# Μιγαδική Ανάλυση I

1. Μιγαδικοί αριθμοί, γεωμετρία και βασικές απεικονίσεις

## 1 Οι μιγαδικοί αριθμοί

Η μετάβαση από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{C}$ μπορεί να ιδωθεί ως ένα ακόμη βήμα στην επέκταση των αριθμητικών συστημάτων. Για παράδειγμα, η εξίσωση

$$x^2 = 2$$

δεν έχει λύση στο $\mathbb{Q}$, αλλά έχει λύση στο $\mathbb{R}$. Αντίθετα, η εξίσωση

$$x^2 = -1$$

δεν έχει λύση στο $\mathbb{R}$. Εισάγουμε λοιπόν ένα νέο σύμβολο $i$ με την ιδιότητα

$$i^2 = -1.$$

**Ορισμός 1.1.** Το σύνολο των *μιγαδικών αριθμών* είναι

$$\mathbb{C} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Αν $z = x + iy$, ορίζουμε

$$\operatorname{Re} z = x, \qquad \operatorname{Im} z = y.$$

Η γραφή $z = x + iy$ είναι μοναδική. Η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός γίνονται με τους συνηθισμένους αλγεβρικούς κανόνες, χρησιμοποιώντας τη σχέση $i^2 = -1$:

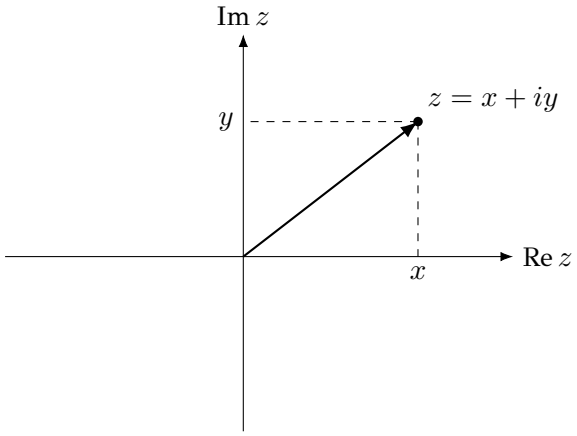
$$(x + iy) + (u + iv) = (x + u) + i(y + v),$$

και

$$(x + iy)(u + iv) = (xu - yv) + i(xv + yu).$$

### Το μιγαδικό επίπεδο

Ταυτίζουμε τον μιγαδικό αριθμό $z = x + iy$ με το σημείο $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Έτσι ο οριζόντιος άξονας είναι ο πραγματικός άξονας και ο κατακόρυφος ο φανταστικός άξονας.



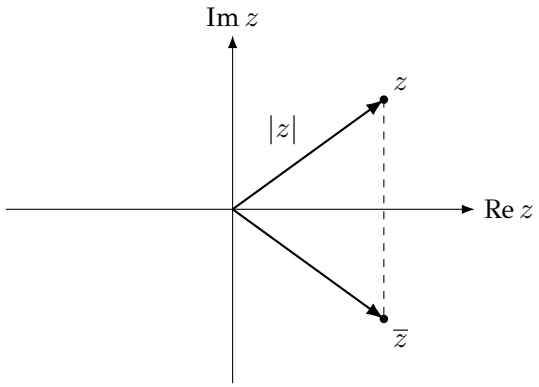
**Ορισμός 1.2.** Αν $z = x + iy$, ο *συζυγής* του $z$ είναι

$$\overline{z} = x - iy,$$

και το *μέτρο* του $z$ είναι

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Γεωμετρικά, το $\overline{z}$ είναι η ανάκλαση του $z$ ως προς τον πραγματικό άξονα, ενώ το $|z|$ είναι η απόσταση του $z$ από το $0$.




Οι βασικές ταυτότητες είναι

$$z\overline{z} = |z|^2, \qquad \operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2}, \qquad \operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$

Ειδικότερα, αν $z \neq 0$, τότε

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Άρα κάθε μη μηδενικός μιγαδικός έχει πολλαπλασιαστικό αντίστροφο.

