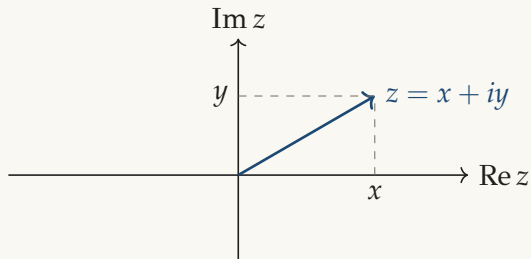


Μιγαδική Ανάλυση I

Πρώτη διάλεξη: αριθμοί, γεωμετρία, παράγωγος



Από πού εμφανίστηκαν οι μιγαδικοί αριθμοί;

Το πρόβλημα των κυβικών εξισώσεων

Τον 16ο αιώνα, οι Tartaglia, Cardano και Bombelli μελετούν την επίλυση κυβικών εξισώσεων.

Με κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής, μια γενική κυβική ανάγεται στη μορφή

$$x^3 + px + q = 0.$$

Από πού εμφανίστηκαν οι μιγαδικοί αριθμοί;

Το πρόβλημα των κυβικών εξισώσεων

Τον 16ο αιώνα, οι Tartaglia, Cardano και Bombelli μελετούν την επίλυση κυβικών εξισώσεων.

Με κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής, μια γενική κυβική ανάγεται στη μορφή

$$x^3 + px + q = 0.$$

Ο τύπος του Cardano δίνει μία λύση:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Απόδειξη του τύπου του Cardano I

Ξεκινάμε από

$$x^3 + px + q = 0$$

Απόδειξη του τύπου του Cardano I

Ξεκινάμε από

$$x^3 + px + q = 0$$

και θέτουμε

$$x = u + v.$$

Απόδειξη του τύπου του Cardano I

Ξεκινάμε από

$$x^3 + px + q = 0$$

και θέτουμε

$$\boxed{x = u + v.}$$

Τότε

$$(u + v)^3 + p(u + v) + q = 0,$$

Απόδειξη του τύπου του Cardano I

Ξεκινάμε από

$$x^3 + px + q = 0$$

και θέτουμε

$$\boxed{x = u + v.}$$

Τότε

$$(u + v)^3 + p(u + v) + q = 0,$$

δηλαδή

$$u^3 + v^3 + 3uv(u + v) + p(u + v) + q = 0.$$

Απόδειξη του τύπου του Cardano I

Ξεκινάμε από

$$x^3 + px + q = 0$$

και θέτουμε

$$\boxed{x = u + v.}$$

Τότε

$$(u + v)^3 + p(u + v) + q = 0,$$

δηλαδή

$$u^3 + v^3 + 3uv(u + v) + p(u + v) + q = 0.$$

Άρα

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0.$$

Επιλέγουμε τα u, v έτσι ώστε

$$3uv + p = 0.$$

Επιλέγουμε τα u, v έτσι ώστε

$$3uv + p = 0.$$

Τότε

$$u^3 + v^3 = -q$$

και επίσης

$$u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27}.$$

Επιλέγουμε τα u, v έτσι ώστε

$$3uv + p = 0.$$

Τότε

$$u^3 + v^3 = -q$$

και επίσης

$$u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27}.$$

Άρα οι u^3, v^3 είναι οι δύο ρίζες της εξίσωσης

$$t^2 + qt - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Επομένως

$$u^3, v^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Ο τύπος του Cardano

Αφού

$$x = u + v,$$

παίρνουμε

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Μια κυβική με τρεις πραγματικές ρίζες

Θεωρούμε

$$x^3 - 15x - 4 = 0.$$

Εδώ

$$p = -15, \quad q = -4.$$

Μάλιστα,

$$x^3 - 15x - 4 = (x - 4)(x^2 + 4x + 1).$$

Άρα οι τρεις ρίζες είναι

$$4, \quad -2 + \sqrt{3}, \quad -2 - \sqrt{3}.$$

$$x^3 - 15x - 4 = 0$$

Άρα

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 4 - 125 = -121.$$

Ο τύπος του Cardano δίνει

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}},$$

δηλαδή

$$\boxed{x = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i}.}$$

Έχουμε λοιπόν μια πραγματική εξίσωση, αλλά ο τύπος μας αναγκάζει να υπολογίσουμε με $\sqrt{-121}$.

