

- Διάρκεια εξέτασης 1:30 ώρες.
- Παραδίδουμε το γραπτό και το πρόχειρο.
- Αποτελέσματα τα οποία γράφονται χωρίς αιτιολόγηση (διότι πιθανόν θυμόμαστε απ' έξω) δεν βαθμολογούνται.

Θέμα 1 (5+10 μονάδες). (α) Βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

(β) Βρείτε τις θέσεις (x) των ακροτάτων (μέγιστα και ελάχιστα) της συνάρτησης

$$f(x) = x^2 e^{-x^2}.$$

Θέμα 2 (10 μονάδες). Έστω ότι η 2η παράγωγος συνάρτησης $f(x)$ είναι

$$f''(x) = 2e^{-2x}.$$

Βρείτε την $f(x)$.

Θέμα 3 (15 μονάδες). Βρείτε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{x}{(x^2 + 1)^3} dx.$$

[Υπόδειξη. Κάνετε την αντικατάσταση $u = x^2$. Το τελικό αποτέλεσμα πρέπει να είναι συνάρτηση του x .]

Θέμα 4 (10 μονάδες). Δείξτε τις ανισότητες

$$\frac{2}{9} < \int_0^2 \frac{dx}{1 + x^3} < 2.$$

Θέμα 5 (10 + 5 μονάδες). Υπολογίστε τα ορισμένα ολοκληρώματα

$$(\alpha) I_1 = \int_0^\infty x e^{-x} dx. \quad (\beta) I_2 = \int_{-1}^1 x \tan^2 x dx.$$

Θέμα 6 (10 μονάδες). Υπολογίστε, αν υπάρχει, το ολοκλήρωμα

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx,$$

Θέμα 7 (15 μονάδες). Βρείτε τη σειρά Taylor γύρω από το $x = 0$ της

$$f(x) = \ln(1 + x).$$

Αρκεί να βρούμε τους τέσσερις πρώτους όρους της σειράς, δηλαδή μέχρι και τον όρο που έχει το x^3 . [Υπόδειξη. Χρησιμοποιήστε τον γενικό τύπο σειράς Taylor.]

Θέμα 8 (10 + 5 μονάδες). (α) Βρείτε τη σειρά Fourier για την περιοδική συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

[Υπόδειξη. Βρείτε τους συντελεστές a_n, b_n και χρησιμοποιήστε τον τύπο από το τυπολόγιο. Ξεκινήστε ελέγχοντας αν η συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή.]

(β) Γράψτε την σειρά χρησιμοποιώντας μόνο τους 2 πρώτους μη-μηδενικούς όρους.

Τυπολόγιο.

- $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$, $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$.
- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.
- $(f/g)' = (f'g - fg')/g^2$.
- $(x^n)' = nx^{n-1}$, $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(\tan x)' = 1/\cos^2 x$, $(e^x)' = e^x$, $(\sinh x)' = \cosh x$, $(\cosh x)' = \sinh x$.
- Έστω F αντιπαράγωγος της f : Είναι $f(x) = 1/x \Rightarrow F(x) = \ln|x|$ και $f(x) = 1/\sqrt{1-x^2} \Rightarrow F(x) = \arcsin x$.
- Η σειρά Taylor είναι $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots$.
- Η σειρά Fourier της $f(x)$ (περιοδικής με περίοδο 2π) είναι

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$