**Πρόταση 1.3** (Βασικές ιδιότητες του μέτρου). *Για κάθε $z, w \in \mathbb{C}$ ισχύουν*

$$|zw| = |z|\,|w|$$

*και*

$$|z + w| \leq |z| + |w|.$$

*Απόδειξη.* Η πρώτη σχέση προκύπτει από

$$|zw|^2 = zw\,\overline{zw} = zw\,\overline{z}\,\overline{w} = |z|^2|w|^2.$$

Για τη δεύτερη,

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w)(\overline{z} + \overline{w}) \\ &= |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re}(z\overline{w}) \\ &\leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z\overline{w}| \\ &= (|z| + |w|)^2. \end{aligned}$$

Παίρνοντας τετραγωνικές ρίζες παίρνουμε την τριγωνική ανισότητα. □

### Το μέτρο ως απόσταση

Αν $z_1 = x_1 + iy_1$ και $z_2 = x_2 + iy_2$, τότε

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Επομένως $|z_1 - z_2|$ είναι ακριβώς η ευκλείδεια απόσταση των δύο σημείων στο επίπεδο.

**Παράδειγμα 1.4** (Απόσταση δύο μιγαδικών)**.** Θεωρούμε

$$z_1 = 2 + 4i, \qquad z_2 = 5 + i.$$

Τότε

$$|z_1| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}, \qquad |z_2| = \sqrt{26},$$

ενώ

$$|z_1 - z_2| = |-3 + 3i| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

Άρα το $z_2$ βρίσκεται μακρύτερα από το 0, και η μεταξύ τους απόσταση είναι $3\sqrt{2}$.

**Παρατήρηση 1.5.** Στο $\mathbb{C}$ δεν υπάρχει φυσική διάταξη συμβατή με τις πράξεις όπως στο $\mathbb{R}$. Έτσι εκφράσεις όπως $z_1 < z_2$ δεν έχουν γενικά νόημα. Μπορούμε όμως να συγκρίνουμε τα πραγματικά μεγέθη $|z_1|$ και $|z_2|$.

### Κύκλοι, δίσκοι και ελλείψεις

Η γεωμετρική ερμηνεία του $|z - z_0|$ κάνει πολλές εξισώσεις στο $\mathbb{C}$ άμεσα αναγνωρίσιμες.

**Παράδειγμα 1.6.** Να περιγραφούν γεωμετρικά τα παρακάτω σύνολα:

1. $|z + 4 - i| = 2$,
2. $|z + 4 - i| \leq 2$,
3. $|z + 2 + 2i| + |z + 1 + i| = 3\sqrt{2}$.

Για τα δύο πρώτα γράφουμε

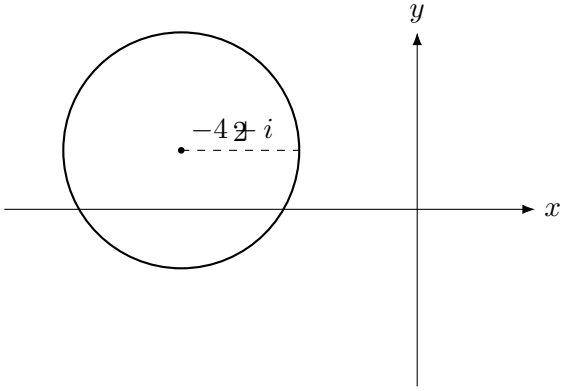
$$|z + 4 - i| = |z - (-4 + i)|.$$

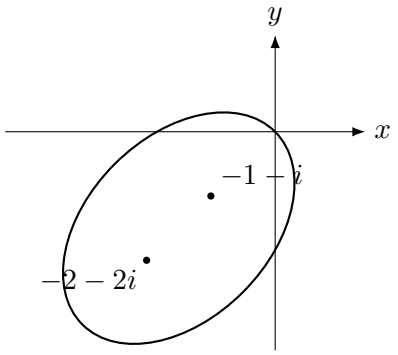
Άρα το πρώτο σύνολο είναι ο κύκλος με κέντρο $-4 + i$ και ακτίνα 2, ενώ το δεύτερο είναι ο αντίστοιχος κλειστός δίσκος.

