Μιγαδική Ανάλυση
1ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Μιγαδικοί αριθμοί – Πολική μορφή – Ακολουθίες – Όρια – Τοπολογία του $\mathbb{C}$ – Συμπάγεια

Πρόβλημα 1 Να βρείτε όλους τους $z \in \mathbb{C}$ για τους οποίους

$$|z+1| = |z| + 1.$$

Να δώσετε και γεωμετρική ερμηνεία.

Πρόβλημα 2 Να σχεδιάσετε τα παρακάτω σύνολα στο μιγαδικό επίπεδο:

$$\begin{aligned} A &= \{z \in \mathbb{C} : |z-(2+i)| = 2\}, \\ B &= \{z \in \mathbb{C} : |z+i| \le 1\}, \\ C &= \{z \in \mathbb{C} : |z-1| > |z+1|\}, \\ D &= \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0,\ \operatorname{Im} z \le 1\}. \end{aligned}$$

Πρόβλημα 3 (i) Να γράψετε σε πολική μορφή τους αριθμούς

$$-3-3i, \qquad -1-\sqrt{3}\,i, \qquad \frac{1-i}{1+i}, \qquad \frac{1+i}{1+\sqrt{3}\,i}.$$

(ii) Να υπολογίσετε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος των

$$(1+i)^{30}, \qquad (\sqrt{3}+i)^{20}.$$

Πρόβλημα 4 Να αποδείξετε ότι, για κάθε $z \in \mathbb{C}$,

$$|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| \le \sqrt{2}\,|z|.$$

Πότε ισχύει ισότητα;

Πρόβλημα 5 Αν $|z| = 2$, να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του

$$|z^4 + 1|.$$

Για ποιες τιμές του z επιτυγχάνονται;

Πρόβλημα 6 Να βρείτε όλα τα $z \in \mathbb{C}$ για τα οποία

$$|z + \overline{z}| = |z - \overline{z}|.$$

Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο των λύσεων.

Πρόβλημα 7 Να βρείτε όλα τα $z \in \mathbb{C}$ τέτοια ώστε

$$(1+2i)z + (3-i)\overline{z} = 3 + 2i.$$

Πρόβλημα 8 Έστω $z, w \in \mathbb{C}$ με

$$|z| \le 1, \qquad |w| \le 1.$$

Να αποδείξετε ότι

$$|z + w| \le |1 + \overline{z}w|.$$

Πότε ισχύει ισότητα;

Πρόβλημα 9 Να βρείτε και να σχεδιάσετε το σύνολο όλων των $z \in \mathbb{C}$ για τα οποία

$$2|z| = z + \overline{z} + 4.$$

Πρόβλημα 10 Έστω

$$a = re^{i\theta} \neq 0.$$

(i) Να βρείτε όλες τις λύσεις της εξίσωσης

$$z^n = a.$$

(ii) Να δείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς n διαφορετικές λύσεις και ότι είναι οι κορυφές κανονικού n-γώνου.

(iii) Να λύσετε την εξίσωση

$$z^4 = -16.$$

Πρόβλημα 11 (i) Να περιγράψετε γεωμετρικά την απεικόνιση

$$f(z) = iz.$$

(ii) Να βρείτε την εικόνα του τομέα

$$S = \left\{ re^{i\theta} : 0 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right\}$$

μέσω της απεικόνισης

$$f(z) = z^2.$$

(iii) Για

$$f(z) = \frac{1}{z}, \qquad z \neq 0,$$

να περιγράψετε τις εικόνες των συνόλων

$$|z| < 1, \qquad |z| > 1, \qquad |z| = 1.$$

Πρόβλημα 12 Να υπολογίσετε, όπου υπάρχουν, τα όρια

(i) $\lim_{z\to 2} \dfrac{z^4 - 16}{z - 2}$,

(ii) $\lim_{z\to 0} z\, e^{i/|z|}$,

(iii) $\lim_{z\to 0} \dfrac{\overline{z}}{z}$,

(iv) $\lim_{z\to 0} \dfrac{\operatorname{Re} z}{|z|}$.

Όταν ένα όριο δεν υπάρχει, να το αποδείξετε εξετάζοντας κατάλληλους τρόπους προσέγγισης του 0.

Πρόβλημα 13 Έστω $K \subset \mathbb{C}$ συμπαγές και $F \subset K$ κλειστό. Να αποδείξετε, χρησιμοποιώντας τον ακολουθιακό ορισμό της συμπάγειας, ότι το F είναι συμπαγές.

Πρόβλημα 14 Έστω $K \subset \mathbb{C}$ συμπαγές και

$$F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \cdots$$

μια φθίνουσα ακολουθία μη κενών κλειστών υποσυνόλων του K. Να αποδείξετε ότι

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset.$$

Παραδίδετε 6 Προβλήματα έως 05–10–2026.