Διακριτά Μαθηματικά
Τελική Εξέταση
Σεπτέμβριος 2026

Διάρκεια: 150 λεπτά Σύνολο: 110 μονάδες

Θέμα 1. **[15 μον.]**

Επτά φοιτητές, μεταξύ των οποίων η Άννα και ο Βασίλης, πρόκειται να σταθούν σε μία σειρά για μία φωτογραφία.

(α) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να σταθούν στη σειρά ώστε η Άννα να είναι πρώτη;

(β) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να σταθούν στη σειρά ώστε η Άννα να είναι πρώτη και ο Βασίλης να είναι τελευταίος;

(γ) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να σταθούν στη σειρά έτσι ώστε η Άννα να μην είναι πρώτη και ο Βασίλης να μην είναι τελευταίος;

Θέμα 2. **[10 μον.]**

Σε ένα ράφι υπάρχουν 12 διαφορετικά βιβλία. Από αυτά, 3 είναι βιβλία Γεωμετρίας, 4 είναι βιβλία Θεωρίας Αριθμών και 5 είναι βιβλία Συνδυαστικής.

(α) Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε 6 από τα βιβλία, έτσι ώστε να επιλέξουμε ακριβώς 2 βιβλία από κάθε αντικείμενο;

(β) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν και τα 12 βιβλία στο ράφι, αν τα βιβλία του ίδιου αντικειμένου πρέπει να βρίσκονται όλα μαζί;

Θέμα 3. **[15 μον.]**

Δεκατρία όμοια αντικείμενα πρόκειται να μοιραστούν σε τέσσερα διαφορετικά άτομα.

(α) Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η μοιρασιά, αν κάθε άτομο πρέπει να πάρει τουλάχιστον ένα αντικείμενο;

(β) Να αποδείξετε ότι, σε οποιαδήποτε μοιρασιά των 13 αντικειμένων στα τέσσερα άτομα, κάποιο άτομο θα πάρει τουλάχιστον 4 αντικείμενα.

Θέμα 4. **[20 μον.]**

Για κάθε θετικό ακέραιο k, έστω a_k το πλήθος των θετικών ακέραιων λύσεων (p, q, r) της εξίσωσης

$$2p + 3q + 4r = k.$$

(α) Να βρείτε τη γεννήτρια συνάρτηση

$$A(x) = \sum_{k \geq 1} a_k x^k.$$

(β) Χρησιμοποιώντας τη γεννήτρια συνάρτηση του προηγούμενου ερωτήματος, να βρείτε το a_{15}.

Θέμα 5. **[50 μον.]**

Για $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, θεωρούμε το γράφημα G_n με κορυφές

$$u_1, \ldots, u_n, \qquad v_1, \ldots, v_n,$$

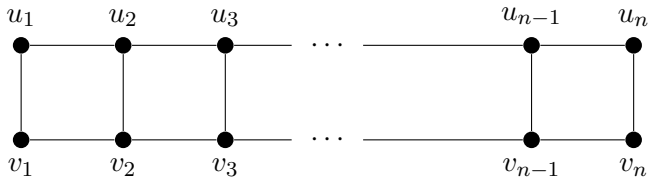
και ακμές

$$u_i u_{i+1}, \quad v_i v_{i+1} \qquad (1 \leq i \leq n-1),$$

καθώς και

$$u_i v_i \qquad (1 \leq i \leq n).$$

Το γράφημα έχει την ακόλουθη μορφή:



(α) Να βρείτε το πλήθος των κορυφών του G_n, καθώς και τους βαθμούς των κορυφών. Με βάσει αυτά, να υπολογίσετε και το πλήθος των ακμών του.

(β) Να αποδείξετε ότι το G_n είναι συνεκτικό. Να συμπεράνετε ότι έχει παραγόμενο δέντρο και να βρείτε πόσες ακμές έχει κάθε παραγόμενο δέντρο του.

(γ) Να αποδείξετε ότι το G_n είναι διμερές και να βρείτε τον χρωματικό αριθμό $\chi(G_n)$.

(δ) Να βρείτε για ποιες τιμές του n το G_n έχει κλειστό περίπατο Euler, δηλαδή κλειστό περίπατο που περνά από κάθε ακμή ακριβώς μία φορά.

(ε) Να αποδείξετε ότι το G_n έχει κύκλο Hamilton.

(στ) Να αποδείξετε ότι το G_n έχει τέλειο ταίριασμα.

(ζ) Το παραπάνω σχήμα δίνει ένα επίπεδο σχέδιο του G_n. Να βρείτε το πλήθος των χωρίων του.

(η) Έστω $\overline{G_n}$ το συμπληρωματικό γράφημα του G_n. Να βρείτε τον χρωματικό αριθμό

$$\chi(\overline{G_n}).$$

Καλή Επιτυχία!