Για το τρίτο,

$$|z - (-2 - 2i)| + |z - (-1 - i)| = 3\sqrt{2}.$$

Πρόκειται για τα σημεία των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από τα δύο σταθερά σημεία $-2 - 2i$ και $-1 - i$ είναι σταθερό. Άρα είναι έλλειψη με εστίες αυτά τα δύο σημεία.



## 2 Πολική μορφή

Η καρτεσιανή γραφή $z = x + iy$ είναι χρήσιμη για πρόσθεση και αφαίρεση. Για πολλαπλασιασμό, δυνάμεις και ρίζες είναι συχνά καλύτερη η πολική μορφή.

Για $\theta \in \mathbb{R}$ χρησιμοποιούμε τη σημειογραφία

$$e^{i\theta} := \cos\theta + i\sin\theta.$$

Προς το παρόν αυτό είναι απλώς συντομογραφία. Η μιγαδική εκθετική συνάρτηση θα μελετηθεί αργότερα συστηματικά.

Αν $z = x + iy \neq 0$, γράφουμε

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

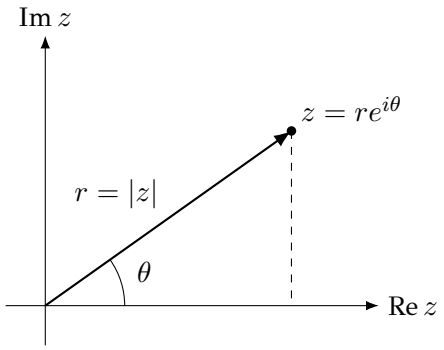
Υπάρχει $\theta \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta.$$

Άρα

$$\boxed{z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}.}$$

Ο αριθμός $\theta$ λέγεται *όρισμα* του $z$ και γράφουμε $\theta = \arg(z)$. Δεν είναι μοναδικός: αν $\theta$ είναι όρισμα, τότε και $\theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, είναι όρισμα.




**Θεώρημα 2.1.** *Για κάθε $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$,*

$$e^{i\theta}e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)}.$$

*Απόδειξη.* Από τους τύπους πρόσθεσης,

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\varphi + i\sin\varphi) &= \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi + i(\sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi)\\ &= \cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi).\end{aligned}$$

□

Άρα αν

$$z = re^{i\theta}, \qquad w = se^{i\varphi},$$

τότε

$$zw = rs\,e^{i(\theta+\varphi)}.$$

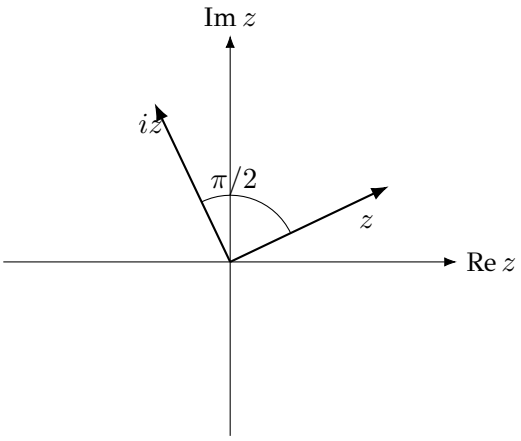
Δηλαδή στον πολλαπλασιασμό *πολλαπλασιάζονται τα μέτρα και προστίθενται τα ορίσματα.*

**Παρατήρηση 2.2** (Μια πρώτη γεωμετρική πράξη). Ο πολλαπλασιασμός με $i = e^{i\pi/2}$ στρέφει κάθε σημείο κατά γωνία $\pi/2$ αριστερόστροφα γύρω από το 0:

$$z = x + iy \quad \Longrightarrow \quad iz = -y + ix.$$

Στις συντεταγμένες,

$$(x, y) \longmapsto (-y, x).$$




**Παράδειγμα 2.3** (Πολική μορφή). Για τους αριθμούς

$$5, \qquad -3i, \qquad \sqrt{3}+i, \qquad 1+i, \qquad 1-i, \qquad -1-i,$$

βρίσκουμε το μέτρο και ένα όρισμα και τους γράφουμε σε πολική μορφή:

