a$$

μεταφέρει κάθε σημείο κατά το διάνυσμα a. Για παράδειγμα,

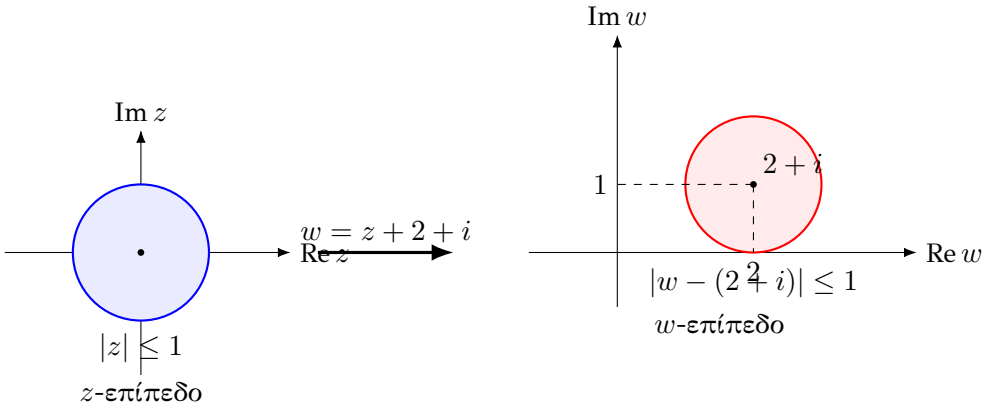
$$f(z) = z + 2 + i$$

μεταφέρει τον μοναδιαίο δίσκο

$$D = \{z : |z| \leq 1\}$$

στον δίσκο

$$f(D) = \{w : |w - (2 + i)| \leq 1\}.$$



Διαστολή: η απεικόνιση $f(z) = 3z$

Θεωρούμε το τετράγωνο

$$S = \{x + iy : 1 \leq x \leq 3,\ -1 \leq y \leq 1\}.$$

Έχει πλευρά 2 και κέντρο το σημείο 2.

Η απεικόνιση

$$f(z) = 3z$$

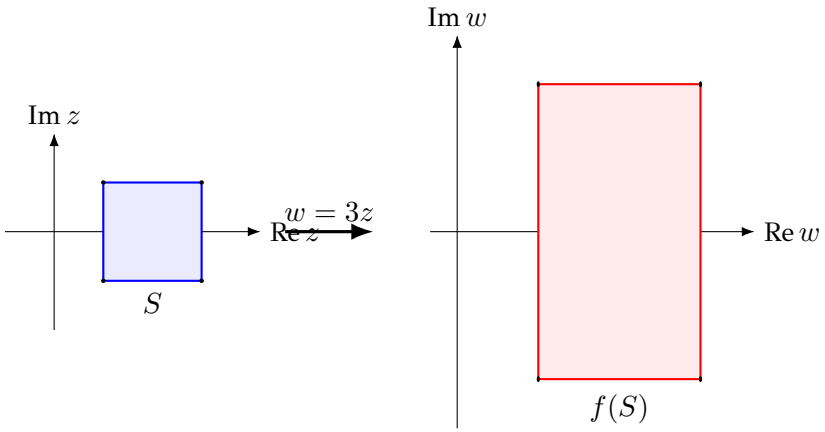
τριπλασιάζει όλες τις αποστάσεις από το 0 χωρίς να αλλάζει τις γωνίες. Οι κορυφές

$$1 + i, \quad 1 - i, \quad 3 + i, \quad 3 - i$$

στέλνονται αντίστοιχα στις

$$3 + 3i, \quad 3 - 3i, \quad 9 + 3i, \quad 9 - 3i.$$

Άρα η εικόνα είναι τετράγωνο πλευράς 6 και κέντρο το 6.



Διαστολή και περιστροφή: η απεικόνιση $f(z) = 2iz$

Στο ίδιο τετράγωνο S, θεωρούμε τώρα

$$f(z) = 2iz.$$

Επειδή

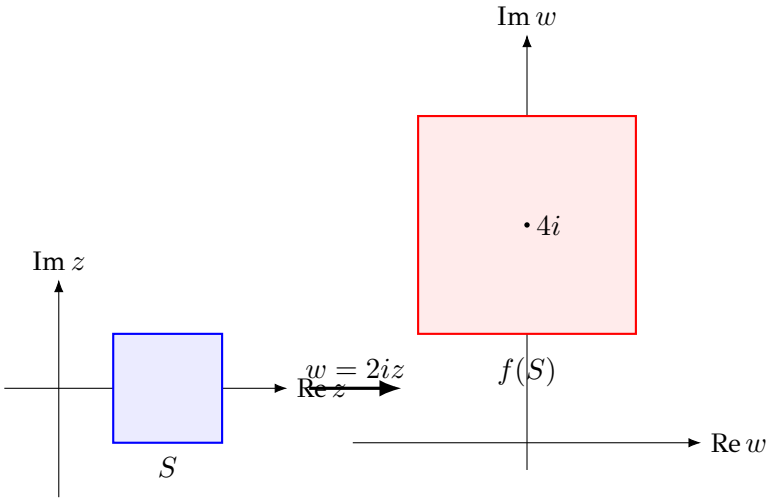
$$2i = 2e^{i\pi/2},$$

η απεικόνιση πρώτα διαστέλλει κατά παράγοντα 2 και στη συνέχεια περιστρέφει αριστερόστροφα κατά $\pi/2$.

Οι κορυφές μετασχηματίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned} 1 + i &\longmapsto -2 + 2i, \\ 1 - i &\longmapsto 2 + 2i, \\ 3 + i &\longmapsto -2 + 6i, \\ 3 - i &\longmapsto 2 + 6i. \end{aligned}$$

Άρα η εικόνα είναι τετράγωνο πλευράς 4 με κέντρο το $4i$.



Αντιστροφή: η απεικόνιση $f(z) = 1/z$

Αν

$$z = re^{i\theta} \neq 0,$$

τότε

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}.$$

Άρα η αντιστροφή κάνει

$$r \longmapsto \frac{1}{r}, \qquad \theta \longmapsto -\theta.$$

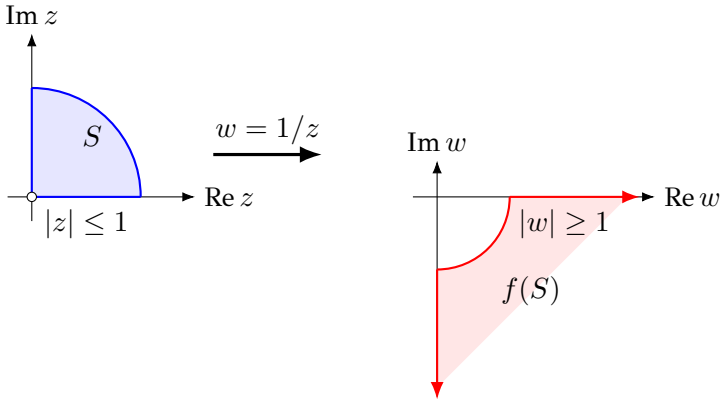
Θεωρούμε το τεταρτοκυκλικό χωρίο

$$S = \left\{ z : 0 < |z| \leq 1, \quad 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Τότε

$$f(S) = \left\{ w : |w| \geq 1, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \arg w \leq 0 \right\}.$$

Δηλαδή το εσωτερικό του μοναδιαίου τεταρτοκυκλίου στον πρώτο τεταρτημόριο μεταφέρεται στο εξωτερικό του μοναδιαίου κύκλου στον τέταρτο τεταρτημόριο.



