Δύο βασικές ιδιότητες του μέτρου

Για $z, w \in \mathbb{C}$, το μέτρο ικανοποιεί:

Δύο βασικές ιδιότητες του μέτρου

Για $z, w \in \mathbb{C}$, το μέτρο ικανοποιεί:

$$\boxed{|zw| = |z|\,|w|}$$

Δύο βασικές ιδιότητες του μέτρου

Για $z, w \in \mathbb{C}$, το μέτρο ικανοποιεί:

$$\boxed{|zw| = |z|\,|w|}$$

$$\boxed{|z + w| \leq |z| + |w|}$$

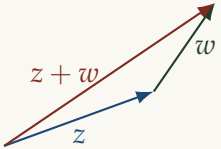
Δύο βασικές ιδιότητες του μέτρου

Για $z, w \in \mathbb{C}$, το μέτρο ικανοποιεί:

$$\boxed{|zw| = |z|\,|w|}$$

$$\boxed{|z + w| \leq |z| + |w|}$$

Η δεύτερη είναι η *τριγωνική ανισότητα*.



$$|z + w| \leq |z| + |w|$$

Το $\mathbb{C}$ είναι μετρικός χώρος

Ορίζουμε

$$d(z, w) = |z - w|.$$

Το $\mathbb{C}$ είναι μετρικός χώρος

Ορίζουμε

$$d(z, w) = |z - w|.$$

Τότε για κάθε $z, w, u \in \mathbb{C}$:

$$d(z, w) \geq 0, \qquad d(z, w) = 0 \iff z = w.$$

Το $\mathbb{C}$ είναι μετρικός χώρος

Ορίζουμε

$$d(z, w) = |z - w|.$$

Τότε για κάθε $z, w, u \in \mathbb{C}$:

$$d(z, w) \geq 0, \qquad d(z, w) = 0 \iff z = w.$$

$$d(z, w) = d(w, z).$$

Το $\mathbb{C}$ είναι μετρικός χώρος

Ορίζουμε

$$d(z, w) = |z - w|.$$

Τότε για κάθε $z, w, u \in \mathbb{C}$:

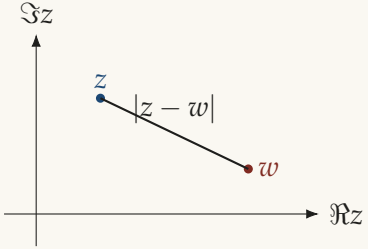
$$d(z, w) \geq 0, \qquad d(z, w) = 0 \iff z = w.$$

$$d(z, w) = d(w, z).$$

$$d(z, u) \leq d(z, w) + d(w, u).$$

Άρα

$(\mathbb{C}, d)$ είναι μετρικός χώρος.



Επίλυση της εξίσωσης $z^n = 1$

Θέλουμε να λύσουμε

$$z^n = 1.$$

Επίλυση της εξίσωσης $z^n = 1$

Θέλουμε να λύσουμε

$$z^n = 1.$$

Γράφουμε

$$z = re^{i\theta}.$$

Επίλυση της εξίσωσης $z^n = 1$

Θέλουμε να λύσουμε

$$z^n = 1.$$

Γράφουμε

$$z = re^{i\theta}.$$

Τότε

$$z^n = r^n e^{in\theta}.$$

Επίλυση της εξίσωσης $z^n = 1$

Θέλουμε να λύσουμε

$$z^n = 1.$$

Γράφουμε

$$z = re^{i\theta}.$$

Τότε

$$z^n = r^n e^{in\theta}.$$

Η εξίσωση $z^n = 1$ γίνεται

$$r^n e^{in\theta} = 1 = e^{2\pi ik}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Επίλυση της εξίσωσης $z^n = 1$

Θέλουμε να λύσουμε

$$z^n = 1.$$

Γράφουμε

$$z = re^{i\theta}.$$

Τότε

$$z^n = r^n e^{in\theta}.$$

Η εξίσωση $z^n = 1$ γίνεται

$$r^n e^{in\theta} = 1 = e^{2\pi ik}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Άρα $r^n = 1$, οπότε $r = 1$ και

$$n\theta = 2\pi k.$$

Επίλυση της εξίσωσης $z^n = 1$

Θέλουμε να λύσουμε

$$z^n = 1.$$

Γράφουμε

$$z = re^{i\theta}.$$

Τότε

$$z^n = r^n e^{in\theta}.$$

Η εξίσωση $z^n = 1$ γίνεται

$$r^n e^{in\theta} = 1 = e^{2\pi ik}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Άρα $r^n = 1$, οπότε $r = 1$ και

$$n\theta = 2\pi k.$$

Επομένως

$$\boxed{\theta = \frac{2\pi k}{n}.}$$

Οι n-οστές ρίζες της μονάδας

Άρα οι λύσεις της

$$z^n = 1$$

είναι

$$\boxed{\omega_k = e^{2\pi i k/n}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.}$$