| $z$ | $\lvert z\rvert$ | $\theta$ | $z = \lvert z\rvert e^{i\theta}$ |
|---|---|---|---|
| $5$ | $5$ | $0$ | $5e^{i0}$ |
| $-3i$ | $3$ | $-\pi/2$ | $3e^{-i\pi/2}$ |
| $\sqrt{3}+i$ | $2$ | $\pi/6$ | $2e^{i\pi/6}$ |
| $1+i$ | $\sqrt{2}$ | $\pi/4$ | $\sqrt{2}e^{i\pi/4}$ |
| $1-i$ | $\sqrt{2}$ | $-\pi/4$ | $\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$ |
| $-1-i$ | $\sqrt{2}$ | $-3\pi/4$ | $\sqrt{2}e^{-3i\pi/4}$ |

Φυσικά, σε κάθε γραμμή μπορούμε να αντικαταστήσουμε το $\theta$ με $\theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

# 3 Εκθετική μορφή και γινόμενο μιγαδικών

Θυμόμαστε ότι για $\theta \in \mathbb{R}$ ορίζουμε

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Η σημειογραφία αυτή δεν είναι τυχαία: η μιγαδική εκθετική ικανοποιεί τον ίδιο βασικό κανόνα με την πραγματική εκθετική.

**Πρόταση 3.1.** *Για κάθε $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$,*

$$e^{i(\theta+\varphi)} = e^{i\theta}e^{i\varphi}.$$

*Απόδειξη.* Από τον ορισμό,

$$e^{i(\theta+\varphi)} = \cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi).$$

Χρησιμοποιώντας τους τύπους πρόσθεσης,

$$\cos(\theta+\varphi) = \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi$$

και

$$\sin(\theta+\varphi) = \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi.$$

Άρα

$$\begin{aligned} e^{i(\theta+\varphi)} &= \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi \\ &\quad + i\big(\sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi\big) \\ &= (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ &= e^{i\theta}e^{i\varphi}. \end{aligned}$$

□

Τώρα, αν

$$\alpha = a + ib \in \mathbb{C},$$

ορίζουμε

$$e^{\alpha} = e^{a}e^{ib}.$$

**Πρόταση 3.2.** *Για κάθε* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

$$\boxed{e^{\alpha+\beta} = e^{\alpha}e^{\beta}.}$$

*Απόδειξη.* Γράφουμε

$$\alpha = a_1 + ia_2, \qquad \beta = b_1 + ib_2.$$

Τότε

$$\alpha + \beta = (a_1 + b_1) + i(a_2 + b_2),$$

οπότε

$$\begin{aligned} e^{\alpha+\beta} &= e^{a_1+b_1}e^{i(a_2+b_2)} \\ &= e^{a_1}e^{b_1}e^{ia_2}e^{ib_2} \\ &= \big(e^{a_1}e^{ia_2}\big)\big(e^{b_1}e^{ib_2}\big) \\ &= e^{\alpha}e^{\beta}. \end{aligned}$$

□

## Η γεωμετρία του γινομένου

Έστω

$$z_1 = r_1e^{i\theta_1}, \qquad z_2 = r_2e^{i\theta_2}.$$

Τότε

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1r_2e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} \\ &= r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}. \end{aligned}$$

Άρα

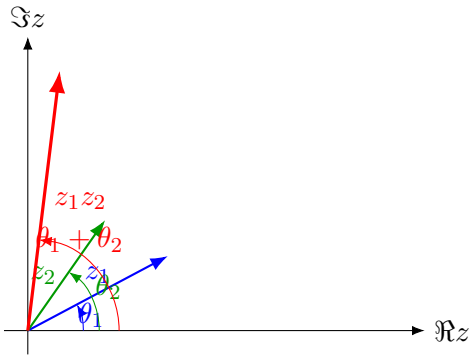
$$\boxed{|z_1z_2| = |z_1||z_2|}$$

και

$$\boxed{\arg(z_1z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \pmod{2\pi}.}$$

Δηλαδή:

στο γινόμενο πολλαπλασιάζουμε τα μήκη και προσθέτουμε τις γωνίες.