Η απεικόνιση $f(z) = z^2$

Θεωρούμε την κατακόρυφη λωρίδα

$$S = \{z = x + iy : 1 \leq x \leq 2\}.$$

Αν

$$w = z^2 = u + iv,$$

τότε

$$u = x^2 - y^2, \qquad v = 2xy.$$

Για σταθερό $x = x_0$ έχουμε

$$y = \frac{v}{2x_0},$$

οπότε

$$u = x_0^2 - \frac{v^2}{4x_0^2}.$$

Άρα κάθε κατακόρυφη ευθεία $x = x_0$ μετασχηματίζεται σε παραβολή που ανοίγει προς τα αριστερά.

Οι δύο συνοριακές ευθείες $x = 1$ και $x = 2$ μετασχηματίζονται στις παραβολές

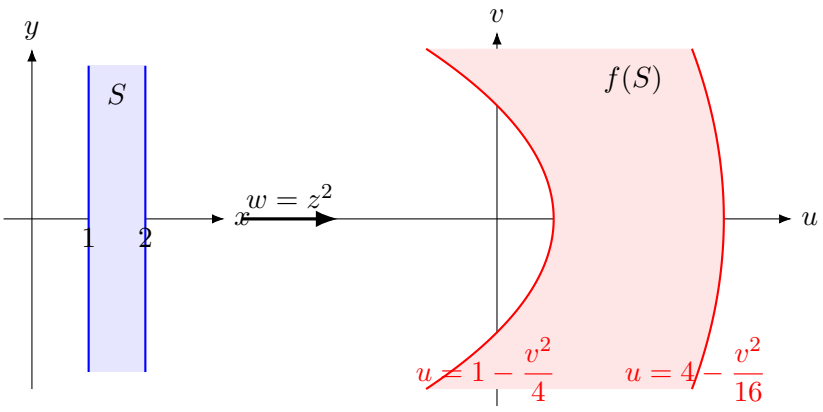
$$u = 1 - \frac{v^2}{4}$$

και

$$u = 4 - \frac{v^2}{16},$$

αντίστοιχα. Επομένως

$$f(S) = \left\{ u + iv : 1 - \frac{v^2}{4} \le u \le 4 - \frac{v^2}{16} \right\}.$$



Η εκθετική ως απεικόνιση

Για

$$z = x + iy$$

έχουμε

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Επομένως

$$|e^z| = e^x, \qquad \arg(e^z) = y \pmod{2\pi}.$$

Θεωρούμε το ορθογώνιο

$$S = \{x + iy : -1 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le \pi\}.$$

Για σταθερό $x = x_0$,

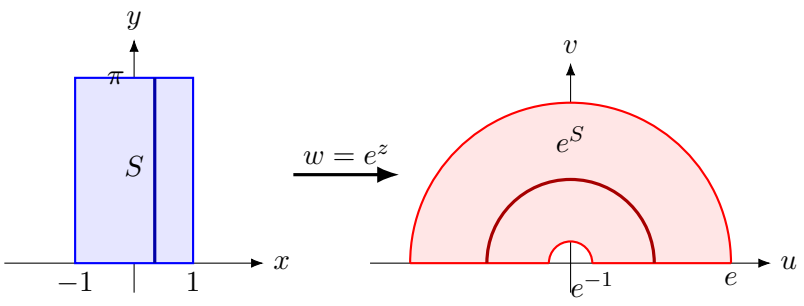
$$e^{x_0+iy} = e^{x_0} e^{iy}, \qquad 0 \le y \le \pi,$$

οπότε το κατακόρυφο ευθύγραμμο τμήμα $x = x_0$ μετασχηματίζεται στο άνω ημικύκλιο ακτίνας e^{x_0}.

Καθώς το x_0 μεταβάλλεται από -1 έως 1, η ακτίνα e^{x_0} μεταβάλλεται από e^{-1} έως e. Άρα

$$\boxed{e^S = \left\{ w : e^{-1} \le |w| \le e, \quad 0 \le \arg w \le \pi \right\}.}$$

Η εικόνα είναι λοιπόν ένα άνω ημιδακτύλιο.



Παρατήρηση 7.2. Η ταύτιση $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ μας επιτρέπει να βλέπουμε τις μιγαδικές συναρτήσεις ως απεικονίσεις του επιπέδου. Το ουσιαστικά νέο στοιχείο της Μιγαδικής Ανάλυσης θα εμφανιστεί όταν ορίσουμε τη *μιγαδική παράγωγο*: εκεί η δομή του $\mathbb{C}$ θα επιβάλει πολύ ισχυρότερους περιορισμούς από ό,τι η συνήθης διαφορισιμότητα μιας απεικόνισης $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

1. Η μιγαδική παράγωγος

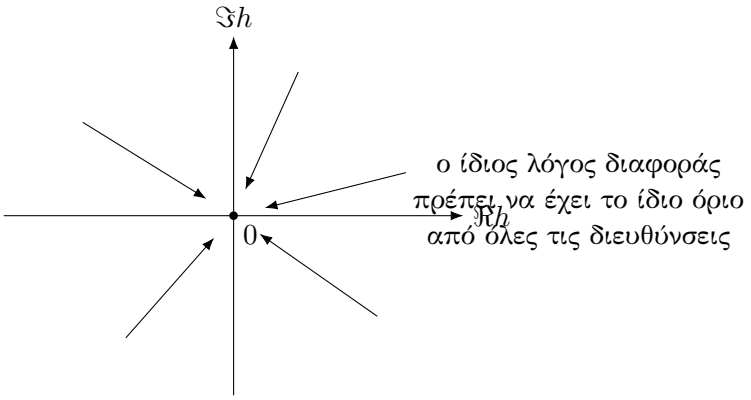
Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοικτό, $z_0 \in U$, και $f : U \to \mathbb{C}$.

Ορισμός 7.3. Η f λέγεται *μιγαδικά διαφορίσιμη* στο z_0 αν υπάρχει το όριο

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

Αν η f είναι μιγαδικά διαφορίσιμη σε κάθε σημείο του ανοικτού U, λέγεται *ολομορφική* στο U. Αν είναι ολομορφική σε όλο το $\mathbb{C}$, λέγεται *ακέραια* (entire).

Η διαφορά με την πραγματική παράγωγο μιας συνάρτησης μιας μεταβλητής είναι κρίσιμη: το $h \to 0$ μέσα στο $\mathbb{C}$ μπορεί να γίνει από *οποιαδήποτε* διεύθυνση.