Οι n-οστές ρίζες της μονάδας

Άρα οι λύσεις της

$$z^n = 1$$

είναι

$$\boxed{\omega_k = e^{2\pi i k/n}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.}$$

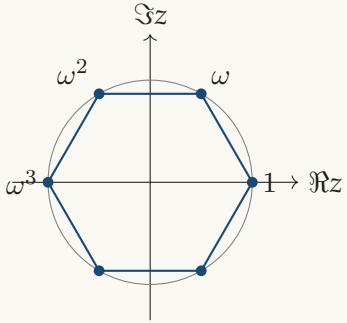
Αν θέσουμε

$$\omega = e^{2\pi i/n},$$

τότε οι ρίζες γράφονται

$$\boxed{1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}.}$$

Γεωμετρικά: βρίσκονται στον μοναδιαίο κύκλο και σχηματίζουν κανονικό n-γωνο.



Ανοικτές και κλειστές μπάλες στο $\mathbb{C}$

Στο $\mathbb{C}$, η ανοικτή μπάλα με κέντρο z_0 και ακτίνα $r > 0$ είναι

$$\boxed{B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}.}$$

Ανοικτές και κλειστές μπάλες στο $\mathbb{C}$

Στο $\mathbb{C}$, η ανοικτή μπάλα με κέντρο z_0 και ακτίνα $r > 0$ είναι

$$\boxed{B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}.}$$

Στη μιγαδική ανάλυση συχνά τη λέμε *δίσκο* και γράφουμε

$$D(z_0, r) = B(z_0, r).$$

Ανοικτές και κλειστές μπάλες στο $\mathbb{C}$

Στο $\mathbb{C}$, η ανοικτή μπάλα με κέντρο z_0 και ακτίνα $r > 0$ είναι

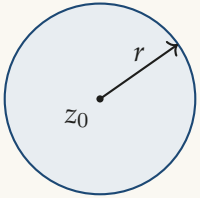
$$\boxed{B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}.}$$

Στη μιγαδική ανάλυση συχνά τη λέμε *δίσκο* και γράφουμε

$$D(z_0, r) = B(z_0, r).$$

Η κλειστή μπάλα είναι

$$\boxed{\overline{B}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}.}$$



$D(z_0, r)$

Ανοικτά σύνολα

Ορισμός

Ένα σύνολο $U \subset \mathbb{C}$ λέγεται *ανοικτό* αν για κάθε $\alpha \in U$ υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε

$$D(\alpha, r) \subset U.$$

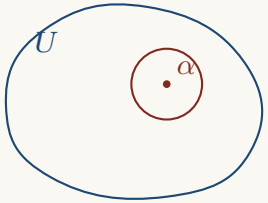
Ανοικτά σύνολα

Ορισμός

Ένα σύνολο $U \subset \mathbb{C}$ λέγεται *ανοικτό* αν για κάθε $\alpha \in U$ υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε

$$D(\alpha, r) \subset U.$$

Η ακτίνα r μπορεί να εξαρτάται από το σημείο α.



$D(\alpha, r) \subset U$

Παραδείγματα ανοικτών συνόλων

$$\{z = x + iy : y > 0\}$$

είναι το άνω ημιεπίπεδο.

Παραδείγματα ανοικτών συνόλων

$$\{z = x + iy : y > 0\}$$

είναι το άνω ημιεπίπεδο.

$$\{z = x + iy : x > 0,\ y > 0\}$$

είναι το πρώτο τεταρτημόριο χωρίς τους άξονες.

