

Διακριτά Μαθηματικά
Τελική Εξέταση
09-06-2026

Διάρκεια: 180 λεπτά Σύνολο: 110 μονάδες

Θέμα 1.

[15 μον.]

Δίνονται τα ψηφία

1, 1, 2, 2, 3, 4, 5.

(α) Πόσοι διαφορετικοί 7-ψήφιοι αριθμοί μπορούν να σχηματιστούν χρησιμοποιώντας όλα τα παραπάνω ψηφία;

(β) Πόσοι από αυτούς τους αριθμούς δεν έχουν δύο ίσα ψηφία σε διαδοχικές θέσεις;

Θέμα 2.

[10 μον.]

Δέκα σημεία είναι σημειωμένα πάνω σε έναν κύκλο. Πόσα διαφορετικά κυρτά πολύγωνα με τρεις ή περισσότερες πλευρές μπορούν να σχεδιαστούν χρησιμοποιώντας κάποια από αυτά τα σημεία ως κορυφές;

Θέμα 3.

[15 μον.]

Ρίχνουμε πέντε κανονικά ζάρια έξι εδρών. Με πόσους τρόπους μπορεί το άθροισμα των ενδείξεων των πέντε ζαριών να είναι ίσο με 14;

Θέμα 4.

[20 μον.]

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έστω a_n το πλήθος των διαμερίσεων του n στις οποίες κάθε μέρος ανήκει στο σύνολο $\{1, 2, 4\}$. Θέτουμε επίσης $a_0 = 1$.

(α) Να αποδείξετε ότι η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $(a_n)_{n \geq 0}$ είναι

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^4)} = \frac{1+x+2x^2+2x^3+x^4+x^5}{(1-x^4)^3}.$$

(β) Να βρείτε έναν τύπο για το a_n , όταν $n = 4s$.

Θέμα 5.

[50 μον.]

Για $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, ορίζουμε το γράφημα Q_n ως εξής. Το σύνολο κορυφών του είναι

$$V(Q_n) = \{0, 1\}^n,$$

και δύο κορυφές

$$\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), \quad \delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$$

ενώνονται με ακμή αν και μόνο αν διαφέρουν σε ακριβώς μία συντεταγμένη.

(α) Να αποδείξετε ότι αν $G = (V, E)$ είναι απλό επίπεδο διμερές γράφημα με $|V| \geq 3$, τότε

$$|E| \leq 2|V| - 4.$$

(β) Να αποδείξετε ότι αν ένα διμερές γράφημα $G = (V_1 \cup V_2, E)$ έχει κύκλο Hamilton, τότε

$$|V_1| = |V_2|.$$

(γ) Να δείξετε ότι το Q_n δεν έχει περιττό κύκλο.

(δ) Να βρείτε τον χρωματικό αριθμό του Q_n .

(ε) Να βρείτε για ποιες τιμές του n το Q_n είναι επίπεδο.

(στ) Να αποδείξετε ότι το Q_n έχει παραγόμενο δέντρο και να βρείτε πόσες ακμές έχει κάθε παραγόμενο δέντρο του. Επιπλέον, να αποδείξετε ότι το πλήθος των παραγόμενων δέντρων είναι το πολύ $\binom{n2^{n-1}}{2^n-1}$.

(ζ) Να βρείτε για ποιους θετικούς ακераίους n το Q_n έχει κλειστό περίπατο Euler, δηλαδή κλειστό περίπατο που περνά από κάθε ακμή ακριβώς μία φορά.

(η) Να αποδείξετε ότι το Q_n έχει τέλειο ταίριασμα.

(θ) Έστω $\overline{Q_n}$ το συμπληρωματικό γράφημα του Q_n . Να βρείτε τον χρωματικό αριθμό $\chi(\overline{Q_n})$.

Καλή Επιτυχία!