Πρόταση 7.4. *Αν η f είναι μιγαδικά διαφορίσιμη στο z_0, τότε είναι συνεχής στο z_0.*

Απόδειξη. Γράφουμε

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = h \, \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

Καθώς $h \to 0$, ο πρώτος παράγοντας τείνει στο 0 και ο δεύτερος στο $f'(z_0)$. Άρα $f(z_0 + h) - f(z_0) \to 0$. □

Οι κανόνες του λογισμού

Όπως και στον πραγματικό λογισμό, αν f, g είναι μιγαδικά διαφορίσιμες, τότε

$$(f + g)' = f' + g',$$
$$(fg)' = f'g + fg',$$

και, όπου $g \neq 0$,

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Επίσης ισχύει ο κανόνας αλυσίδας

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z).$$

Μια χρήσιμη ισοδύναμη μορφή της διαφορισιμότητας είναι

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = f'(z_0)h + o(|h|), \qquad h \to 0. \tag{1}$$

Η σχέση αυτή είναι η σωστή γέφυρα προς τη διαφορισιμότητα συναρτήσεων $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

2. Σύγκριση με την πραγματική διαφορισιμότητα

Ταυτίζουμε

$$z = x + iy \longleftrightarrow (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

και γράφουμε

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Τότε η f αντιστοιχεί στην πραγματική απεικόνιση

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad F(x, y) = (u(x, y), v(x, y)).$$

Αν η F είναι πραγματικά διαφορίσιμη στο (x_0, y_0), τότε

$$F(p + h) - F(p) = Ah + o(\|h\|),$$

όπου A είναι ένας αυθαίρετος πραγματικός πίνακας 2×2:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Αν όμως η f είναι *μιγαδικά* διαφορίσιμη και

$$f'(z_0) = a + ib,$$

τότε ο γραμμικός όρος στη (1) είναι πολλαπλασιασμός με $a + ib$:

$$(a + ib)(h + ik) = (ah - bk) + i(bh + ak).$$

Άρα ο πραγματικός διαφορικός πίνακας πρέπει να έχει την ειδική μορφή

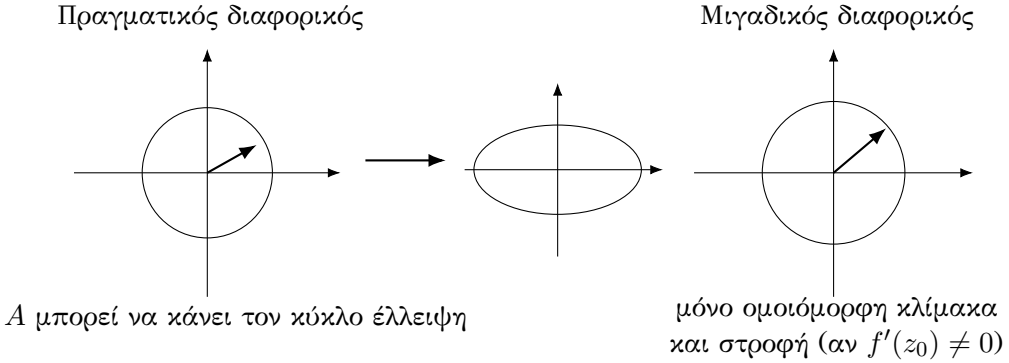
$$DF(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Αυτό είναι το ουσιαστικό σημείο:

πραγματική διαφορισιμότητα: αυθαίρετος 2×2 πίνακας

ενώ

μιγαδική διαφορισιμότητα: πολλαπλασιασμός με έναν μιγαδικό αριθμό.



Πράγματι, αν $a + ib = re^{i\theta}$, τότε ο πίνακας (2) είναι

$$r \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Τοπικά, λοιπόν, μια ολομορφική απεικόνιση με $f'(z_0) \neq 0$ μοιάζει με στροφή και ομοιόμορφη αλλαγή κλίμακας.

3. Οι εξισώσεις Cauchy–Riemann

Έστω

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$

και υποθέτουμε ότι η f είναι μιγαδικά διαφορίσιμη στο $z_0 = x_0 + iy_0$. Γράφουμε

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \frac{u(x_0+h,y_0)-u(x_0,y_0)}{h} + i\frac{v(x_0+h,y_0)-v(x_0,y_0)}{h}.$$

Το όριο του αριστερού μέλους υπάρχει, αν και μόνο αν υπάρχει το όριο του πραγματικού και φανταστικού μέρους. Πλησιάζουμε πρώτα το z_0 οριζόντια, δηλαδή με $h \in \mathbb{R}$. Τότε

$$f'(z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{u(x_0+h,y_0)-u(x_0,y_0)}{h} + i \lim_{h\to 0} \frac{v(x_0+h,y_0)-v(x_0,y_0)}{h},$$

οπότε

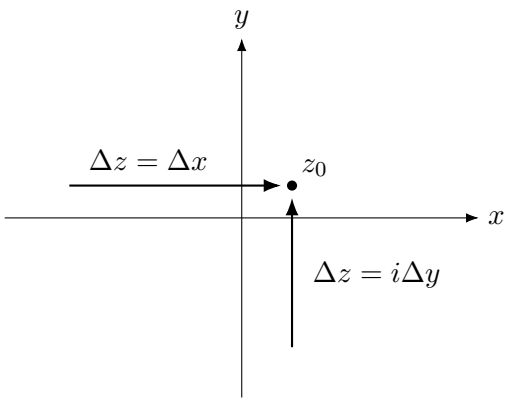
$$f'(z_0) = u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0). \tag{3}$$

Αν πλησιάσουμε κατακόρυφα, γράφουμε την αύξηση ως ih, $h \in \mathbb{R}$:

$$f'(z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+ih)-f(z_0)}{ih}.$$

Επειδή $1/i = -i$, παίρνουμε

$$f'(z_0) = v_y(x_0,y_0) - iu_y(x_0,y_0). \tag{4}$$



Εξισώνοντας τα πραγματικά και φανταστικά μέρη των (3) και (4), προκύπτουν οι *εξισώσεις Cauchy–Riemann*:

$$\boxed{u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x.} \tag{5}$$

Επιπλέον,

$$\boxed{f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y.} \tag{6}$$

Θεώρημα 7.5 (Cauchy–Riemann). *Έστω $U \subset \mathbb{R}^2$ ανοικτό και*

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y).$$

Αν η f είναι ολόμορφη στο U, τότε οι u, v είναι πραγματικά διαφορίσιμες και ικανοποιούν τις εξισώσεις Cauchy–Riemann.

Αντίστροφα, αν οι u, v είναι πραγματικά διαφορίσιμες σε ένα ανοικτό σύνολο U και ικανοποιούν τις Cauchy–Riemann, τότε η f είναι ολομορφική. Ειδικότερα, αρκεί οι πρώτες μερικές παράγωγοι να είναι συνεχείς και να ικανοποιούν τις Cauchy–Riemann.

Απόδειξη. Έστω

$$z = x + iy, \qquad w = h + ik,$$

και υποθέτουμε ότι $F = (u, v)$ είναι πραγματικά διαφορίσιμη στο (x, y). Αν

$$F(x, y) = (u(x, y), v(x, y)),$$

η πραγματική διαφορισιμότητα στο (x, y) σημαίνει

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\|F(x+h, y+k) - F(x, y) - DF(x, y)(h, k)\|_{\mathbb{R}^2}}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

Εδώ

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix},$$

οπότε

$$DF(x, y)(h, k) = \big(u_x h + u_y k,\ v_x h + v_y k\big).$$

Άρα ο ορισμός γράφεται

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left\| \begin{pmatrix} u(x+h, y+k) - u(x, y) \\ v(x+h, y+k) - v(x, y) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_x h + u_y k \\ v_x h + v_y k \end{pmatrix} \right\|}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

Τώρα χρησιμοποιούμε την ταύτιση

$$(a, b) \longleftrightarrow a + ib.$$

Υπό αυτή την ταύτιση,

$$\|(a, b)\|_{\mathbb{R}^2} = |a + ib|.$$

Επίσης, αν $z = x + iy$ και $w = h + ik$,

$$F(x + h, y + k) - F(x, y) \longleftrightarrow f(z + w) - f(z),$$

ενώ

$$\big(u_x h + u_y k,\ v_x h + v_y k\big) \longleftrightarrow u_x h + u_y k + i(v_x h + v_y k).$$

Έτσι μόνο μετά την ταύτιση παίρνουμε

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\big|f(z + w) - f(z) - \big(u_x h + u_y k + i(v_x h + v_y k)\big)\big|}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

Και επειδή

$$|w| = \sqrt{h^2 + k^2},$$

οι Cauchy–Riemann μετατρέπουν τον γραμμικό όρο σε

$$\begin{aligned} u_x h + u_y k + i(v_x h + v_y k) &= u_x h - v_x k + i(v_x h + u_x k) \\ &= (u_x + i v_x)(h + ik) \\ &= (u_x + i v_x) w. \end{aligned}$$

Οπότε

$$\frac{|f(z + w) - f(z) - (u_x + i v_x) w|}{|w|} \to 0,$$

και συνεπώς

$$\frac{f(z + w) - f(z)}{w} \to u_x + i v_x.$$

□

Παρατήρηση 7.6 (Προσοχή). Οι Cauchy–Riemann σε ένα μόνο σημείο, μαζί μόνο με την ύπαρξη των μερικών παραγώγων, δεν αρκούν γενικά για μιγαδική διαφορισιμότητα. Χρειάζεται κάποια υπόθεση που να εξασφαλίζει πραγματική διαφορισιμότητα (π.χ. συνέχεια των πρώτων μερικών παραγώγων σε γειτονιά).