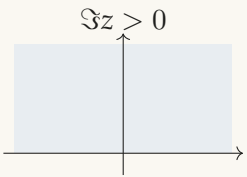
Παραδείγματα ανοικτών συνόλων

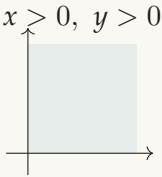
$$\{z = x + iy : y > 0\}$$

είναι το άνω ημιεπίπεδο.

$$\{z = x + iy : x > 0,\ y > 0\}$$

είναι το πρώτο τεταρτημόριο χωρίς τους άξονες.





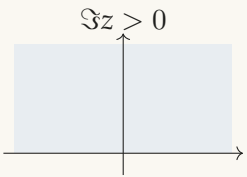
Παραδείγματα ανοικτών συνόλων

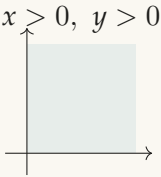
$$\{z = x + iy : y > 0\}$$

είναι το άνω ημιεπίπεδο.

$$\{z = x + iy : x > 0,\ y > 0\}$$

είναι το πρώτο τεταρτημόριο χωρίς τους άξονες.





Αν προσθέσουμε τους άξονες στο πρώτο τεταρτημόριο, το σύνολο δεν είναι ανοικτό.

Εσωτερικό σημείο και συνοριακό σημείο

Έστω $S \subset \mathbb{C}$.

Εσωτερικό σημείο και συνοριακό σημείο

Έστω $S \subset \mathbb{C}$.

Εσωτερικό σημείο

Το α λέγεται εσωτερικό σημείο του S αν υπάρχει $r > 0$ ώστε

$$D(\alpha, r) \subset S.$$

Εσωτερικό σημείο και συνοριακό σημείο

Έστω $S \subset \mathbb{C}$.

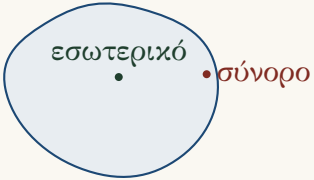
Εσωτερικό σημείο

Το α λέγεται εσωτερικό σημείο του S αν υπάρχει $r > 0$ ώστε

$$D(\alpha, r) \subset S.$$

Συνοριακό σημείο

Το α λέγεται συνοριακό σημείο του S αν κάθε δίσκος $D(\alpha, r)$ περιέχει και σημεία του S και σημεία του $\mathbb{C} \setminus S$.



Σημείο προσκόλλησης και κλειστότητα

Ένα σημείο α λέγεται *σημείο προσκόλλησης* του S αν

$$\boxed{\alpha \in \overline{S}.}$$

Σημείο προσκόλλησης και κλειστότητα

Ένα σημείο α λέγεται *σημείο προσκόλλησης* του S αν

$$\boxed{\alpha \in \overline{S}.}$$

Ισοδύναμα,

$$D(\alpha, r) \cap S \neq \varnothing \qquad \forall r > 0.$$

Σημείο προσκόλλησης και κλειστότητα

Ένα σημείο α λέγεται *σημείο προσκόλλησης* του S αν

$$\boxed{\alpha \in \overline{S}.}$$

Ισοδύναμα,

$$D(\alpha, r) \cap S \neq \varnothing \qquad \forall r > 0.$$

Η *κλειστότητα* του S είναι

$$\overline{S} = S \cup \partial S.$$

Σημείο προσκόλλησης και κλειστότητα

Ένα σημείο α λέγεται *σημείο προσκόλλησης* του S αν

$$\boxed{\alpha \in \overline{S}.}$$

Ισοδύναμα,

$$D(\alpha, r) \cap S \neq \varnothing \qquad \forall r > 0.$$

Η *κλειστότητα* του S είναι

$$\overline{S} = S \cup \partial S.$$

Ένα σύνολο S λέγεται *κλειστό* αν

$$\boxed{S = \overline{S}.}$$

Σημείο προσκόλλησης και κλειστότητα

Ένα σημείο α λέγεται *σημείο προσκόλλησης* του S αν

$$\boxed{\alpha \in \overline{S}.}$$

Ισοδύναμα,

$$D(\alpha, r) \cap S \neq \varnothing \qquad \forall r > 0.$$

Η *κλειστότητα* του S είναι

$$\overline{S} = S \cup \partial S.$$

Ένα σύνολο S λέγεται *κλειστό* αν

$$\boxed{S = \overline{S}.}$$

Δηλαδή: περιέχει όλα τα συνοριακά σημεία του.