1 (α) Αν η Άννα είναι πρώτη, μένει να διατάξουμε τους υπόλοιπους έξι φοιτητές. Άρα υπάρχουν

$$\boxed{6!}$$

τρόποι.

(β) Αν ο Βασίλης είναι τελευταίος και η Άννα πρώτη, μένει να διατάξουμε τους υπόλοιπους πέντε φοιτητές. Άρα υπάρχουν

$$\boxed{5!}$$

τρόποι.

(γ) Έστω

$$X = \{\text{διατάξεις στις οποίες η Άννα είναι πρώτη}\}$$

και

$$Y = \{\text{διατάξεις στις οποίες ο Βασίλης είναι τελευταίος}\}.$$

Έχουμε

$$|X| = 6!, \qquad |Y| = 6!.$$

Αν η Άννα είναι πρώτη και ο Βασίλης τελευταίος, οι υπόλοιποι πέντε φοιτητές μπορούν να διαταχθούν αυθαίρετα, άρα

$$|X \cap Y| = 5!.$$

Από την αρχή εγκλεισμού–αποκλεισμού,

$$|X \cup Y| = 6! + 6! - 5!.$$

Επειδή συνολικά υπάρχουν 7! διατάξεις, το ζητούμενο πλήθος είναι

$$7! - 2 \cdot 6! + 5! = 5040 - 1440 + 120 = \boxed{3720}.$$

2 (α) Επιλέγουμε 2 από τα 3 βιβλία Γεωμετρίας, 2 από τα 4 βιβλία Θεωρίας Αριθμών και 2 από τα 5 βιβλία Συνδυαστικής. Άρα το ζητούμενο πλήθος είναι

$$\boxed{\binom{3}{2}\binom{4}{2}\binom{5}{2}}.$$

(β) Θεωρούμε τα βιβλία κάθε αντικειμένου ως ένα ενιαίο μπλοκ. Τα τρία μπλοκ μπορούν να διαταχθούν με 3! τρόπους.

Μέσα στα τρία μπλοκ τα βιβλία μπορούν να διαταχθούν με 3!, 4! και 5! τρόπους, αντίστοιχα. Επομένως

$$\boxed{3!\,3!\,4!\,5!}.$$

3 (α) Έστω x_i το πλήθος των αντικειμένων που παίρνει το i-οστό άτομο. Θέλουμε το πλήθος των θετικών ακέραιων λύσεων της

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 13.$$

Από τον τύπο των διαχωριστών, το πλήθος αυτό είναι

$$\boxed{\binom{12}{3}}.$$

(β) Αν κάθε άτομο έπαιρνε το πολύ 3 αντικείμενα, τότε συνολικά θα είχαν μοιραστεί το πολύ

$$4 \cdot 3 = 12$$

αντικείμενα, άτοπο, αφού τα αντικείμενα είναι 13.

Επομένως, από την αρχή του περιστερώνα, τουλάχιστον ένα άτομο παίρνει τουλάχιστον

$$\boxed{4}$$

αντικείμενα.

4 (α) Επειδή a, b, c είναι θετικοί ακέραιοι, οι δυνατές συνεισφορές της μεταβλητής a είναι

$$x^2 + x^4 + x^6 + \cdots = \frac{x^2}{1-x^2}.$$

Αντίστοιχα, για τις μεταβλητές b και c έχουμε

$$x^3 + x^6 + x^9 + \cdots = \frac{x^3}{1-x^3}$$

και

$$x^4 + x^8 + x^{12} + \cdots = \frac{x^4}{1-x^4}.$$

Επομένως

$$A(x) = \frac{x^2}{1-x^2}\frac{x^3}{1-x^3}\frac{x^4}{1-x^4},$$

δηλαδή

$$\boxed{A(x) = \frac{x^9}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}}.$$

(β) Θέλουμε τον συντελεστή του x^{15} στο

$$\frac{x^9}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}.$$

Ισοδύναμα, θέλουμε τον συντελεστή του x^6 στο

$$\frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}.$$

Αυτός είναι το πλήθος των μη αρνητικών ακέραιων λύσεων της

$$2r + 3s + 4t = 6.$$

Οι λύσεις είναι

$$(r, s, t) = (3, 0, 0), \quad (0, 2, 0), \quad (1, 0, 1).$$

Άρα

$$\boxed{a_{15} = 3}.$$

5 (α) Το γράφημα έχει δύο σειρές από n κορυφές, άρα

$$|V(G_n)| = 2n.$$

Υπάρχουν $n-1$ οριζόντιες ακμές στην επάνω σειρά, $n-1$ στην κάτω σειρά και n κατακόρυφες ακμές. Επομένως

$$|E(G_n)| = (n-1) + (n-1) + n = \boxed{3n-2}.$$

Οι τέσσερις κορυφές

$$u_1,\ v_1,\ u_n,\ v_n$$

έχουν βαθμό 2. Για $n \geq 3$, καθεμία από τις υπόλοιπες $2n-4$ κορυφές έχει βαθμό 3.