4. Παραδείγματα

Παράδειγμα: η εκθετική συνάρτηση

Για $z = x + iy$,

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y),$$

οπότε

$$u(x, y) = e^x \cos y, \qquad v(x, y) = e^x \sin y.$$

Έχουμε

$$u_x = e^x \cos y, \qquad u_y = -e^x \sin y,$$

και

$$v_x = e^x \sin y, \qquad v_y = e^x \cos y.$$

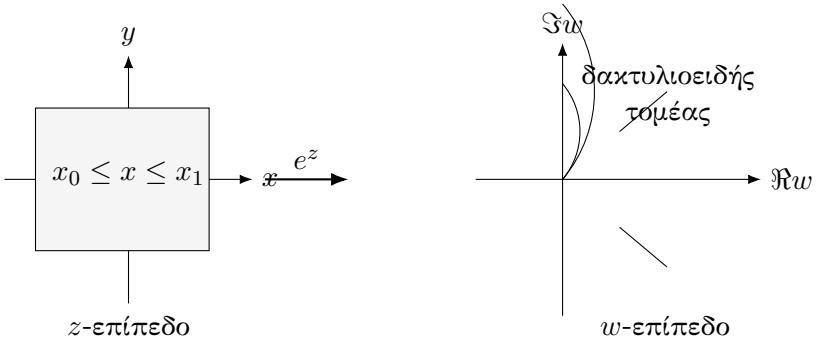
Άρα

$$u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x$$

σε κάθε σημείο του $\mathbb{C}$. Οι μερικές παράγωγοι είναι συνεχείς, συνεπώς η e^z είναι ακέραια και

$$\boxed{(e^z)' = u_x + iv_x = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z.}$$

Η γεωμετρία του τύπου $e^{x+iy} = e^x e^{iy}$ είναι επίσης χαρακτηριστική: η μεταβολή του x αλλάζει το μέτρο, ενώ η μεταβολή του y αλλάζει τη γωνία.



Οι μιγαδικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Αφού έχουμε ορίσει τη μιγαδική εκθετική, ορίζουμε για κάθε $z \in \mathbb{C}$

$$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Οι ορισμοί αυτοί επεκτείνουν τις συνήθεις πραγματικές συναρτήσεις $\cos x$ και $\sin x$. Πράγματι, αν $x \in \mathbb{R}$, τότε από τον τύπο του Euler

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

παίρνουμε τις παραπάνω εκφράσεις.

Επίσης,

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z.$$

Για $z = x + iy$, έχουμε

$$iz = ix - y,$$

και επομένως

$$e^{iz} = e^{-y}(\cos x + i \sin x), \qquad e^{-iz} = e^y(\cos x - i \sin x).$$

Άρα

$$\begin{aligned}\cos(x+iy) &= \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\\ &= \cos x\,\frac{e^{y}+e^{-y}}{2} - i\sin x\,\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\\ &= \cos x\,\cosh y - i\sin x\,\sinh y,\end{aligned}$$

ενώ

$$\begin{aligned}\sin(x+iy) &= \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\\ &= \sin x\,\frac{e^{y}+e^{-y}}{2} + i\cos x\,\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\\ &= \sin x\,\cosh y + i\cos x\,\sinh y.\end{aligned}$$

Παρατήρηση 7.7. Σε αντίθεση με την πραγματική περίπτωση, οι συναρτήσεις $\sin z$ και $\cos z$ δεν είναι φραγμένες στο $\mathbb{C}$. Για παράδειγμα,

$$\cos(iy) = \cosh y, \qquad \sin(iy) = i\sinh y,$$

και οι $\cosh y, \sinh y$ είναι μη φραγμένες καθώς $|y| \to \infty$.

Παράδειγμα 7.8. Η συνάρτηση $\sin z$ είναι ολόμορφη σε όλο το $\mathbb{C}$ και

$$(\sin z)' = \cos z.$$

Πράγματι, από τον ορισμό

$$\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

και τον κανόνα της αλυσίδας,

$$\begin{aligned}(\sin z)' &= \frac{1}{2i}\left(ie^{iz} - (-i)e^{-iz}\right)\\ &= \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\\ &= \cos z.\end{aligned}$$

Ομοίως,

$$(\cos z)' = -\sin z.$$

Παρατήρηση 7.9. Η παραπάνω απόδειξη χρησιμοποιεί μόνο την εκθετική και τον κανόνα της αλυσίδας. Εναλλακτικά, μπορούμε να επαληθεύσουμε τη μιγαδική διαφορισιμότητα της $\sin z$ μέσω των εξισώσεων Cauchy–Riemann. Πράγματι,

$$\sin(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y),$$

όπου

$$u(x,y) = \sin x\,\cosh y, \qquad v(x,y) = \cos x\,\sinh y.$$

Τότε

$$u_x = \cos x\,\cosh y, \qquad u_y = \sin x\,\sinh y,$$

και

$$v_x = -\sin x\,\sinh y, \qquad v_y = \cos x\,\cosh y.$$

Άρα

$$u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x.$$

Επομένως οι εξισώσεις Cauchy–Riemann ισχύουν παντού και

$$(\sin z)' = u_x + iv_x = \cos x\,\cosh y - i\sin x\,\sinh y = \cos z.$$

Παράδειγμα: αποτυχία αναλυτικότητας

Θεωρούμε

$$f(x+iy) = x^2 + i(2y+x).$$

Τότε

$$u(x,y) = x^2, \qquad v(x,y) = 2y + x.$$

Έχουμε

$$u_y = 0, \qquad v_x = 1.$$

Η δεύτερη εξίσωση Cauchy–Riemann θα απαιτούσε

$$u_y = -v_x,$$

δηλαδή

$$0 = -1,$$

που είναι αδύνατο. Άρα η f δεν είναι μιγαδικά διαφορίσιμη σε κανένα σημείο του $\mathbb{C}$.

5. Ένα χρήσιμο αντιπαράδειγμα για τις Cauchy–Riemann

Για να φανεί γιατί στην αντίστροφη κατεύθυνση χρειάζεται πραγματική διαφορισιμότητα και όχι μόνο ύπαρξη μερικών παραγώγων, ορίζουμε

$$f(x+iy) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} + i\dfrac{y^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Στο $(0,0)$ υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι και

$$u_x(0,0) = 1 = v_y(0,0), \qquad u_y(0,0) = 0 = -v_x(0,0),$$

άρα οι Cauchy–Riemann ισχύουν στο 0. Όμως

$$\frac{f(t)}{t} = 1$$

κατά μήκος του πραγματικού άξονα, ενώ για $z = t(1+i)$,

$$f(z) = \frac{t}{2}(1+i), \qquad \frac{f(z)}{z} = \frac{1}{2}.$$

Επομένως $f'(0)$ δεν υπάρχει.