Οι μιγαδικοί εξαφανίζονται στο τέλος

Παρατηρούμε ότι

$$(2 + i)^3 = 8 + 12i + 6i^2 + i^3.$$

Επειδή

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i,$$

παίρνουμε

$$(2 + i)^3 = 8 + 12i - 6 - i = 2 + 11i.$$

Ομοίως,

$$(2 - i)^3 = 2 - 11i.$$

Άρα

$$\sqrt[3]{2 + 11i} = 2 + i, \quad \sqrt[3]{2 - 11i} = 2 - i.$$

Επομένως

$$x = (2 + i) + (2 - i) = \boxed{4}.$$

Και πράγματι η λύση είναι πραγματική

Ελέγχουμε:

$$4^3 - 15 \cdot 4 - 4 = 64 - 60 - 4 = 0.$$

Μάλιστα,

$$x^3 - 15x - 4 = (x - 4)(x^2 + 4x + 1).$$

Άρα οι τρεις ρίζες είναι

$$4, \quad -2 + \sqrt{3}, \quad -2 - \sqrt{3}.$$

Όλες οι ρίζες είναι πραγματικές, αλλά για να φτάσουμε σε αυτές ο τύπος του Cardano περνά μέσα από τους μιγαδικούς.

Ορισμός των μιγαδικών

Το νέο σύστημα αριθμών

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}.$$

Για

$$z = a + bi$$

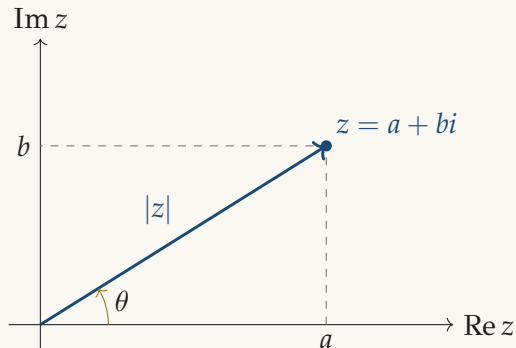
ορίζουμε

$$\operatorname{Re} z = a, \quad \operatorname{Im} z = b,$$

$$\bar{z} = a - bi, \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i. \quad (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Το μιγαδικό επίπεδο



Γεωμετρική ανάγνωση

$$z = a + bi \longleftrightarrow (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

$$|z| = \text{απόσταση του } z \text{ από το } 0.$$

$$|z - w| = \text{απόσταση των } z, w.$$

$$\bar{z} = a - bi$$

είναι η ανάκλαση ως προς τον πραγματικό άξονα.