Σημείο προσκόλλησης vs σημείο συσσώρευσης

$$\alpha \in \overline{S}$$

σημαίνει ότι κάθε δίσκος γύρω από το α συναντά το S.

Σημείο προσκόλλησης vs σημείο συσσώρευσης

$$\alpha \in \overline{S}$$

σημαίνει ότι κάθε δίσκος γύρω από το α συναντά το S.
Αλλά το α μπορεί να είναι απλώς ένα απομονωμένο σημείο του S.

Σημείο προσκόλλησης vs σημείο συσσώρευσης

$$\alpha \in \overline{S}$$

σημαίνει ότι κάθε δίσκος γύρω από το α συναντά το S.
Αλλά το α μπορεί να είναι απλώς ένα απομονωμένο σημείο του S.

Σημείο συσσώρευσης

Το v λέγεται σημείο συσσώρευσης του S αν κάθε δίσκος γύρω από το v περιέχει άπειρα σημεία του S.

Σημείο προσκόλλησης vs σημείο συσσώρευσης

$$\alpha \in \overline{S}$$

σημαίνει ότι κάθε δίσκος γύρω από το α συναντά το S.
Αλλά το α μπορεί να είναι απλώς ένα απομονωμένο σημείο του S.

Σημείο συσσώρευσης

Το v λέγεται σημείο συσσώρευσης του S αν κάθε δίσκος γύρω από το v περιέχει άπειρα σημεία του S.

Παράδειγμα:

$$S = \{0\}.$$

$$0 \in \overline{S},$$

αλλά το 0 δεν είναι σημείο συσσώρευσης.

Σημείο προσκόλλησης vs σημείο συσσώρευσης

$$\alpha \in \overline{S}$$

σημαίνει ότι κάθε δίσκος γύρω από το α συναντά το S.
Αλλά το α μπορεί να είναι απλώς ένα απομονωμένο σημείο του S.

Σημείο συσσώρευσης

Το v λέγεται σημείο συσσώρευσης του S αν κάθε δίσκος γύρω από το v περιέχει άπειρα σημεία του S.

Παράδειγμα:

$$S = \{0\}.$$

$$0 \in \overline{S},$$

αλλά το 0 δεν είναι σημείο συσσώρευσης.

συσσώρευση $\Longrightarrow$ προσκόλληση, όχι αντίστροφα.

Φραγμένα σύνολα

Ορισμός

Ένα σύνολο $S \subset \mathbb{C}$ λέγεται *φραγμένο* αν υπάρχει $C > 0$ τέτοιο ώστε

$$|z| \leq C \qquad \text{για κάθε } z \in S.$$

Φραγμένα σύνολα

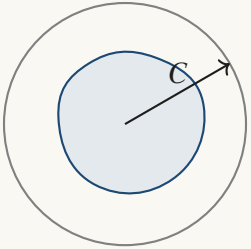
Ορισμός

Ένα σύνολο $S \subset \mathbb{C}$ λέγεται *φραγμένο* αν υπάρχει $C > 0$ τέτοιο ώστε

$$|z| \leq C \qquad \text{για κάθε } z \in S.$$

Ισοδύναμα:

$S \subset \overline{D}(0, C)$.



$S \subset \overline{D}(0, C)$

Όριο συνάρτησης

Έστω $f : S \to \mathbb{C}$, και έστω α σημείο προσκόλλησης του S.

Όριο συνάρτησης

Έστω $f : S \to \mathbb{C}$, και έστω α σημείο προσκόλλησης του S.
Λέμε ότι

$$\lim_{z \to \alpha} f(z) = w$$

αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$z \in S, \quad |z - \alpha| < \delta$$

να συνεπάγεται

$$|f(z) - w| < \varepsilon.$$

Όριο συνάρτησης

Έστω $f : S \to \mathbb{C}$, και έστω α σημείο προσκόλλησης του S.
Λέμε ότι

$$\lim_{z \to \alpha} f(z) = w$$

αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

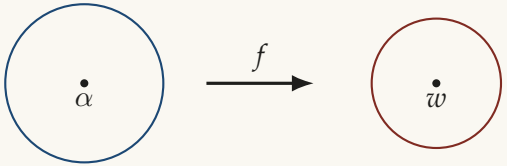
$$z \in S, \quad |z - \alpha| < \delta$$