Παράδειγμα: αποτυχία ολομορφίας

Παράδειγμα 7.10. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x+iy) = x^2 + i(2y+x).$$

Θα δείξουμε ότι η f δεν είναι μιγαδικά διαφορίσιμη σε κανένα σημείο του $\mathbb{C}$.

Γράφουμε

$$u(x,y) = x^2, \qquad v(x,y) = 2y + x.$$

Τότε

$$u_x = 2x, \qquad u_y = 0,$$

και

$$v_x = 1, \qquad v_y = 2.$$

Για να είναι η f μιγαδικά διαφορίσιμη σε ένα σημείο, είναι αναγκαίο να ισχύουν εκεί οι εξισώσεις Cauchy–Riemann:

$$u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x.$$

Όμως

$$u_y = 0 \qquad \text{ενώ} \qquad -v_x = -1.$$

Άρα η δεύτερη εξίσωση Cauchy–Riemann δεν ισχύει σε κανένα σημείο.

Επομένως η f δεν είναι μιγαδικά διαφορίσιμη πουθενά και, ειδικότερα, δεν είναι ολόμορφη σε κανένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$.

Γωνίες υπό ολομορφικές απεικονίσεις

Ένα από τα πρώτα εντυπωσιακά γεωμετρικά χαρακτηριστικά των ολομορφικών συναρτήσεων είναι ότι, στα σημεία όπου η παράγωγός τους δεν μηδενίζεται, διατηρούν τις γωνίες.

Έστω

$$\gamma : (a, b) \longrightarrow U$$

μια διαφορίσιμη καμπύλη, όπου $U \subset \mathbb{C}$ είναι ανοικτό. Αν

$$\gamma(t) = x(t) + iy(t),$$

τότε

$$\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t).$$

Όταν $\gamma'(t_0) \neq 0$, ο μιγαδικός αριθμός $\gamma'(t_0)$ παριστάνει το εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης στο σημείο $\gamma(t_0)$.

Αν τώρα $f : U \to \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη, τότε από τον κανόνα της αλυσίδας

$$(f \circ \gamma)'(t_0) = f'(\gamma(t_0))\, \gamma'(t_0).$$

Άρα το εφαπτόμενο διάνυσμα της εικόνας της καμπύλης προκύπτει από το αρχικό εφαπτόμενο διάνυσμα με πολλαπλασιασμό επί τον μιγαδικό αριθμό $f'(z_0)$.

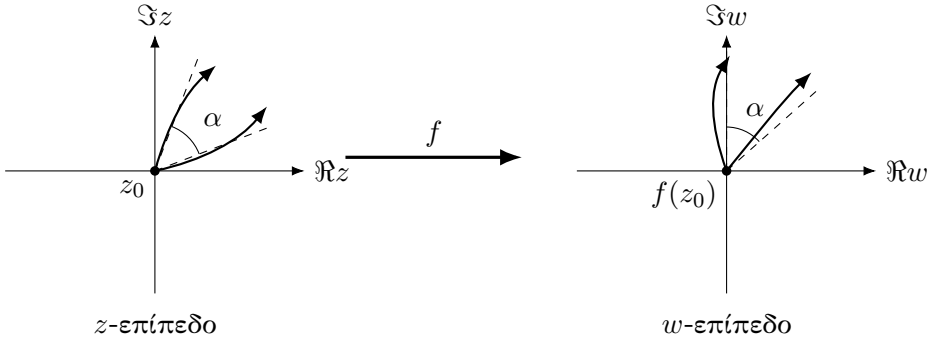
Αν

$$f'(z_0) = \rho e^{i\theta}, \qquad \rho > 0,$$

τότε ο πολλαπλασιασμός με $f'(z_0)$

- πολλαπλασιάζει τα μήκη επί $\rho = |f'(z_0)|$,
- στρέφει όλα τα διανύσματα κατά την ίδια γωνία $\theta = \arg f'(z_0)$.

Επομένως οι γωνίες μεταξύ δύο διανυσμάτων δεν αλλάζουν.



Θεώρημα 7.11 (Διατήρηση γωνιών). *Έστω f ολόμορφη σε μια γειτονιά του z_0 και*

$$f'(z_0) \neq 0.$$

Τότε η f διατηρεί τις προσανατολισμένες γωνίες μεταξύ διαφορίσιμων καμπυλών που τέμνονται στο z_0 και έχουν μη μηδενικά εφαπτόμενα διανύσματα.

Απόδειξη. Έστω δύο καμπύλες γ_1, γ_2 που περνούν από το z_0:

$$\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2) = z_0.$$

Τα εφαπτόμενα διανύσματά τους είναι

$$\gamma_1'(t_1), \qquad \gamma_2'(t_2).$$

Οι εικόνες τους μέσω της f έχουν εφαπτόμενα διανύσματα

$$(f \circ \gamma_1)'(t_1) = f'(z_0)\gamma_1'(t_1),$$

και

$$(f \circ \gamma_2)'(t_2) = f'(z_0)\gamma_2'(t_2).$$

Γράφοντας

$$f'(z_0) = \rho e^{i\theta}, \qquad \rho > 0,$$

βλέπουμε ότι και τα δύο εφαπτόμενα διανύσματα στρέφονται κατά την ίδια γωνία θ και πολλαπλασιάζονται κατά τον ίδιο θετικό παράγοντα ρ.

Άρα η γωνία μεταξύ τους παραμένει η ίδια. □

Ορισμός 7.12. Μια απεικόνιση που διατηρεί τις προσανατολισμένες γωνίες λέγεται *σύμμορφη* (*conformal*).

Έτσι, μια ολόμορφη συνάρτηση είναι σύμμορφη σε κάθε σημείο z_0 στο οποίο

$$f'(z_0) \neq 0.$$

Παρατήρηση 7.13. Η υπόθεση $f'(z_0) \neq 0$ είναι ουσιαστική.

Για παράδειγμα, για

$$f(z) = z^2$$

έχουμε

$$f'(0) = 0.$$

Κοντά στο 0, μια ημιευθεία

$$z = re^{i\theta}$$

απεικονίζεται στην

$$f(z) = r^2 e^{2i\theta}.$$

Άρα η γωνία θ γίνεται 2θ. Στο 0, λοιπόν, η απεικόνιση δεν διατηρεί τις γωνίες.

Παράδειγμα: η αντιστροφή $w = 1/z$

Μια βασική γεωμετρική απεικόνιση είναι

$$f(z) = \frac{1}{z}, \qquad z \neq 0.$$

Αν

$$z = re^{i\theta},$$

τότε

$$\boxed{\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}.}$$

Επομένως η αντιστροφή

$$r \longmapsto \frac{1}{r}, \qquad \theta \longmapsto -\theta.$$

Άρα:

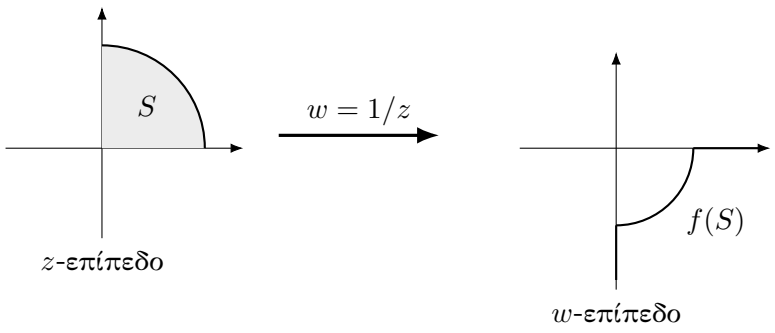
- το εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου, εκτός του 0, απεικονίζεται στο εξωτερικό του μοναδιαίου κύκλου,
- το άνω ημιεπίπεδο απεικονίζεται στο κάτω ημιεπίπεδο,
- οι γωνίες ως προς τον θετικό πραγματικό άξονα αλλάζουν πρόσημο.