1 (α) Έχουμε συνολικά 7 ψηφία. Αν όλα ήταν διακεκριμένα, θα είχαμε

$$7!$$

διατάξεις. Όμως τα δύο 1 είναι όμοια μεταξύ τους και τα δύο 2 είναι όμοια μεταξύ τους. Άρα κάθε διάταξη έχει μετρηθεί

$$2! \cdot 2!$$

φορές. Επομένως το πλήθος των διατάξεων είναι

$$\frac{7!}{2!2!} = \frac{5040}{4} = 1260.$$

Άρα υπάρχουν

$$\boxed{1260}$$

τρόποι.

(β) Από τις συνολικές διατάξεις θα αφαιρέσουμε όσες έχουν δύο ίσα ψηφία σε διαδοχικές θέσεις.

Τα μόνα ψηφία που εμφανίζονται δύο φορές είναι το 1 και το 2. Άρα τα μόνα ανεπιθύμητα φαινόμενα είναι:

$$11 \text{ διαδοχικά} \quad \text{ή} \quad 22 \text{ διαδοχικά}.$$

Ορίζουμε

$$A = \{\text{διατάξεις στις οποίες τα δύο 1 είναι διαδοχικά}\}$$

και

$$B = \{\text{διατάξεις στις οποίες τα δύο 2 είναι διαδοχικά}\}.$$

Αν τα δύο 1 είναι διαδοχικά, τα θεωρούμε ως ένα μπλοκ (11). Τότε διατάσσουμε τα αντικείμενα

$$(11), 2, 2, 3, 4, 5.$$

Επομένως

$$|A| = \frac{6!}{2!} = 360.$$

Ομοίως,

$$|B| = \frac{6!}{2!} = 360.$$

Για το $A \cap B$, θεωρούμε τα δύο μπλοκ (11) και (22). Τότε διατάσσουμε τα πέντε διακεκριμένα αντικείμενα

$$(11), (22), 3, 4, 5.$$

Άρα

$$|A \cap B| = 5! = 120.$$

Με εγκλεισμό–αποκλεισμό,

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 360 + 360 - 120 = 600.$$

Άρα το πλήθος των επιτρεπτών διατάξεων είναι

$$1260 - 600 = 660.$$

Επομένως υπάρχουν

$$\boxed{660}$$

διατάξεις.

2 Επειδή όλα τα σημεία βρίσκονται πάνω σε έναν κύκλο, οποιαδήποτε επιλογή k σημείων, με $k \geq 3$, ορίζει ακριβώς ένα κυρτό k -γωνο: παίρνουμε τα επιλεγμένα σημεία με τη σειρά που εμφανίζονται πάνω στον κύκλο και τα ενώνουμε διαδοχικά.

Άρα το ζητούμενο πλήθος είναι

$$\binom{10}{3} + \binom{10}{4} + \cdots + \binom{10}{10}.$$

Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα

$$\sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} = 2^{10}.$$

Άρα

$$\sum_{k=3}^{10} \binom{10}{k} = 2^{10} - \binom{10}{0} - \binom{10}{1} - \binom{10}{2}.$$

Επομένως

$$\sum_{k=3}^{10} \binom{10}{k} = 1024 - 1 - 10 - 45 = 968.$$

Άρα μπορούν να σχεδιαστούν

$$\boxed{968}$$

διαφορετικά κυρτά πολύγωνα.

3 Θέτουμε

$$y_i = x_i - 1, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Τότε οι συνθήκες

$$x_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

και

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 14$$

γίνονται

$$0 \leq y_i \leq 5$$

και

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 9.$$

Αρχικά αγνοούμε τους περιορισμούς $y_i \leq 5$. Το πλήθος των μη αρνητικών λύσεων της εξίσωσης