να συνεπάγεται

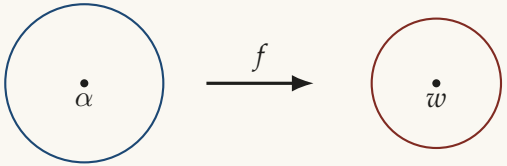
$$|f(z) - w| < \varepsilon.$$

$$\boxed{z \text{ κοντά στο } \alpha \quad \Longrightarrow \quad f(z) \text{ κοντά στο } w.}$$

Σχήμα για το όριο

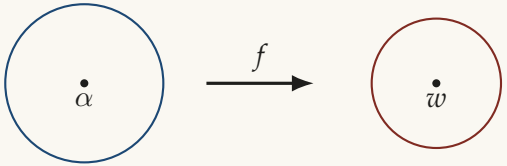


Σχήμα για το όριο



Δεν απαιτούμε αναγκαστικά $\alpha \in S$.

Σχήμα για το όριο



Δεν απαιτούμε αναγκαστικά $\alpha \in S$.
Αν $\alpha \in S$, τότε μπορούμε να μιλήσουμε και για συνέχεια.

Συνέχεια

Ορισμός

Αν $\alpha \in S$, η $f : S \to \mathbb{C}$ λέγεται συνεχής στο α αν

$$\lim_{z \to \alpha} f(z) = f(\alpha).$$

Συνέχεια

Ορισμός

Αν $\alpha \in S$, η $f : S \to \mathbb{C}$ λέγεται συνεχής στο α αν

$$\lim_{z \to \alpha} f(z) = f(\alpha).$$

Οι συνήθεις κανόνες των ορίων ισχύουν όπως στον πραγματικό λογισμό:

$$\lim(f + g) = \lim f + \lim g.$$

Συνέχεια

Ορισμός

Αν $\alpha \in S$, η $f : S \to \mathbb{C}$ λέγεται συνεχής στο α αν

$$\lim_{z \to \alpha} f(z) = f(\alpha).$$

Οι συνήθεις κανόνες των ορίων ισχύουν όπως στον πραγματικό λογισμό:

$$\lim(f + g) = \lim f + \lim g.$$

$$\lim(fg) = (\lim f)(\lim g).$$

Συνέχεια

Ορισμός

Αν $\alpha \in S$, η $f : S \to \mathbb{C}$ λέγεται συνεχής στο α αν

$$\lim_{z \to \alpha} f(z) = f(\alpha).$$

Οι συνήθεις κανόνες των ορίων ισχύουν όπως στον πραγματικό λογισμό:

$$\lim(f + g) = \lim f + \lim g.$$

$$\lim(fg) = (\lim f)(\lim g).$$

Αν $\lim g \neq 0$, τότε

$$\lim \frac{f}{g} = \frac{\lim f}{\lim g}.$$

Ακολουθίες στο $\mathbb{C}$

Λέμε ότι

$$z_n \to z$$

αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει N τέτοιο ώστε

$$n \geq N \quad \Longrightarrow \quad |z_n - z| < \varepsilon.$$

Ακολουθίες στο $\mathbb{C}$

Λέμε ότι

$$z_n \to z$$

αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει N τέτοιο ώστε

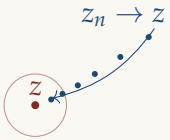
$$n \geq N \quad \Longrightarrow \quad |z_n - z| < \varepsilon.$$

Αν

$$z_n = x_n + iy_n, \qquad z = x + iy,$$

τότε

$$\boxed{z_n \to z \iff x_n \to x \text{ και } y_n \to y.}$$



Ακολουθίες Cauchy

Ορισμός

Μια ακολουθία (z_n) λέγεται Cauchy αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει N τέτοιο ώστε

$$m, n \geq N \quad \Longrightarrow \quad |z_m - z_n| < \varepsilon.$$

Ακολουθίες Cauchy

Ορισμός

Μια ακολουθία (z_n) λέγεται Cauchy αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει N τέτοιο ώστε

$$m, n \geq N \quad \Longrightarrow \quad |z_m - z_n| < \varepsilon.$$

Αν

$$z_n = x_n + iy_n,$$

τότε

$$(z_n) \text{ Cauchy} \iff (x_n), (y_n) \text{ Cauchy}.$$

Ακολουθίες Cauchy

Ορισμός

Μια ακολουθία (z_n) λέγεται Cauchy αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει N τέτοιο ώστε

$$m, n \geq N \quad \Longrightarrow \quad |z_m - z_n| < \varepsilon.$$

Αν

$$z_n = x_n + iy_n,$$

τότε

$$(z_n) \text{ Cauchy} \iff (x_n), (y_n) \text{ Cauchy}.$$

Επειδή κάθε πραγματική ακολουθία Cauchy συγκλίνει,

κάθε Cauchy ακολουθία στο $\mathbb{C}$ συγκλίνει.