Δύο απλές γεωμετρικές πράξεις

Πολλαπλασιασμός με i

Δύο απλές γεωμετρικές πράξεις

Πολλαπλασιασμός με i

Αν

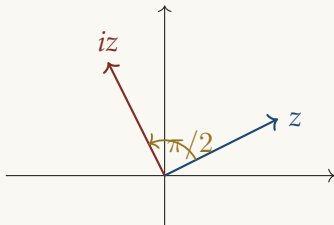
$$z = a + bi,$$

τότε

$$iz = i(a + bi) = -b + ai.$$

Άρα

$$(a, b) \mapsto (-b, a).$$



Μετάθεση

Για σταθερό $c \in \mathbb{C}$,

$$f(z) = z + c$$

Δύο απλές γεωμετρικές πράξεις

Πολλαπλασιασμός με i

Αν

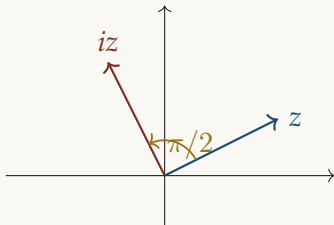
$$z = a + bi,$$

τότε

$$iz = i(a + bi) = -b + ai.$$

Άρα

$$(a, b) \mapsto (-b, a).$$

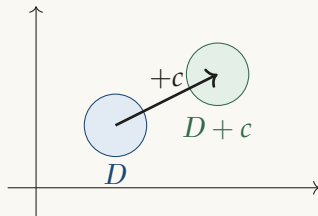


Μετάθεση

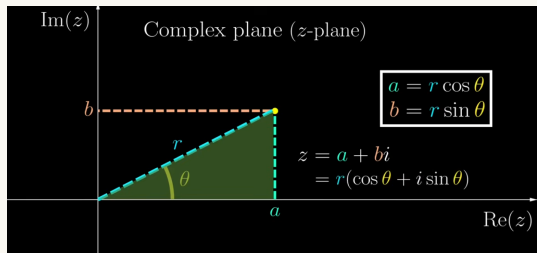
Για σταθερό $c \in \mathbb{C}$,

$$f(z) = z + c$$

μετακινεί κάθε σημείο κατά το ίδιο διάνυσμα.



Πολική μορφή



Από καρτεσιανή σε πολική περιγραφή

Αν $z \neq 0$, γράφουμε

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta),$$

όπου

$$r = |z|, \quad \theta = \arg z.$$

Με τον συμβολισμό του Euler

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta,$$

η ίδια σχέση γράφεται

$$z = re^{i\theta}.$$

Ο τύπος του Euler

Ξεκινάμε από τη δυναμοσειρά της εκθετικής:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Ο τύπος του Euler

Ξεκινάμε από τη δυναμοσειρά της εκθετικής:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Θέτοντας $z = i\theta$, παίρνουμε

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \dots.$$

Ο τύπος του Euler

Ξεκινάμε από τη δυναμοσειρά της εκθετικής:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Θέτοντας $z = i\theta$, παίρνουμε

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \dots.$$

Χωρίζουμε τους άρτιους και τους περιττούς όρους:

$$e^{i\theta} = \left(1 + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \dots\right) + \left(i\theta + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \dots\right).$$

Ο τύπος του Euler

Ξεκινάμε από τη δυναμοσειρά της εκθετικής:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Θέτοντας $z = i\theta$, παίρνουμε

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \dots.$$

Χωρίζουμε τους άρτιους και τους περιττούς όρους:

$$e^{i\theta} = \left(1 + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \dots\right) + \left(i\theta + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \dots\right).$$

Επειδή $i^2 = -1$,

$$e^{i\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots\right) + i \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots\right).$$

Ο τύπος του Euler

Ξεκινάμε από τη δυναμοσειρά της εκθετικής:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Θέτοντας $z = i\theta$, παίρνουμε

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \dots.$$

Χωρίζουμε τους άρτιους και τους περιττούς όρους:

$$e^{i\theta} = \left(1 + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \dots\right) + \left(i\theta + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \dots\right).$$

Επειδή $i^2 = -1$,

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots \right).$$

Ο τύπος του Euler

Ξεκινάμε από τη δυναμοσειρά της εκθετικής:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Θέτοντας $z = i\theta$, παίρνουμε

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \dots.$$

Χωρίζουμε τους άρτιους και τους περιττούς όρους:

$$e^{i\theta} = \left(1 + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \dots\right) + \left(i\theta + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \dots\right).$$

Επειδή $i^2 = -1$,

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

Γιατί γράφουμε $e^{i\theta}$;

Η ταυτότητα

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

είναι συμβατή με τον κανόνα

$$e^{i\theta} e^{i\phi} = e^{i(\theta+\phi)}.$$

Άρα η πολική μορφή κάνει τις γωνίες υπολογίσιμες αλγεβρικά.

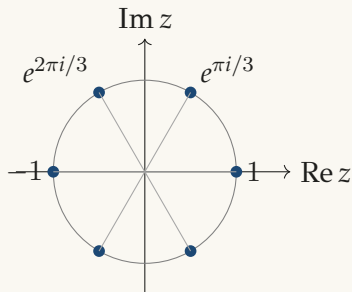
Ρίζες της μονάδας: ένα πρώτο μιγαδικό σχήμα

$$z^6 = 1.$$

Άρα

$$z_k = e^{2\pi i k/6}, \quad k = 0, 1, \dots, 5.$$

Τα έξι σημεία βρίσκονται στον μοναδιαίο κύκλο και χωρίζουν τη γωνία 2π σε έξι ίσα μέρη.