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 9$$

είναι

$$\binom{9+5-1}{5-1} = \binom{13}{4}.$$

Πρέπει τώρα να αφαιρέσουμε τις λύσεις στις οποίες κάποιο y_i είναι τουλάχιστον 6. Έστω, για παράδειγμα, ότι

$$y_1 \geq 6.$$

Θέτουμε

$$z_1 = y_1 - 6.$$

Τότε

$$z_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 3,$$

οπότε το πλήθος των αντίστοιχων λύσεων είναι

$$\binom{3+5-1}{5-1} = \binom{7}{4}.$$

Το y_i που είναι τουλάχιστον 6 μπορεί να επιλεγεί με 5 τρόπους, άρα αφαιρούμε

$$5 \binom{7}{4}.$$

Δεν υπάρχουν λύσεις στις οποίες δύο διαφορετικά y_i είναι ταυτόχρονα τουλάχιστον 6, γιατί τότε το άθροισμα θα ήταν τουλάχιστον 12, ενώ εμείς έχουμε άθροισμα 9.

Επομένως, από την αρχή εγκλεισμού–αποκλεισμού, το ζητούμενο πλήθος είναι

$$\binom{13}{4} - 5\binom{7}{4}.$$

Υπολογίζουμε

$$\binom{13}{4} = 715$$

και

$$\binom{7}{4} = 35.$$

Άρα

$$\binom{13}{4} - 5\binom{7}{4} = 715 - 5 \cdot 35 = 715 - 175 = 540.$$

Εναλλακτική Λύση.

Έστω $x_1, \dots, x_5$ οι ενδείξεις των πέντε ζαριών. Θέλουμε να μετρήσουμε τις λύσεις της εξίσωσης

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 14,$$

όπου

$$1 \leq x_i \leq 6 \quad \text{για κάθε } i = 1, \dots, 5.$$

Ισοδύναμα, ζητάμε τον συντελεστή του x^{14} στο

$$(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^5.$$

Επειδή

$$x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 = x(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5),$$

ζητάμε τον συντελεστή του x^9 στο

$$(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^5.$$

Γράφουμε

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 = \frac{1 - x^6}{1 - x}.$$

Άρα ο ζητούμενος συντελεστής είναι

$$[x^9](1 - x^6)^5(1 - x)^{-5}.$$

Για τον συντελεστή του x^9 , από το $(1 - x^6)^5$ χρειαζόμαστε μόνο τους όρους

$$1 - 5x^6.$$

Επίσης

$$(1 - x)^{-5} = \sum_{m \geq 0} \binom{m+4}{4} x^m.$$

Άρα το ζητούμενο πλήθος είναι

$$[x^9](1 - x)^{-5} - 5[x^3](1 - x)^{-5} = \binom{13}{4} - 5\binom{7}{4}.$$

Υπολογίζουμε

$$\binom{13}{4} = 715, \quad \binom{7}{4} = 35.$$

Επομένως

$$\binom{13}{4} - 5\binom{7}{4} = 715 - 175 = 540.$$

Άρα υπάρχουν

$$\boxed{540}$$

τρόποι.

4 (α) Μία διαμέριση του n με μέρη από το σύνολο $\{1, 2, 4\}$ είναι της μορφής

$$n = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 2 + \gamma \cdot 4,$$

όπου

$$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Εδώ η α δηλώνει πόσες φορές εμφανίζεται το μέρος 1, η β πόσες φορές εμφανίζεται το μέρος 2, και η γ πόσες φορές εμφανίζεται το μέρος 4. Άρα το a_n είναι το πλήθος των τριάδων $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3$ που ικανοποιούν

$$\alpha + 2\beta + 4\gamma = n.$$

Επομένως, για κάθε τέτοια τριάδα αντιστοιχεί ο όρος

$$x^{\alpha+2\beta+4\gamma}.$$

Άρα, ως τυπικές δυναμοσειρές,

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n = \sum_{\alpha, \beta, \gamma \geq 0} x^{\alpha+2\beta+4\gamma}.$$

Πράγματι, ο συντελεστής του x^n στο δεξί μέλος είναι ακριβώς το πλήθος των τριάδων (α, β, γ) για τις οποίες

$$\alpha + 2\beta + 4\gamma = n,$$

δηλαδή είναι ίσος με a_n .