Ακολουθίες Cauchy

Ορισμός

Μια ακολουθία (z_n) λέγεται Cauchy αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει N τέτοιο ώστε

$$m, n \geq N \quad \Longrightarrow \quad |z_m - z_n| < \varepsilon.$$

Αν

$$z_n = x_n + iy_n,$$

τότε

$$(z_n) \text{ Cauchy} \iff (x_n), (y_n) \text{ Cauchy}.$$

Επειδή κάθε πραγματική ακολουθία Cauchy συγκλίνει,

$$\boxed{\text{κάθε Cauchy ακολουθία στο } \mathbb{C} \text{ συγκλίνει.}}$$

Άρα το $\mathbb{C}$ είναι πλήρης μετρικός χώρος.

Συμπαγή σύνολα

Ορισμός

Ένα σύνολο $K \subset \mathbb{C}$ λέγεται *συμπαγές* αν κάθε ακολουθία $(z_n) \subset K$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία με όριο που ανήκει στο K.

Συμπαγή σύνολα

Ορισμός

Ένα σύνολο $K \subset \mathbb{C}$ λέγεται *συμπαγές* αν κάθε ακολουθία $(z_n) \subset K$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία με όριο που ανήκει στο K.

Δηλαδή:

$$z_n \in K \quad \Longrightarrow \quad \exists z_{n_k} \to z \in K.$$

Συμπαγή σύνολα

Ορισμός

Ένα σύνολο $K \subset \mathbb{C}$ λέγεται *συμπαγές* αν κάθε ακολουθία $(z_n) \subset K$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία με όριο που ανήκει στο K.

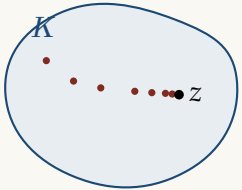
Δηλαδή:

$$z_n \in K \quad \Longrightarrow \quad \exists z_{n_k} \to z \in K.$$

Theorem (Heine–Borel στο $\mathbb{C}$)

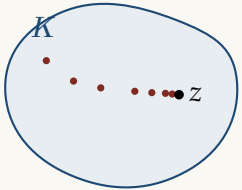
$$\boxed{K \subset \mathbb{C} \text{ συμπαγές } \iff K \text{ κλειστό και φραγμένο.}}$$

Σχήμα για το συμπαγές



κάθε ακολουθία έχει υπακολουθία που συγκλίνει μέσα στο K

Σχήμα για το συμπαγές



κάθε ακολουθία έχει υπακολουθία που συγκλίνει μέσα στο K

Η συμπάγεια είναι ο τρόπος να πούμε:

δεν μπορεί να ξεφύγει τίποτα ούτε προς το άπειρο ούτε προς το σύνορο.

Συνεχής εικόνα συμπαγούς

Theorem

Αν $K \subset \mathbb{C}$ *είναι συμπαγές και* $f : K \to \mathbb{C}$ *είναι συνεχής, τότε*

$$f(K)$$

είναι συμπαγές.

Συνεχής εικόνα συμπαγούς

Theorem

Αν $K \subset \mathbb{C}$ είναι συμπαγές και $f : K \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής, τότε

$$f(K)$$

είναι συμπαγές.

Άρα, επειδή στο $\mathbb{C}$

$$\text{συμπαγές} \iff \text{κλειστό και φραγμένο},$$

η εικόνα $f(K)$ είναι επίσης κλειστή και φραγμένη.

Συνεχής εικόνα συμπαγούς

Theorem

Αν $K \subset \mathbb{C}$ είναι συμπαγές και $f : K \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής, τότε

$$f(K)$$

είναι συμπαγές.

Άρα, επειδή στο $\mathbb{C}$

$$\text{συμπαγές} \iff \text{κλειστό και φραγμένο},$$

η εικόνα $f(K)$ είναι επίσης κλειστή και φραγμένη.