Για παράδειγμα, έστω

$$S = \left\{ z : 0 < |z| < 1, \quad 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Τότε

$$f(S) = \left\{ w : |w| > 1, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \arg w \leq 0 \right\}.$$



Παρατηρούμε επίσης ότι

$$f'(z) = -\frac{1}{z^2} \neq 0, \qquad z \neq 0.$$

Άρα η αντιστροφή είναι σύμμορφη σε κάθε σημείο του $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Το όρισμα ενός μιγαδικού αριθμού

Έστω $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Από την πολική μορφή μπορούμε να γράψουμε

$$z = |z|e^{i\theta}$$

για κάποιο $\theta \in \mathbb{R}$.

Αν θ είναι μία τέτοια γωνία, τότε

$$e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta} \qquad \text{για κάθε } k \in \mathbb{Z}.$$

Επομένως όλες οι γωνίες

$$\theta + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

δίνουν τον ίδιο μιγαδικό αριθμό.

Ορισμός 7.14. Το *όρισμα* του $z \neq 0$, που συμβολίζεται με

$$\arg z,$$

είναι το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών θ για τους οποίους

$$z = |z|e^{i\theta}.$$

Αν θ_0 είναι μία τιμή του ορίσματος, τότε

$$\boxed{\arg z = \{\theta_0 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.}$$

Άρα το $\arg z$ δεν είναι πραγματική συνάρτηση: σε κάθε $z \neq 0$ αντιστοιχούν άπειρες τιμές.

Για να επιλέξουμε μία μόνο τιμή του ορίσματος, περιοριζόμαστε σε ένα διάστημα μήκους 2π.

Ορισμός 7.15. Το *κύριο όρισμα* του $z \neq 0$, που συμβολίζεται με

$$\operatorname{Arg} z,$$

είναι η μοναδική τιμή του $\arg z$ που ανήκει στο διάστημα

$$(-\pi, \pi].$$

Δηλαδή

$$\boxed{-\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi.}$$

Για παράδειγμα,

$$\operatorname{Arg}(1) = 0, \qquad \operatorname{Arg}(i) = \frac{\pi}{2}, \qquad \operatorname{Arg}(-1) = \pi, \qquad \operatorname{Arg}(-i) = -\frac{\pi}{2}.$$

Παρατήρηση 7.16. Η συνάρτηση

$$\operatorname{Arg} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow (-\pi, \pi]$$

είναι καλά ορισμένη, αλλά δεν είναι συνεχής πάνω στον αρνητικό πραγματικό ημιάξονα.

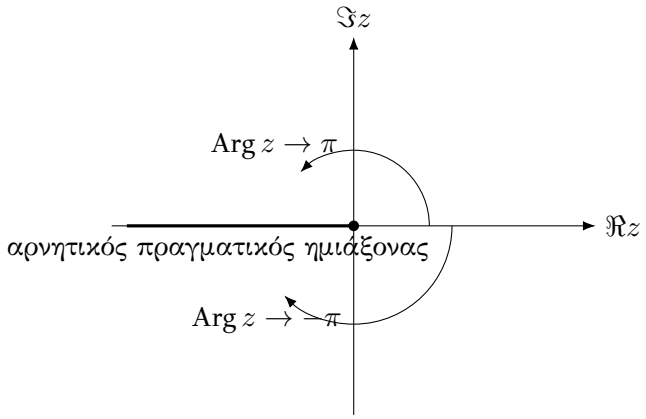
Πράγματι, αν $x < 0$, τότε

$$\operatorname{Arg}(x + iy) \longrightarrow \pi \qquad \text{καθώς } y \downarrow 0,$$

ενώ

$$\operatorname{Arg}(x + iy) \longrightarrow -\pi \qquad \text{καθώς } y \uparrow 0.$$

Έτσι εμφανίζεται φυσικά η ανάγκη για μια *τομή κλάδου*.



Ο μιγαδικός λογάριθμος

Στους πραγματικούς αριθμούς, ο λογάριθμος είναι η αντίστροφη συνάρτηση της εκθετικής. Στο $\mathbb{C}$, όμως, η εκθετική δεν είναι ένα προς ένα, αφού

$$e^{z+2\pi i} = e^z.$$

Για $z \neq 0$, θέλουμε να βρούμε όλους τους $w \in \mathbb{C}$ που ικανοποιούν

$$e^w = z.$$

Γράφουμε

$$w = u + iv.$$

Τότε

$$e^w = e^u e^{iv}.$$

Επομένως

$$e^u = |z|, \qquad v \in \arg z.$$

Άρα

$$u = \ln|z|.$$

Ορισμός 7.17. Ο *μιγαδικός λογάριθμος* του $z \neq 0$ είναι το σύνολο

$$\boxed{\log z = \{\ln|z| + i\theta : \theta \in \arg z\}.}$$

Ισοδύναμα, αν θ_0 είναι μία τιμή του ορίσματος του z, τότε

$$\boxed{\log z = \{\ln|z| + i(\theta_0 + 2k\pi) : k \in \mathbb{Z}\}.}$$

Ο μιγαδικός λογάριθμος είναι επομένως *πλειότιμος*: κάθε $z \neq 0$ έχει άπειρες τιμές λογαρίθμου, οι οποίες διαφέρουν μεταξύ τους κατά ακέραια πολλαπλάσια του $2\pi i$.

Για να πάρουμε μία μονοτίμη συνάρτηση, χρησιμοποιούμε το κύριο όρισμα.

Ορισμός 7.18. Η *κύρια τιμή του μιγαδικού λογαρίθμου* ορίζεται από

$$\boxed{\Log z = \ln|z| + i\,\Arg z, \qquad z \neq 0.}$$

Έχουμε πάντοτε

$$e^{\Log z} = z.$$

Αντίθετα, γενικά

$$\Log(e^z) \neq z,$$

επειδή η εκθετική είναι $2\pi i$-περιοδική. Πιο συγκεκριμένα,

$$\Log(e^z) = z \qquad \Longleftrightarrow \qquad -\pi < \Im z \leq \pi.$$

Παράδειγμα: υπολογισμός λογαρίθμων

Παράδειγμα 7.19. Να υπολογιστούν

$$\log i, \qquad \log(1+i), \qquad \log(-2).$$

Για το i,

$$|i| = 1, \qquad \arg i = \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

Άρα

$$\boxed{\log i = i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \qquad k \in \mathbb{Z}.}$$

Για το $1+i$,

$$|1+i| = \sqrt{2}, \qquad \arg(1+i) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi.$$

Επομένως

$$\boxed{\log(1+i) = \frac{1}{2}\ln 2 + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right), \qquad k \in \mathbb{Z}.}$$

Τέλος,

$$|-2| = 2, \qquad \arg(-2) = \pi + 2k\pi,$$

οπότε

$$\boxed{\log(-2) = \ln 2 + i(2k+1)\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.}$$

Παρατηρούμε ότι όλες οι τιμές του λογαρίθμου ενός συγκεκριμένου $z \neq 0$ έχουν το ίδιο πραγματικό μέρος και τα φανταστικά τους μέρη διαφέρουν κατά ακέραια πολλαπλάσια του 2π.