Τώρα έχουμε

$$\sum_{\alpha, \beta, \gamma \geq 0} x^{\alpha+2\beta+4\gamma} = \left(\sum_{\alpha \geq 0} x^\alpha \right) \left(\sum_{\beta \geq 0} x^{2\beta} \right) \left(\sum_{\gamma \geq 0} x^{4\gamma} \right).$$

Επομένως

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n = (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots)(1 + x^4 + x^8 + x^{12} + \cdots).$$

Άρα

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^4}.$$

Δηλαδή

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^4)}.$$

Μένει να γράψουμε τη συνάρτηση με παρονομαστή $(1-x^4)^3$. Έχουμε

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^4)} = \frac{(1-x^4)^2}{(1-x)(1-x^2)} \cdot \frac{1}{(1-x^4)^3}.$$

Όμως

$$1-x^4 = (1-x^2)(1+x^2)$$

και

$$1-x^2 = (1-x)(1+x).$$

Άρα

$$\frac{(1-x^4)^2}{(1-x)(1-x^2)} = (1+x)(1+x^2)^2.$$

Επομένως

$$(1+x)(1+x^2)^2 = (1+x)(1+2x^2+x^4) = 1+x+2x^2+2x^3+x^4+x^5.$$

Άρα

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n = \frac{1+x+2x^2+2x^3+x^4+x^5}{(1-x^4)^3}.$$

(β) Από τον τύπο του αρνητικού διωνύμου,

$$\frac{1}{(1-x^4)^3} = \sum_{r \geq 0} \binom{r+2}{2} x^{4r}.$$

Θέλουμε τον συντελεστή του x^{4s} στο

$$(1+x+2x^2+2x^3+x^4+x^5) \sum_{r \geq 0} \binom{r+2}{2} x^{4r}.$$

Συνεισφέρουν μόνο οι όροι 1 και x^4 του αριθμητή. Άρα

$$a_{4s} = \binom{s+2}{2} + \binom{s+1}{2}.$$

Επομένως

$$a_{4s} = \frac{(s+2)(s+1)}{2} + \frac{(s+1)s}{2} = (s+1)^2.$$

Άρα

$$\boxed{a_{4s} = (s+1)^2}.$$

- 5 (α) Αρχεί πρώτα να εξετάσουμε την περίπτωση που το G είναι συνεκτικό. Τότε από τον τύπο του Euler έχουμε

$$|V| - |E| + |F| = 2,$$

όπου F είναι το σύνολο των χωρίων ενός επίπεδου σχεδίου του G .

Επειδή το G είναι διμερές, δεν έχει κύκλους περιττού μήκους, άρα δεν έχει τρίγωνα. Επομένως κάθε χωρίο έχει σύνορο μήκους τουλάχιστον 4. Άρα

$$4|F| \leq 2|E|,$$

διότι κάθε ακμή μετρείται δύο φορές στα σύνορα των χωρίων. Επομένως

$$|F| \leq \frac{|E|}{2}.$$

Άρα, από τον τύπο του Euler,

$$2 = |V| - |E| + |F| \leq |V| - |E| + \frac{|E|}{2} = |V| - \frac{|E|}{2}.$$

Συνεπώς

$$|E| \leq 2|V| - 4.$$

Αν το G δεν είναι συνεκτικό, προσθέτουμε ακμές μεταξύ των συνιστωσών, διατηρώντας την επιπεδικότητα και τη διμέρεια, μέχρι να πάρουμε συνεκτικό επίπεδο διμερές γράφημα με το ίδιο σύνολο κορυφών και με τουλάχιστον τόσες ακμές. Επομένως η ίδια ανισότητα ισχύει και για το αρχικό γράφημα.