Ένα ιδιαίτερα απλό παράδειγμα είναι ο πολλαπλασιασμός με $i$:

$$i = e^{i\pi/2}.$$

Άρα

$$iz$$

έχει το ίδιο μέτρο με το $z$, ενώ η γωνία του αυξάνεται κατά $\pi/2$.

| Ο πολλαπλασιασμός με $i$ είναι στροφή κατά $90^\circ$. |
|---|

Από τον ίδιο κανόνα προκύπτει αμέσως ότι

$$\left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta}.$$

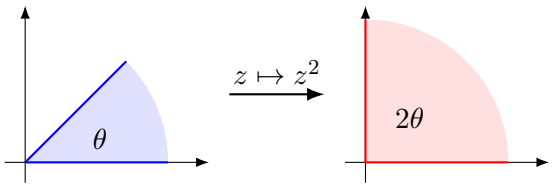
Επομένως η απεικόνιση

$$z \longmapsto z^n$$

κάνει δύο πράγματα:

$$r \longmapsto r^n, \qquad \theta \longmapsto n\theta.$$

Έτσι η γωνία πολλαπλασιάζεται επί $n$.




## 4 Οι $n$-οστές ρίζες ενός μιγαδικού αριθμού

Έστω

$$z = re^{i\theta}, \qquad r > 0.$$

Θέλουμε να βρούμε όλους τους $w \in \mathbb{C}$ για τους οποίους

$$w^n = z.$$

Γράφουμε

$$w = te^{i\varphi}, \qquad t \geq 0.$$

Τότε

$$w^n = t^n e^{in\varphi}.$$

Η εξίσωση

$$w^n = re^{i\theta}$$

ισοδυναμεί με

$$t^n = r$$

και

$$e^{in\varphi} = e^{i\theta}.$$

Η πρώτη εξίσωση δίνει

$$t = r^{1/n}.$$

Για τη δεύτερη πρέπει

$$n\varphi = \theta + 2\pi k, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Άρα

$$\varphi = \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}.$$

Έτσι οι λύσεις είναι

$$\boxed{w_k = r^{1/n} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.}$$

Δεν χρειάζονται άλλες τιμές του $k$, επειδή η αντικατάσταση $k \mapsto k + n$ προσθέτει $2\pi$ στη γωνία και επομένως δίνει το ίδιο σημείο.

### Οι ρίζες της μονάδας

Θέτουμε τώρα

$$z = 1 = e^{2\pi i m}.$$

Η εξίσωση

$$w^n = 1$$

δίνει

$$|w|^n = 1,$$

άρα

$$|w| = 1.$$

Επομένως γράφουμε

$$w = e^{i\varphi}.$$

Τότε

$$w^n = e^{in\varphi} = 1.$$

Αλλά

$$1 = e^{2\pi i k}, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

οπότε

$$n\varphi = 2\pi k.$$

Άρα

$$\varphi = \frac{2\pi k}{n}.$$

Συνεπώς οι $n$-οστές ρίζες της μονάδας είναι

$$\boxed{\omega_k = e^{2\pi i k/n}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.}$$

Είναι ακριβώς $n$ διαφορετικοί αριθμοί.

Πράγματι, αν

$$e^{2\pi ik/n} = e^{2\pi i\ell/n},$$

τότε

$$\frac{2\pi(k-\ell)}{n} \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

Άρα

$$n \mid (k-\ell).$$

Για

$$0 \leq k, \ell \leq n-1$$

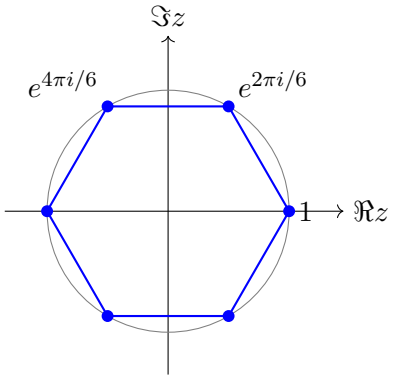
αυτό συνεπάγεται

$$k = \ell.$$

Γεωμετρικά, οι ρίζες αυτές βρίσκονται στον μοναδιαίο κύκλο και οι διαδοχικές γωνίες τους διαφέρουν κατά

$$\frac{2\pi}{n}.$$

Επομένως αποτελούν τις κορυφές κανονικού $n$-γώνου.