Επίσης οι γνωστές ταυτότητες του πραγματικού λογαρίθμου δεν ισχύουν πάντοτε για τον κύριο μιγαδικό λογάριθμο. Για παράδειγμα,

$$\mathrm{Log}((-1)(-1)) = \mathrm{Log}(1) = 0,$$

ενώ

$$\mathrm{Log}(-1) + \mathrm{Log}(-1) = 2\pi i.$$

Κλάδοι του ορίσματος και του λογαρίθμου

Δεν υπάρχει λόγος να επιλέξουμε υποχρεωτικά το διάστημα $(-\pi, \pi]$.

Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$. Για κάθε $z \neq 0$, ορίζουμε

$$\arg_\alpha z$$

ως τη μοναδική τιμή του $\arg z$ που ικανοποιεί

$$\boxed{\alpha < \arg_\alpha z \leq \alpha + 2\pi.}$$

Ο αντίστοιχος κλάδος του λογαρίθμου είναι

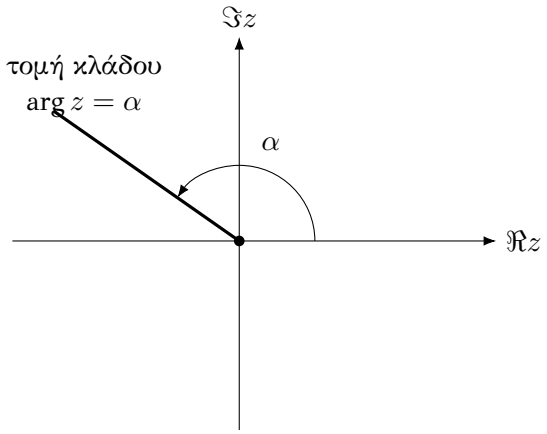
$$\boxed{\log_\alpha z = \ln|z| + i\arg_\alpha z.}$$

Η ημιευθεία

$$\{re^{i\alpha} : r \geq 0\}$$

είναι η *τομή κλάδου* (*branch cut*).

Περνώντας από τη μία πλευρά της τομής στην άλλη, η επιλεγμένη τιμή του ορίσματος μεταβάλλεται κατά 2π.



Για $\alpha = -\pi$, παίρνουμε τον κύριο κλάδο:

$$\log_{-\pi} z = \operatorname{Log} z,$$

και η τομή κλάδου είναι ο αρνητικός πραγματικός ημιάξονας.

Παράδειγμα: διαφορετικοί κλάδοι

Παράδειγμα 7.20. Να υπολογιστούν

$$\log_0 i, \qquad \log_{\pi/2} i, \qquad \log_{\pi/2}(-2).$$

Για τον κλάδο $\arg_0$, πρέπει

$$0 < \arg_0 z \leq 2\pi.$$

Επειδή

$$\frac{\pi}{2} \in (0, 2\pi],$$

έχουμε

$$\arg_0 i = \frac{\pi}{2},$$

και επομένως

$$\boxed{\log_0 i = \frac{\pi i}{2}.}$$

Για τον κλάδο $\arg_{\pi/2}$, πρέπει

$$\frac{\pi}{2} < \arg_{\pi/2} z \leq \frac{5\pi}{2}.$$

Η τιμή $\pi/2$ δεν ανήκει στο διάστημα, οπότε για το i πρέπει να επιλέξουμε

$$\arg_{\pi/2} i = \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}.$$

Άρα

$$\boxed{\log_{\pi/2} i = \frac{5\pi i}{2}.}$$

Τέλος,

$$\pi \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right],$$

οπότε

$$\arg_{\pi/2}(-2) = \pi$$

και

$$\boxed{\log_{\pi/2}(-2) = \ln 2 + i\pi.}$$

Το παράδειγμα δείχνει ότι δύο διαφορετικοί κλάδοι του λογαρίθμου μπορούν να δώσουν διαφορετικές τιμές στο ίδιο σημείο.

Γιατί δεν υπάρχει ένας καθολικός κλάδος στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

Το πρόβλημα του λογαρίθμου δεν είναι απλώς ότι «δεν έχουμε επιλέξει τη σωστή τιμή». Υπάρχει ένα πραγματικό τοπολογικό εμπόδιο.

Θεώρημα 7.21. *Δεν υπάρχει συνεχής συνάρτηση*

$$\Theta : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

τέτοια ώστε

$$e^{i\Theta(z)} = \frac{z}{|z|} \qquad \text{για κάθε } z \neq 0.$$

Με άλλα λόγια, δεν υπάρχει συνεχής επιλογή του ορίσματος σε ολόκληρο το $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Απόδειξη. Αν υπήρχε τέτοια συνάρτηση Θ, τότε πάνω στον μοναδιαίο κύκλο, για $0 \leq t \leq 2\pi$, θα είχαμε

$$e^{i\Theta(e^{it})} = e^{it}.$$

Επομένως

$$\Theta(e^{it}) - t \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

Άρα η συνάρτηση

$$t \longmapsto \frac{\Theta(e^{it}) - t}{2\pi}$$

είναι συνεχής και παίρνει τιμές στο $\mathbb{Z}$. Εφόσον το διάστημα $[0, 2\pi]$ είναι συνεκτικό, η συνάρτηση αυτή είναι σταθερή. Υπάρχει λοιπόν $k \in \mathbb{Z}$ τέτοιο ώστε

$$\Theta(e^{it}) = t + 2k\pi \qquad \text{για κάθε } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Για $t = 0$ παίρνουμε

$$\Theta(1) = 2k\pi,$$

ενώ για $t = 2\pi$,

$$\Theta(1) = 2\pi + 2k\pi,$$

άτοπο. □

Επομένως δεν μπορούμε να ορίσουμε έναν συνεχή λογάριθμο σε ολόκληρο το

$$\mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Χρειάζεται να αφαιρέσουμε μια καμπύλη που εμποδίζει το να περιστρέφεται κανείς πλήρως γύρω από το 0. Η απλούστερη επιλογή είναι μια ημιευθεία από το 0 προς το άπειρο.

Θεώρημα 7.22. *Η συνάρτηση του κύριου ορίσματος*

$$\operatorname{Arg} : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \longrightarrow (-\pi, \pi)$$

είναι συνεχής και, μάλιστα, πραγματικά διαφορίσιμη.

Αν

$$z = x + iy,$$

τότε

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Arg} z = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Arg} z = \frac{x}{x^2 + y^2}.}$$

Απόδειξη. Έστω

$$z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$$

και θέτουμε

$$\theta = \operatorname{Arg} z \in (-\pi, \pi).$$

Αν

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

τότε από την πολική μορφή

$$z = re^{i\theta}$$

έχουμε

$$\cos\theta = \frac{x}{r}, \qquad \sin\theta = \frac{y}{r}.$$

Επειδή $-\pi < \theta < \pi$, έχουμε

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2},$$

οπότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta}.$$

Άρα

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{y/r}{1 + x/r} = \frac{y}{x + r} = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Στο σύνολο $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ ισχύει

$$x + \sqrt{x^2 + y^2} > 0,$$

άρα η παραπάνω παράσταση είναι καλά ορισμένη.