Η μιγαδική ανάλυση μελετά συναρτήσεις

$$f: \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Αν

$$z = x + iy,$$

τότε γράφουμε

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Άρα τυπικά έχουμε μια απεικόνιση

$$F: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

$$F(x, y) = (u(x, y), v(x, y)).$$

Η διαφορά με τον Λογισμό στο $\mathbb{R}^2$ δεν είναι οι συναρτήσεις. Είναι η έννοια της παραγώγου.

Στον Λογισμό στο $\mathbb{R}^2$: γενικός πίνακας Jacobi

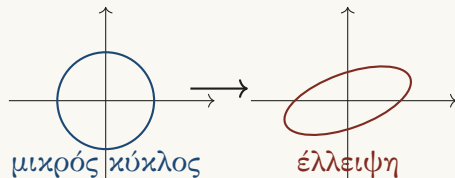
Για

$$F(x, y) = (u(x, y), v(x, y)),$$

η πραγματική παράγωγος είναι

$$DF(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}.$$

Αυτός μπορεί να είναι ουσιαστικά οποιοσδήποτε γραμμικός μετασχηματισμός.



Για παράδειγμα,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

μπορεί να τεντώσει διαφορετικά τις διαφορετικές διευθύνσεις.

Η ίδια απαίτηση από δύο διευθύνσεις

Ορισμός μιγαδικής παραγώγου

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

Το h τείνει στο 0 από όλες τις διευθύνσεις στο επίπεδο.

Από πραγματική διεύθυνση $h = t$:

$$\frac{f(z_0 + t) - f(z_0)}{t} \longrightarrow u_x + iv_x.$$

Από κατακόρυφη διεύθυνση $h = it$:

$$\frac{f(z_0 + it) - f(z_0)}{it} \longrightarrow v_y - iu_y.$$

Αν το όριο υπάρχει, οι δύο ποσότητες είναι ίσες.

Άρα

$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$

Η γεωμετρία της μιγαδικής παραγώγου

Αν

$$f'(z_0) = a + ib \neq 0,$$

τότε, ως πραγματική γραμμική απεικόνιση,

$$Df(z_0) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Η γεωμετρία της μιγαδικής παραγώγου

Αν

$$f'(z_0) = a + ib \neq 0,$$

τότε, ως πραγματική γραμμική απεικόνιση,

$$Df(z_0) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Γράφουμε την παράγωγο σε πολική μορφή:

$$f'(z_0) = re^{i\theta}, \quad r = |f'(z_0)| > 0.$$

Άρα

$$a = r \cos \theta, \quad b = r \sin \theta,$$

και επομένως

$$Df(z_0) = r \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Δηλαδή

$$Df(z_0) = \underbrace{rI}_{\text{ομοιοθεσία}} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}}_{\text{στροφή κατά } \theta}$$

Δηλαδή

$$Df(z_0) = \underbrace{rI}_{\text{ομοιοθεσία}} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}}_{\text{στροφή κατά } \theta}$$

Έτσι, για μικρό h ,

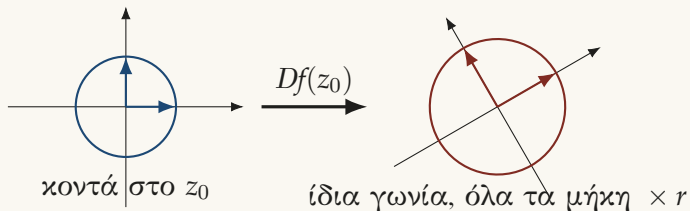
$$f(z_0 + h) = f(z_0) + rR_\theta h + o(|h|).$$

Δηλαδή

$$Df(z_0) = \underbrace{rI}_{\text{ομοιοθεσία}} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}}_{\text{στροφή κατά } \theta}$$