Αν θέσουμε

$$\omega = e^{2\pi i/n},$$

τότε όλες οι ρίζες της μονάδας γράφονται

$$\boxed{1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}.}$$

Επιπλέον,

$$\omega^n = 1.$$

## 5 Όρια και συμπαγή σύνολα

Για να ορίσουμε τη μιγαδική παράγωγο θα χρειαστούμε πρώτα την έννοια του ορίου στο μιγαδικό επίπεδο.

Επειδή

$$\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2,$$

οι βασικές τοπολογικές έννοιες εκφράζονται μέσω της απόστασης

$$|z-w|.$$

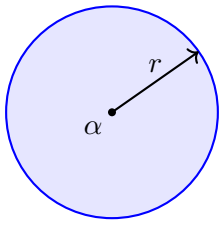
### Ανοικτοί και κλειστοί δίσκοι

**Ορισμός 5.1.** Για $\alpha \in \mathbb{C}$ και $r > 0$, ο *ανοικτός δίσκος* με κέντρο $\alpha$ και ακτίνα $r$ είναι

$$D(\alpha, r) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z - \alpha| < r\}.$$

Ο αντίστοιχος κλειστός δίσκος είναι

$$\overline{D}(\alpha, r) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z - \alpha| \leq r\}.$$

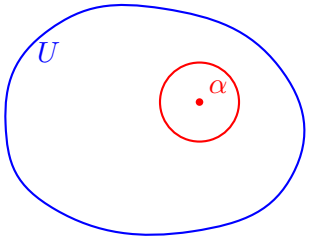



$D(\alpha, r)$

**Ορισμός 5.2.** Ένα σύνολο $U \subset \mathbb{C}$ λέγεται *ανοικτό* αν για κάθε $\alpha \in U$ υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε

$$D(\alpha, r) \subset U.$$

Η ακτίνα $r$ επιτρέπεται να εξαρτάται από το σημείο $\alpha$.




$D(\alpha, r) \subset U$

Παραδείγματα ανοικτών συνόλων είναι:

$$\{z = x + iy : \ y > 0\}$$

και

$$\{z = x + iy : \ x > 0, \ y > 0\}.$$

Αν όμως προσθέσουμε στο πρώτο τεταρτημόριο τους δύο άξονες, το σύνολο δεν είναι πλέον ανοικτό.

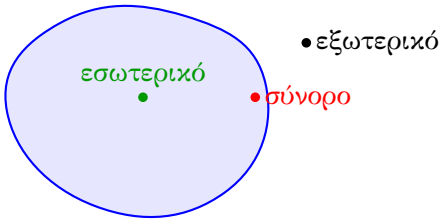
**Ορισμός 5.3.** Έστω $S \subset \mathbb{C}$.

Ένα σημείο $\alpha$ λέγεται *εσωτερικό σημείο* του $S$ αν υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε

$$D(\alpha, r) \subset S.$$

Ένα σημείο $\alpha$ λέγεται *συνοριακό σημείο* του $S$ αν κάθε δίσκος $D(\alpha, r)$ περιέχει τόσο σημεία του $S$ όσο και σημεία του $\mathbb{C} \setminus S$.

Ένα σημείο $\alpha$ λέγεται *σημείο προσκόλλησης* (adherent point) του $S$ αν κάθε δίσκος $D(\alpha, r)$ περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο του $S$.



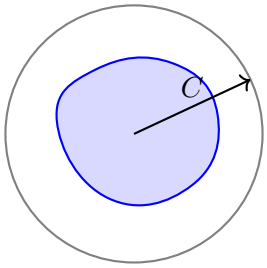

**Ορισμός 5.4.** Το $S$ λέγεται *κλειστό* αν περιέχει όλα τα συνοριακά σημεία του.

Η *κλειστότητα* του $S$, συμβολικά $\overline{S}$, είναι το $S$ μαζί με όλα τα συνοριακά του σημεία.

**Ορισμός 5.5.** Ένα σύνολο $S \subset \mathbb{C}$ λέγεται *φραγμένο* αν υπάρχει $C > 0$ τέτοιο ώστε

$$|z| \leq C \qquad \text{για κάθε } z \in S.$$

Ισοδύναμα, ολόκληρο το $S$ χωρά μέσα σε κάποιον κλειστό δίσκο με κέντρο το 0.