Τέλος, επειδή

$$\frac{\theta}{2} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

η arctan είναι η αντίστροφη της tan σε αυτό το διάστημα. Επομένως

$$\frac{\theta}{2} = \arctan\left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\right),$$

και συνεπώς

$$\boxed{\operatorname{Arg}(x + iy) = 2\arctan\left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\right).}$$

□

Στο κομμένο επίπεδο μπορούμε επομένως να γράψουμε

$$\boxed{\operatorname{Arg}(x + iy) = 2\arctan\left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\right).}$$

Ο δεξιός όρος είναι συνεχής, άρα η $\operatorname{Arg} z$ είναι συνεχής στο

$$\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].$$

Επιπλέον, η ίδια παράσταση δείχνει ότι η $\operatorname{Arg} z$ είναι πραγματικά διαφορίσιμη. Υπολογίζοντας τις μερικές παραγώγους, παίρνουμε

$$\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{Arg}(x+iy) = -\frac{y}{x^2+y^2},$$

και

$$\frac{\partial}{\partial y}\operatorname{Arg}(x+iy) = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Παρατήρηση 7.23. Δεν μπορούμε γενικά να γράψουμε γενικά ότι

$$\operatorname{Arg}(x+iy) = \arctan\frac{y}{x},$$

εκτός αν $x > 0$, καθώς η arctan παίρνει τιμές μόνο στο

$$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

και επομένως δεν διακρίνει σωστά το δεύτερο και το τρίτο τεταρτημόριο. Για παράδειγμα,

$$\operatorname{Arg}(-1+i) = \frac{3\pi}{4},$$

ενώ

$$\arctan\frac{1}{-1} = -\frac{\pi}{4}.$$

Επιπλέον, η παράσταση $\arctan(y/x)$ δεν ορίζεται όταν $x = 0$.

Στο κομμένο επίπεδο

$$\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$$

είναι προτιμότερο να χρησιμοποιούμε τον ενιαίο τύπο

$$\operatorname{Arg}(x+iy) = 2\arctan\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right),$$

ο οποίος δίνει σωστά το κύριο όρισμα χωρίς διάκριση περιπτώσεων.

Ο κύριος λογάριθμος ως ολόμορφη συνάρτηση

Για τον κύριο κλάδο αφαιρούμε τον αρνητικό πραγματικό ημιάξονα και θεωρούμε

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].$$

Στο Ω,

$$\operatorname{Log} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z$$

είναι συνεχής.

Θεώρημα 7.24. *Η συνάρτηση*

$$\operatorname{Log} z$$

είναι ολόμορφη στο

$$\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$$

και

$$\boxed{(\operatorname{Log} z)' = \frac{1}{z}.}$$

Απόδειξη. Θα επαληθεύσουμε τις εξισώσεις Cauchy–Riemann.

Γράφουμε

$$z = x + iy.$$

Τότε

$$u(x,y) = \ln|z| = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2),$$

ενώ

$$v(x,y) = \operatorname{Arg} z.$$

Σε κάθε σημείο του $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, το $\operatorname{Arg} z$ είναι τοπικά μια λεία επιλογή του ορίσματος. Οι μερικές παράγωγοί του είναι

$$v_x = -\frac{y}{x^2+y^2}, \qquad v_y = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Από την άλλη,

$$u_x = \frac{x}{x^2+y^2}, \qquad u_y = \frac{y}{x^2+y^2}.$$

Άρα

$$u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x.$$

Οι πρώτες μερικές παράγωγοι είναι συνεχείς, επομένως η $\operatorname{Log} z$ είναι ολόμορφη.

Τέλος,

$$\begin{aligned}(\operatorname{Log} z)' &= u_x + iv_x \\ &= \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} \\ &= \frac{x-iy}{x^2+y^2} \\ &= \frac{1}{x+iy} \\ &= \frac{1}{z}.\end{aligned}$$

□

Παρατήρηση 7.25. Η $\operatorname{Log} z$ δεν μπορεί να είναι ολόμορφη πάνω στην τομή κλάδου. Μάλιστα, εκεί δεν είναι καν συνεχής: καθώς πλησιάζουμε έναν αρνητικό πραγματικό αριθμό από πάνω και από κάτω, το $\operatorname{Arg} z$ τείνει αντίστοιχα στις τιμές

$$\pi \qquad \text{και} \qquad -\pi.$$

Πιο γενικά, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, ο κλάδος

$$\log_\alpha z = \ln|z| + i \arg_\alpha z$$

είναι ολόμορφος στο επίπεδο από το οποίο έχουμε αφαιρέσει την αντίστοιχη τομή κλάδου, και

$$\boxed{(\log_\alpha z)' = \frac{1}{z}.}$$

Η γεωμετρία του λογαρίθμου

Ο τύπος

$$\operatorname{Log} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$$

δείχνει ότι ο λογάριθμος μετατρέπει

$$\text{μέτρο} \longmapsto \text{πραγματικό μέρος},$$

και

$$\text{γωνία} \longmapsto \text{φανταστικό μέρος}.$$

Έτσι, οι κύκλοι

$$|z| = r$$

απεικονίζονται σε κατακόρυφες ευθείες

$$\Re w = \ln r,$$

ενώ οι ημιευθείες

$$\arg z = \theta$$

απεικονίζονται σε οριζόντιες ευθείες

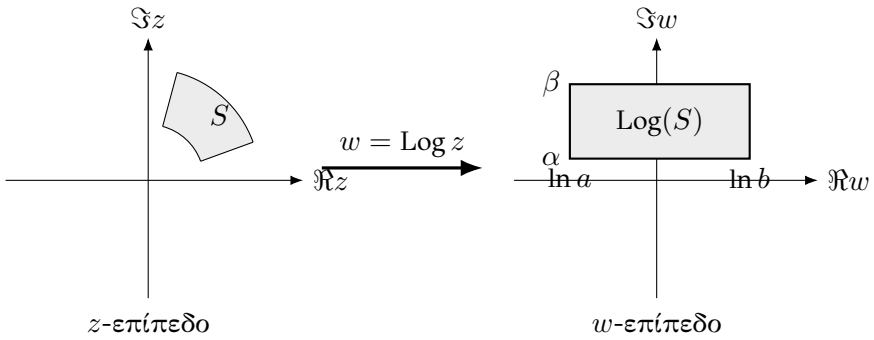
$$\Im w = \theta.$$

Για παράδειγμα, η περιοχή

$$S = \{z : a < |z| < b, \quad \alpha < \operatorname{Arg} z < \beta\}$$

απεικονίζεται στο ορθογώνιο

$$\boxed{\ln a < \Re w < \ln b, \qquad \alpha < \Im w < \beta.}$$



Η εικόνα αυτή είναι ιδιαίτερα σημαντική: η εκθετική μετατρέπει ορθογώνιες περιοχές σε κυκλικούς τομείς, ενώ ο λογάριθμος κάνει την αντίστροφη μετατροπή.

Σύνοψη

- Αν f είναι ολόμορφη και $f'(z_0) \neq 0$, τότε τοπικά συμπεριφέρεται σαν πολλαπλασιασμός με τον μιγαδικό αριθμό $f'(z_0)$: περιστροφή και ομοιοθεσία.
- Επομένως διατηρεί τις γωνίες στο z_0.
- Ο μιγαδικός λογάριθμος είναι φυσικά πολύτιμος:

$$\log z = \ln|z| + i(\theta + 2k\pi).$$

- Για να πάρουμε συνάρτηση, πρέπει να επιλέξουμε έναν κλάδο του επιχειρήματος.
- Δεν υπάρχει συνεχής καθολικός κλάδος του επιχειρήματος στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
- Ο κύριος κλάδος
$$\operatorname{Log} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z$$
είναι ολόμορφος στο
$$\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$$
και
$$(\operatorname{Log} z)' = \frac{1}{z}.$$