Έτσι, για μικρό h ,

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + rR_\theta h + o(|h|).$$

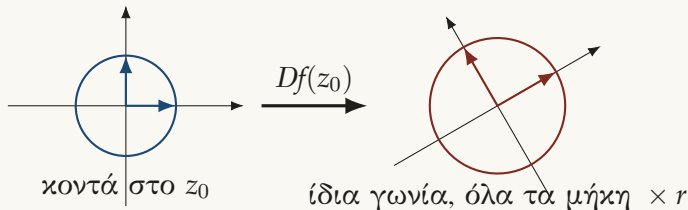


Δηλαδή

$$Df(z_0) = \underbrace{rI}_{\text{ομοιοθεσία}} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}}_{\text{στροφή κατά } \theta}$$

Έτσι, για μικρό h ,

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + rR_\theta h + o(|h|).$$



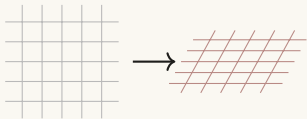
Τοπικά: μεταφορά + ομοιόμορφη διαστολή + στροφή.

Η διαφορά των πινάκων

Πραγματικός Λογισμός

$$DF = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$$

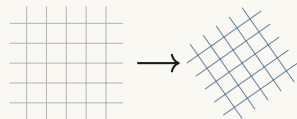
τέσσερις πραγματικές παράμετροι.



Μιγαδική Ανάλυση

$$Df = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

μόνο δύο πραγματικές παράμετροι.



Η μιγαδική παραγωγισιμότητα είναι πραγματική διαφορισιμότητα με μια πολύ αυστηρή αλγεβρική συνθήκη.

Παράδειγμα: $f(z) = z^2$

$$z = x + iy,$$

$$z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy.$$

Άρα

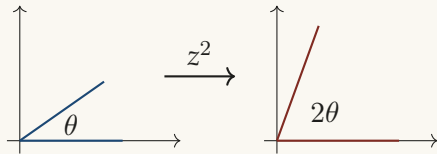
$$u(x, y) = x^2 - y^2,$$

$$v(x, y) = 2xy.$$

Και

$$u_x = 2x = v_y,$$

$$u_y = -2y = -v_x.$$



$$re^{i\theta} \mapsto r^2 e^{2i\theta}.$$

Αντιπαράδειγμα: $f(z) = \bar{z}$

Ως απεικόνιση

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

είναι λεία:

$$F(x, y) = (x, -y).$$

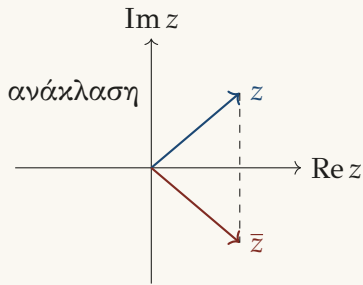
Όμως

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \frac{\bar{h}}{h}.$$

Αν

$$h = t \in \mathbb{R},$$

τότε



Λεία στο $\mathbb{R}^2$ δεν σημαίνει
μιγαδικά παραγωγίσιμη.

Από τη μιγαδική παράγωγο στην ολομορφία

Μέχρι τώρα είδαμε τι σημαίνει να υπάρχει η μιγαδική παράγωγος σε ένα σημείο:

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

Από τη μιγαδική παράγωγο στην ολομορφία

Μέχρι τώρα είδαμε τι σημαίνει να υπάρχει η μιγαδική παράγωγος σε ένα σημείο:

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

ολόμορφη = μιγαδικά παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο ενός ανοικτού χωρίου.

Από τη μιγαδική παράγωγο στην ολομορφία

Μέχρι τώρα είδαμε τι σημαίνει να υπάρχει η μιγαδική παράγωγος σε ένα σημείο:

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

ολόμορφη = μιγαδικά παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο ενός ανοικτού χωρίου.

Στον πραγματικό λογισμό, το να είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη είναι σχετικά ασθενής υπόθεση.

Από τη μιγαδική παράγωγο στην ολομορφία

Μέχρι τώρα είδαμε τι σημαίνει να υπάρχει η μιγαδική παράγωγος σε ένα σημείο:

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

ολόμορφη = μιγαδικά παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο ενός ανοικτού χωρίου.