- (β) Έστω ότι το διμερές γράφημα $G = (V_1 \cup V_2, E)$ έχει κύκλο Hamilton. Κάθε κύκλος σε διμερές γράφημα εναλλάσσεται ανάμεσα στα δύο μέρη V_1 και V_2 . Άρα περιέχει ίσο πλήθος κορυφών από το V_1 και από το V_2 .

Επειδή ο κύκλος Hamilton περνά από όλες τις κορυφές του G , συμπεραίνουμε ότι

$$|V_1| = |V_2|.$$

- (γ) Έστω κύκλος του Q_n :

$$v_0, v_1, \dots, v_\ell = v_0.$$

Σε κάθε βήμα από το v_i στο v_{i+1} αλλάζει ακριβώς μία συντεταγμένη.

Για κάθε $j = 1, \dots, n$, έστω m_j το πλήθος των φορών που αλλάζει η j -οστή συντεταγμένη κατά μήκος του κύκλου. Επειδή ξεκινάμε από το v_0 και επιστρέφουμε στο ίδιο v_0 , κάθε συντεταγμένη πρέπει να έχει αλλάξει άρτιες φορές. Άρα

$$m_j \text{ είναι άρτιος για κάθε } j.$$

Το μήκος του κύκλου είναι

$$\ell = m_1 + \dots + m_n.$$

Άρα το ℓ είναι άρτιο. Επομένως το Q_n δεν έχει περιττό κύκλο. **Εναλλακτική Λύση.** Χωρίζουμε τις κορυφές ανάλογα με την παραβολή του αθροίσματος των συντεταγμένων τους. Θέτουμε

$$A = \{\varepsilon \in \{0, 1\}^n : \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n \text{ είναι άρτιος}\}$$

και

$$B = \{\varepsilon \in \{0, 1\}^n : \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n \text{ είναι περιττός}\}.$$

Αν δύο κορυφές είναι γειτονικές, τότε διαφέρουν σε ακριβώς μία συντεταγμένη. Άρα το άθροισμα των συντεταγμένων αλλάζει παραβολή.

Επομένως κάθε ακμή ενώνει μία κορυφή του A με μία κορυφή του B .

(δ) Από το προηγούμενο ερώτημα έπεται ότι το Q_n είναι διμερές και

$$\chi(Q_n) \leq 2.$$

Επειδή $n \geq 1$, το Q_n έχει τουλάχιστον μία ακμή, άρα δεν μπορεί να χρωματιστεί με ένα μόνο χρώμα. Συνεπώς

$$\boxed{\chi(Q_n) = 2.}$$

(ε) Το Q_n έχει

$$|V(Q_n)| = 2^n$$

κορυφές. Κάθε κορυφή έχει βαθμό n , επειδή μπορούμε να αλλάξουμε μία από τις n συντεταγμένες. Άρα

$$2|E(Q_n)| = n2^n,$$

οπότε

$$|E(Q_n)| = n2^{n-1}.$$

Αν Q_n ήταν επίπεδο και $n \geq 4$, τότε, επειδή είναι διμερές, από το πρώτο ερώτημα θα είχαμε

$$n2^{n-1} = |E(Q_n)| \leq 2|V(Q_n)| - 4 = 2^{n+1} - 4.$$

Διαιρώντας με 2^{n-1} , παίρνουμε

$$n \leq 4 - \frac{4}{2^{n-1}}.$$

Για $n \geq 4$, το δεξί μέλος είναι μικρότερο από 4, ενώ το αριστερό μέλος είναι τουλάχιστον 4. Άτοπο.

Άρα το Q_n δεν είναι επίπεδο για $n \geq 4$.

Από την άλλη, το Q_1 είναι μία ακμή, το Q_2 είναι κύκλος τεσσάρων κορυφών, και το Q_3 είναι το γράφημα του κύβου. Άρα είναι επίπεδα.