$S \subset \overline{D}(0, C)$

## Όρια

**Ορισμός 5.6.** Έστω $f : S \to \mathbb{C}$, και έστω $\alpha$ σημείο προσκόλλησης του $S$. Λέμε ότι

$$\lim_{z \to \alpha} f(z) = w$$

αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

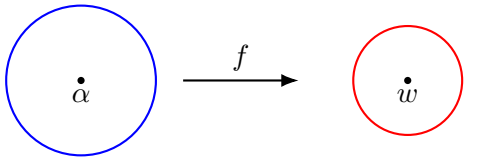
$$z \in S, \qquad |z - \alpha| < \delta$$

να συνεπάγεται

$$|f(z) - w| < \varepsilon.$$

Δηλαδή:

$$\boxed{z \text{ κοντά στο } \alpha \quad \Longrightarrow \quad f(z) \text{ κοντά στο } w.}$$




$|z - \alpha| < \delta$ $\qquad$ $|f(z) - w| < \varepsilon$

**Ορισμός 5.7.** Αν $\alpha \in S$, η $f$ λέγεται *συνεχής στο* $\alpha$ αν

$$\lim_{z \to \alpha} f(z) = f(\alpha).$$

Οι συνηθισμένοι κανόνες των ορίων ισχύουν όπως στον πραγματικό λογισμό:

$$\lim(f+g) = \lim f + \lim g,$$
$$\lim(fg) = (\lim f)(\lim g),$$

και, όταν ο παρονομαστής δεν μηδενίζεται,

$$\lim \frac{f}{g} = \frac{\lim f}{\lim g}.$$

### Ακολουθίες στο $\mathbb{C}$

Λέμε ότι

$$z_n \longrightarrow z$$

αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N$ τέτοιο ώστε

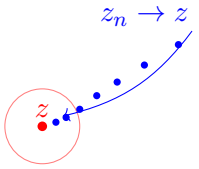
$$n \geq N \quad \Longrightarrow \quad |z_n - z| < \varepsilon.$$

Αν

$$z_n = x_n + iy_n, \qquad z = x + iy,$$

τότε

$$\boxed{z_n \to z \iff x_n \to x \text{ και } y_n \to y.}$$




**Πρόταση 5.8.** *Αν*

$$z_n \to z,$$

*τότε*

$$\boxed{|z_n| \to |z|.}$$

*Απόδειξη.* Από την αντίστροφη τριγωνική ανισότητα,

$$\big||z_n| - |z|\big| \leq |z_n - z|.$$

Εφόσον $z_n \to z$, έχουμε

$$|z_n - z| \to 0,$$

και επομένως

$$\big||z_n| - |z|\big| \to 0.$$

Άρα

$$|z_n| \to |z|.$$

□

**Ορισμός 5.9.** Μια ακολουθία $(z_n)$ λέγεται *ακολουθία Cauchy* αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N$ τέτοιο ώστε

$$m, n \geq N \quad \Longrightarrow \quad |z_m - z_n| < \varepsilon.$$

Αν

$$z_n = x_n + iy_n,$$

τότε

$$(z_n) \text{ είναι Cauchy } \iff (x_n) \text{ και } (y_n) \text{ είναι Cauchy.}$$

Επειδή κάθε πραγματική ακολουθία Cauchy συγκλίνει, παίρνουμε:

**Πρόταση 5.10.** *Κάθε ακολουθία Cauchy στο $\mathbb{C}$ συγκλίνει.*

Με άλλα λόγια, ο μετρικός χώρος $\mathbb{C}$ είναι *πλήρης*.

# 6 Συμπαγή σύνολα

**Ορισμός 6.1.** Ένα σημείο $v \in \mathbb{C}$ λέγεται *σημείο συσσώρευσης* μιας ακολουθίας $(z_n)$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν άπειρα $n$ τέτοια ώστε

$$|z_n - v| < \varepsilon.$$

Ισοδύναμα, κάποια υπακολουθία της $(z_n)$ συγκλίνει στο $v$.