Στον πραγματικό λογισμό, το να είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη είναι σχετικά ασθενής υπόθεση.

Στη μιγαδική ανάλυση, η ίδια φαινομενικά απαίτηση έχει εντυπωσιακά ισχυρές συνέπειες.

Πρώτη έκπληξη: ολοκλήρωμα σε κλειστή καμπύλη

Αργότερα θα ορίσουμε το μιγαδικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma} f(z) dz.$$

Πρώτη έκπληξη: ολοκλήρωμα σε κλειστή καμπύλη

Αργότερα θα ορίσουμε το μιγαδικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma} f(z) dz.$$

Αν η καμπύλη είναι κλειστή,

$$\gamma(a) = \gamma(b),$$

τότε ξεκινάμε και επιστρέφουμε στο ίδιο σημείο.

Πρώτη έκπληξη: ολοκλήρωμα σε κλειστή καμπύλη

Αργότερα θα ορίσουμε το μιγαδικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma} f(z) dz.$$

Αν η καμπύλη είναι κλειστή,

$$\gamma(a) = \gamma(b),$$

τότε ξεκινάμε και επιστρέφουμε στο ίδιο σημείο. Για μια ολόμορφη συνάρτηση f , σε ένα χωρίο χωρίς “τρύπες”, το θεώρημα του Cauchy θα μας δώσει

$$\boxed{\int_{\gamma} f(z) dz = 0}$$

για κάθε κλειστή καμπύλη γ .

Αυτό θυμίζει ένα συντηρητικό πεδίο στον Λογισμό πολλών μεταβλητών:

$$\oint_{\gamma} F \cdot dr = 0.$$

Αυτό θυμίζει ένα συντηρητικό πεδίο στον Λογισμό πολλών μεταβλητών:

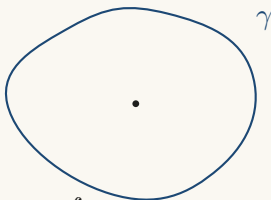
$$\oint_{\gamma} F \cdot dr = 0.$$

Δηλαδή, αν ένα πεδίο δύναμης είναι συντηρητικό, το συνολικό έργο σε μια κλειστή διαδρομή είναι μηδέν.

Αυτό θυμίζει ένα συντηρητικό πεδίο στον Λογισμό πολλών μεταβλητών:

$$\oint_{\gamma} F \cdot dr = 0.$$

Δηλαδή, αν ένα πεδίο δύναμης είναι συντηρητικό, το συνολικό έργο σε μια κλειστή διαδρομή είναι μηδέν.



$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$$

Δεύτερη έκπληξη: οι τιμές στο σύνορο καθορίζουν το εσωτερικό

Έστω ότι f είναι ολόμορφη μέσα και πάνω σε μια κλειστή καμπύλη γ , και ότι το a βρίσκεται στο εσωτερικό της.

Δεύτερη έκπληξη: οι τιμές στο σύνορο καθορίζουν το εσωτερικό

Έστω ότι f είναι ολόμορφη μέσα και πάνω σε μια κλειστή καμπύλη γ , και ότι το a βρίσκεται στο εσωτερικό της.

Ο ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy λέει ότι

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

Τι σημαίνει αυτό;

Τι σημαίνει αυτό;

Για να γνωρίζουμε την τιμή της f στο σημείο a , δεν χρειάζεται να γνωρίζουμε την f σε όλο το εσωτερικό.

Τι σημαίνει αυτό;

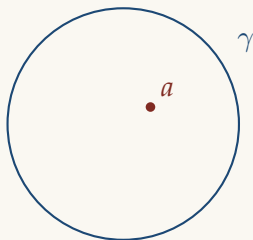
Για να γνωρίζουμε την τιμή της f στο σημείο a , δεν χρειάζεται να γνωρίζουμε την f σε όλο το εσωτερικό.

Αρκεί να γνωρίζουμε τις τιμές της πάνω στο σύνορο γ .

Τι σημαίνει αυτό;

Για να γνωρίζουμε την τιμή της f στο σημείο a , δεν χρειάζεται να γνωρίζουμε την f σε όλο το εσωτερικό.