Συνεπώς

$$\boxed{Q_n \text{ είναι επίπεδο αν και μόνο αν } n = 1, 2, 3.}$$

(στ) Το Q_n είναι συνεκτικό. Πράγματι, αν

$$\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$$

και

$$\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$$

είναι δύο κορυφές, τότε μπορούμε να πάμε από την ε στη δ αλλάζοντας μία-μία τις συντεταγμένες στις οποίες διαφέρουν.

Άρα το Q_n έχει παραγόμενο δέντρο.

Κάθε δέντρο με m κορυφές έχει $m - 1$ ακμές. Εδώ

$$|V(Q_n)| = 2^n.$$

Άρα κάθε παραγόμενο δέντρο του Q_n έχει

$$2^n - 1$$

ακμές. Άρα, για να επιλέξουμε ένα παραγόμενο δέντρο, σίγουρα επιλέγουμε ένα σύνολο $2^n - 1$ ακμών από τις συνολικά $n2^{n-1}$ ακμές του Q_n .

(ζ) Το Q_n είναι συνεκτικό και n -κανονικό. Άρα κάθε κορυφή του έχει βαθμό n .

Ένα συνεκτικό γράφημα έχει κλειστό περίπατο Euler αν και μόνο αν όλες οι κορυφές του έχουν άρτιο βαθμό. Επομένως το Q_n έχει κλειστό περίπατο Euler αν και μόνο αν το n είναι άρτιο.

Άρα

$$Q_n \text{ έχει κλειστό περίπατο Euler αν και μόνο αν } n \text{ είναι άρτιος.}$$

(η) Θα δώσουμε άμεση κατασκευή τέλειου ταιριασματος. Για κάθε

$$(\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^{n-1},$$

ταιριάζουμε την κορυφή

$$(0, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$$

με την κορυφή

$$(1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n).$$

Οι δύο αυτές κορυφές διαφέρουν μόνο στην πρώτη συντεταγμένη, άρα ενώνονται με ακμή στο Q_n .

Κάθε κορυφή του Q_n εμφανίζεται σε ακριβώς ένα τέτοιο ζεύγος. Επομένως οι παραπάνω ακμές σχηματίζουν τέλειο ταιριασμα του Q_n .

(θ) Θα δείξουμε ότι

$$\chi(\overline{Q_n}) = 2^{n-1}.$$

Πρώτα βρίσκουμε κάτω φράγμα. Ένα ανεξάρτητο σύνολο στο $\overline{Q_n}$ είναι κλίκα στο Q_n . Όμως το Q_n είναι διμερές και έχει τουλάχιστον μία ακμή. Άρα δεν έχει τρίγωνο και η μέγιστη κλίκα του έχει μέγεθος 2. Επομένως

$$\alpha(\overline{Q_n}) = 2.$$

Από τη γνωστή ανισότητα

$$\alpha(G)\chi(G) \geq |V(G)|$$

για $G = \overline{Q_n}$, παίρνουμε

$$2\chi(\overline{Q_n}) \geq 2^n.$$

Άρα

$$\chi(\overline{Q_n}) \geq 2^{n-1}.$$

Μένει να δείξουμε το αντίστροφο φράγμα. Από το προηγούμενο ερώτημα, το Q_n έχει τέλειο ταιριασμα με 2^{n-1} ακμές. Κάθε ακμή του Q_n είναι ζεύγος κορυφών που δεν ενώνονται στο $\overline{Q_n}$. Άρα κάθε τέτοιο ζεύγος μπορεί να πάρει ένα κοινό χρώμα στο συμπληρωματικό γράφημα.

Χρωματίζουμε λοιπόν κάθε ζεύγος του τέλειου ταιριασματος με διαφορετικό χρώμα. Έτσι παίρνουμε χρωματισμό του $\overline{Q_n}$ με

$$2^{n-1}$$

χρώματα. Άρα

$$\chi(\overline{Q_n}) \leq 2^{n-1}.$$

Συνδυάζοντας τα δύο φράγματα,

$$\chi(\overline{Q_n}) = 2^{n-1}.$$