**Ορισμός 6.2.** Ένα σύνολο $K \subset \mathbb{C}$ λέγεται *συμπαγές* αν κάθε ακολουθία $(z_n) \subset K$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία με όριο που ανήκει στο $K$.

Η κρίσιμη πρόταση στο $\mathbb{C}$ είναι η εξής.

**Θεώρημα 6.3** (Heine–Borel). *Ένα σύνολο $K \subset \mathbb{C}$ είναι συμπαγές αν και μόνο αν είναι κλειστό και φραγμένο.*

*Απόδειξη.* Ας υποθέσουμε πρώτα ότι το $K$ είναι συμπαγές.

Αν το $K$ δεν ήταν φραγμένο, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θα μπορούσαμε να επιλέξουμε $z_n \in K$ τέτοιο ώστε

$$|z_n| > n.$$

Επειδή το $K$ είναι συμπαγές, η ακολουθία $(z_n)$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία:

$$z_{n_k} \to z \qquad \text{για κάποιο } z \in K.$$

Από την προηγούμενη πρόταση,

$$|z_{n_k}| \to |z| < \infty.$$

Από την άλλη,

$$|z_{n_k}| > n_k \to \infty,$$

που είναι άτοπο.

Άρα το $K$ είναι φραγμένο.

Για να δείξουμε ότι είναι κλειστό, έστω

$$z \in \overline{K}.$$

Τότε για κάθε $n$ μπορούμε να επιλέξουμε $z_n \in K$ ώστε

$$|z_n - z| < \frac{1}{n}.$$

Άρα

$$z_n \to z.$$

Επειδή το $K$ είναι συμπαγές, υπάρχει υπακολουθία

$$z_{n_k} \to w \qquad \text{για κάποιο } w \in K.$$

Όμως, ως υπακολουθία της $(z_n)$, έχουμε επίσης

$$z_{n_k} \to z.$$

Από τη μοναδικότητα του ορίου,

$$w = z.$$

Επομένως

$$z \in K,$$

και άρα το $K$ είναι κλειστό.

Αντίστροφα, έστω ότι το $K$ είναι κλειστό και φραγμένο. Για κάθε ακολουθία

$$z_n = x_n + iy_n \in K$$

οι πραγματικές ακολουθίες $(x_n)$ και $(y_n)$ είναι φραγμένες.

Από το θεώρημα Bolzano–Weierstrass υπάρχει υπακολουθία $(x_{n_k})$ που συγκλίνει σε κάποιο $a \in \mathbb{R}$. Από την αντίστοιχη υπακολουθία $(y_{n_k})$ επιλέγουμε υπο-υπακολουθία $(y_{n_{k_j}})$ που συγκλίνει σε κάποιο $b \in \mathbb{R}$.

Τότε

$$x_{n_{k_j}} \to a, \qquad y_{n_{k_j}} \to b,$$

και επομένως

$$z_{n_{k_j}} = x_{n_{k_j}} + iy_{n_{k_j}} \longrightarrow a + ib.$$

Επειδή το $K$ είναι κλειστό και όλα τα $z_{n_{k_j}}$ ανήκουν στο $K$, έχουμε

$$a + ib \in K.$$

Άρα κάθε ακολουθία στο $K$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία με όριο στο $K$, οπότε το $K$ είναι συμπαγές. □

### Γιατί μας ενδιαφέρει η συμπάγεια;

**Πρόταση 6.4.** *Αν $K \subset \mathbb{C}$ είναι συμπαγές και*

$$f : K \to \mathbb{C}$$

*είναι συνεχής, τότε το $f(K)$ είναι συμπαγές.*

*Απόδειξη.* Έστω $(w_n) \subset f(K)$. Για κάθε $n$ υπάρχει $z_n \in K$ ώστε

$$w_n = f(z_n).$$

Επειδή $K$ είναι συμπαγές, υπάρχει υπακολουθία

$$z_{n_k} \to z \in K.$$

Λόγω συνέχειας,

$$w_{n_k} = f(z_{n_k}) \longrightarrow f(z).$$

Άρα $f(K)$ είναι συμπαγές. □