Αρκεί να γνωρίζουμε τις τιμές της πάνω στο σύνορο γ .



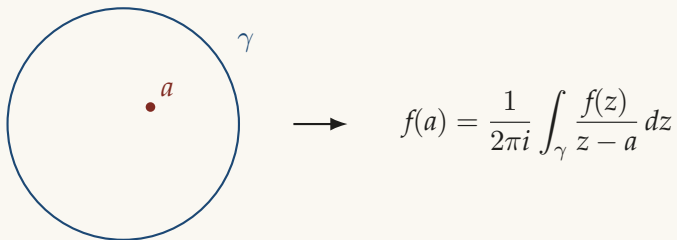
A diagram showing a blue circle with a red dot inside. The red dot is labeled with a red italicized a . The blue circle is labeled with a blue γ at its top right. An arrow points from the circle to the right, leading to the Cauchy integral formula.

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - a} dz$$

Τι σημαίνει αυτό;

Για να γνωρίζουμε την τιμή της f στο σημείο a , δεν χρειάζεται να γνωρίζουμε την f σε όλο το εσωτερικό.

Αρκεί να γνωρίζουμε τις τιμές της πάνω στο σύνορο γ .



A diagram showing a blue circle with a red dot labeled a inside it. The Greek letter γ is placed to the right of the circle. An arrow points from the circle to the formula $f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - a} dz$.

Το σύνορο “γνωρίζει” τις τιμές της συνάρτησης στο εσωτερικό.

Τρίτη έκπληξη: παραγωγίσιμη μία φορά σημαίνει άπειρες φορές

Στον πραγματικό λογισμό υπάρχει τεράστια απόσταση ανάμεσα στις έννοιες

C^1 , C^2 , C^∞ , αναλυτική.

Τρίτη έκπληξη: παραγωγίσιμη μία φορά σημαίνει άπειρες φορές

Στον πραγματικό λογισμό υπάρχει τεράστια απόσταση ανάμεσα στις έννοιες

C^1 , C^2 , C^∞ , αναλυτική.

Στη μιγαδική ανάλυση συμβαίνει κάτι εντελώς διαφορετικό:

$$\boxed{f \text{ ολόμορφη} \implies f \in C^\infty.}$$

Αλλά ισχύει κάτι πολύ ισχυρότερο.

Για κάθε z_0 στο χωρίο υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < r.$$

Αλλά ισχύει κάτι πολύ ισχυρότερο.

Για κάθε z_0 στο χωρίο υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < r.$$

και μάλιστα

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Αλλά ισχύει κάτι πολύ ισχυρότερο.

Για κάθε z_0 στο χωρίο υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < r.$$

και μάλιστα

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Δηλαδή:

κάθε ολόμορφη συνάρτηση είναι τοπικά ένα “άπειρο πολυώνυμο”.

Αυτό είναι πολύ διαφορετικό από τον πραγματικό λογισμό

Στο $\mathbb{R}$, ακόμη και το

$$C^\infty$$

δεν αρκεί για να είναι μια συνάρτηση ίση με τη σειρά Taylor της.

Αυτό είναι πολύ διαφορετικό από τον πραγματικό λογισμό

Στο $\mathbb{R}$, ακόμη και το

$$C^\infty$$

δεν αρκεί για να είναι μια συνάρτηση ίση με τη σειρά Taylor της.
Το κλασικό παράδειγμα είναι

$$g(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Αυτό είναι πολύ διαφορετικό από τον πραγματικό λογισμό

Στο $\mathbb{R}$, ακόμη και το

$$C^\infty$$

δεν αρκεί για να είναι μια συνάρτηση ίση με τη σειρά Taylor της.
Το κλασικό παράδειγμα είναι

$$g(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Η g είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη και

$$g^{(n)}(0) = 0 \quad \text{για κάθε } n \geq 0.$$

Αυτό είναι πολύ διαφορετικό από τον πραγματικό λογισμό

Στο $\mathbb{R}$, ακόμη και το

$$C^\infty$$

δεν αρκεί για να είναι μια συνάρτηση ίση με τη σειρά Taylor της.
Το κλασικό παράδειγμα είναι