(β) Από οποιαδήποτε κορυφή μπορούμε να κινηθούμε οριζόντια κατά μήκος της σειράς της και, χρησιμοποιώντας μία κατακόρυφη ακμή, να περάσουμε και στην άλλη σειρά. Άρα οποιεσδήποτε δύο κορυφές συνδέονται με μονοπάτι.

Επομένως το G_n είναι συνεκτικό και άρα έχει παραγόμενο δέντρο.

Κάθε παραγόμενο δέντρο έχει όλες τις $2n$ κορυφές και επομένως έχει

$$\boxed{2n-1}$$

ακμές.

(γ) Θέτουμε

$$A = \{u_i : i \text{ περιττός}\} \cup \{v_i : i \text{ άρτιος}\}$$

και

$$B = \{u_i : i \text{ άρτιος}\} \cup \{v_i : i \text{ περιττός}\}.$$

Κάθε οριζόντια ακμή συνδέει κορυφές με διαδοχικούς δείκτες και κάθε κατακόρυφη ακμή συνδέει u_i με v_i. Επομένως κάθε ακμή έχει το ένα άκρο της στο A και το άλλο στο B.

Άρα το G_n είναι διμερές. Επειδή έχει ακμές,

$$\boxed{\chi(G_n) = 2}.$$

(δ) Για $n = 2$, το G_2 είναι κύκλος μήκους 4. Όλες οι κορυφές του έχουν βαθμό 2, άρα έχει κλειστό περίπατο Euler.

Για $n \geq 3$, υπάρχουν κορυφές βαθμού 3, άρα δεν είναι όλοι οι βαθμοί άρτιοι. Εφόσον το G_n είναι συνεκτικό, συμπεραίνουμε ότι

$$\boxed{G_n \text{ έχει κλειστό περίπατο Euler αν και μόνο αν } n = 2.}$$

(ε) Θεωρούμε τη διαδρομή

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, v_n, v_{n-1}, \ldots, v_1, u_1.$$

Κάθε δύο διαδοχικές κορυφές της παραπάνω ακολουθίας ενώνονται με ακμή του G_n, και κάθε κορυφή του G_n εμφανίζεται ακριβώς μία φορά πριν επιστρέψουμε στην αρχική κορυφή.

Άρα το G_n έχει κύκλο Hamilton.

(στ) Οι ακμές

$$u_1v_1,\ u_2v_2, \ldots, u_nv_n$$

είναι ανά δύο ξένες και κάθε κορυφή του G_n είναι άκρο ακριβώς μίας από αυτές.

Επομένως σχηματίζουν τέλειο ταίριασμα.

(ζ) Από το σχήμα το G_n είναι επίπεδο και, από το ερώτημα (β), είναι συνεκτικό. Από τον τύπο του Euler,

$$|V| - |E| + |F| = 2.$$

Επειδή

$$|V| = 2n, \qquad |E| = 3n - 2,$$

παίρνουμε

$$2n - (3n - 2) + |F| = 2.$$

Άρα

$$\boxed{|F| = n}.$$

(η) Θα δείξουμε ότι

$$\boxed{\chi(\overline{G_n}) = n}.$$

Επειδή το G_n είναι διμερές, δεν έχει τρίγωνα. Επομένως κάθε κλίκα του G_n έχει το πολύ δύο κορυφές. Άρα κάθε ανεξάρτητο σύνολο του $\overline{G_n}$ έχει το πολύ δύο κορυφές, δηλαδή

$$\alpha(\overline{G_n}) = 2.$$

Από την ανισότητα

$$\alpha(H)\chi(H) \geq |V(H)|$$

παίρνουμε

$$2\chi(\overline{G_n}) \geq 2n,$$

οπότε

$$\chi(\overline{G_n}) \geq n.$$

Από το προηγούμενο ερώτημα, οι ακμές

$$u_i v_i, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

σχηματίζουν τέλειο ταίριασμα στο G_n. Άρα, για κάθε i, οι κορυφές u_i, v_i δεν είναι γειτονικές στο $\overline{G_n}$ και μπορούν να πάρουν το ίδιο χρώμα.

Δίνοντας διαφορετικό χρώμα σε καθένα από τα n ζεύγη, παίρνουμε

$$\chi(\overline{G_n}) \leq n.$$

Επομένως

$$\boxed{\chi(\overline{G_n}) = n}.$$