$$g(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Η g είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη και

$$g^{(n)}(0) = 0 \quad \text{για κάθε } n \geq 0.$$

Άρα η σειρά Taylor της στο 0 είναι

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0.$$

Αυτό είναι πολύ διαφορετικό από τον πραγματικό λογισμό

Στο $\mathbb{R}$, ακόμη και το

$$C^\infty$$

δεν αρκεί για να είναι μια συνάρτηση ίση με τη σειρά Taylor της.
Το κλασικό παράδειγμα είναι

$$g(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Η g είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη και

$$g^{(n)}(0) = 0 \quad \text{για κάθε } n \geq 0.$$

Άρα η σειρά Taylor της στο 0 είναι

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0.$$

Όμως

$$g(x) > 0 \quad \text{για κάθε } x \neq 0.$$

Και αν υπάρχει μια μεμονωμένη ανωμαλία;

Αν η f είναι ολόμορφη γύρω από το z_0 , τότε έχει ανάπτυγμα Taylor:

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots .$$

Και αν υπάρχει μια μεμονωμένη ανωμαλία;

Αν η f είναι ολόμορφη γύρω από το z_0 , τότε έχει ανάπτυγμα Taylor:

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots .$$

Αν όμως η f έχει μια μεμονωμένη ανωμαλία στο z_0 , επιτρέπονται και αρνητικές δυνάμεις:

$$f(z) = \cdots + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots$$

Και αν υπάρχει μια μεμονωμένη ανωμαλία;

Αν η f είναι ολόμορφη γύρω από το z_0 , τότε έχει ανάπτυγμα Taylor:

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots .$$

Αν όμως η f έχει μια μεμονωμένη ανωμαλία στο z_0 , επιτρέπονται και αρνητικές δυνάμεις:

$$f(z) = \dots + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots$$

Αυτό είναι ένα ανάπτυγμα *Laurent*.

Και αν υπάρχει μια μεμονωμένη ανωμαλία;

Αν η f είναι ολόμορφη γύρω από το z_0 , τότε έχει ανάπτυγμα Taylor:

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$$

Αν όμως η f έχει μια μεμονωμένη ανωμαλία στο z_0 , επιτρέπονται και αρνητικές δυνάμεις:

$$f(z) = \dots + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots$$

Αυτό είναι ένα ανάπτυγμα *Laurent*.

Και ο συντελεστής a_{-1} έχει ιδιαίτερη σημασία. Ονομάζεται υπόλοιπο της f στο z_0 .

Και αν υπάρχει μια μεμονωμένη ανωμαλία;

Αν η f είναι ολόμορφη γύρω από το z_0 , τότε έχει ανάπτυγμα Taylor:

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$$

Αν όμως η f έχει μια μεμονωμένη ανωμαλία στο z_0 , επιτρέπονται και αρνητικές δυνάμεις:

$$f(z) = \dots + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots$$

Αυτό είναι ένα ανάπτυγμα *Laurent*.

Και ο συντελεστής a_{-1} έχει ιδιαίτερη σημασία. Ονομάζεται υπόλοιπο της f στο z_0 . Αργότερα θα δούμε ότι, εντυπωσιακά,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum \text{Res}(f).$$

Και αν υπάρχει μια μεμονωμένη ανωμαλία;

Αν η f είναι ολόμορφη γύρω από το z_0 , τότε έχει ανάπτυγμα Taylor:

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$$

Αν όμως η f έχει μια μεμονωμένη ανωμαλία στο z_0 , επιτρέπονται και αρνητικές δυνάμεις:

$$f(z) = \dots + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots$$

Αυτό είναι ένα ανάπτυγμα *Laurent*.

Και ο συντελεστής a_{-1} έχει ιδιαίτερη σημασία. Ονομάζεται υπόλοιπο της f στο z_0 . Αργότερα θα δούμε ότι, εντυπωσιακά,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum \text{Res}(f).$$

Δηλαδή ένα ολόκληρο ολοκλήρωμα γύρω από μια καμπύλη καθορίζεται από λίγους μόνο συντελεστές των τοπικών αναπτυγμάτων της f .