

Διακριτά Μαθηματικά
7^ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Πρόβλημα 1 Δίνονται διαστήματα $I_1, I_2, \dots, I_m$, υποσύνολα του $[0, 1]$, ώστε το άθροισμα των μηκών τους να είναι μεγαλύτερο από 10. Να αποδείξετε ότι σημείο του $[0, 1]$ που ανήκει σε τουλάχιστον 11 από τα διαστήματα.

Πρόβλημα 2 Μέσα σε τετράγωνο πλευράς a δίνονται κύκλοι, όλοι ολόκληροι μέσα στο τετράγωνο, έτσι ώστε το άθροισμα των περιμέτρων τους να είναι ίσο με $8a$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν άπειρες πολλές ευθείες που τέμνουν τουλάχιστον 3 από τους κύκλους.

Πρόβλημα 3 Έστω n και m δύο θετικοί ακέραιοι μεγαλύτεροι του 1, και έστω

$$m \geq 2 \log_2 n.$$

Τότε είναι δυνατό να χρωματίσουμε κάθε ακμή του $K_{n,n}$ με κόκκινο ή μπλε, έτσι ώστε να μη σχηματίζεται κανένα υπογράφημα $K_{m,m}$ με μονόχρωμες ακμές.

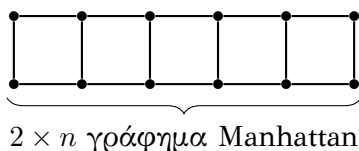
Πρόβλημα 4 Να αποδειχθεί ότι υπάρχει ένας χρωματισμός με 4 χρώματα του συνόλου

$$M = \{1, 2, \dots, 1987\}$$

με την ιδιότητα ότι καμία αριθμητική πρόοδος 10 όρων που περιέχεται στο M δεν είναι μονόχρωμη.

Πρόβλημα 5 Ένα τμήμα της του Λυκείου έχει 26 μαθητές, που κάθονται ανά δύο στα θρανία. Στο δεύτερο τετράμηνο έχουν αποφασίσει να αλλάξουν θέσεις ώστε κάθε δύο μαθητές που καθόταν μαζί στο πρώτο τετράμηνο, να μην κάθονται μαζί και στο δεύτερο. Να αποδείξετε ότι ανεξαρτήτως από το πώς κάθισαν οι μαθητές στα δύο τετράμηνα, υπάρχει στο τέλος της χρονιάς ένα σύνολο S από 13 μαθητές, στο οποίο δεν υπάρχουν δύο μαθητές οι οποίοι κάθισαν μαζί σε κάποιο από τα δύο τετράμηνα.

Πρόβλημα 6 Να βρεθεί το πλήθος των τελείων ταιριασμάτων του $2 \times n$ γραφήματος Manhattan.



Πρόβλημα 7 Έστω $G = (X, Y)$ ένα διμερές γράφημα με την ιδιότητα ότι κάθε κορυφή του X έχει βαθμό τουλάχιστον τόσο μεγάλο όσο ο βαθμός οποιασδήποτε κορυφής του Y . Να αποδειχθεί ότι το X έχει τέλει ταιρίασμα μέσα στο Y .

Πρόβλημα 8 Είκοσι μαθητές έχουν λύσει είκοσι προβλήματα. Κάθε μαθητής έχει λύσει ακριβώς 2 προβλήματα και κάθε πρόβλημα έχει λυθεί από ακριβώς 2 μαθητές. Να αποδειχθεί ότι είναι δυνατό να ανατεθεί σε κάθε μαθητή να παρουσιάσει τη λύση ενός από τα προβλήματα που έχει λύσει, έτσι ώστε στο τέλος να έχουν παρουσιαστεί οι λύσεις όλων των προβλημάτων.

Πρόβλημα 9 Έστω $p_n(k)$ το πλήθος των μεταθέσεων του συνόλου $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ που έχουν ακριβώς k σταθερά σημεία. Να αποδειχθεί ότι

$$\sum_{k=0}^n k p_n(k) = n!.$$

Υπόδειξη. Θεώρησε ομοιόμορφα τυχαία μια μετάθεση του $\{1, 2, \dots, n\}$, και έστω X ο αριθμός των σταθερών σημείων της. Υπολόγισε την $\mathbb{E}[X]$ με δύο διαφορετικούς τρόπους.

Πρόβλημα 10 Ο Άγιος Βασίλης έχει τουλάχιστον n δώρα για n παιδιά. Για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, το i -οστό παιδί θεωρεί επιθυμητά ακριβώς $x_i > 0$ από αυτά τα δώρα. Υποθέτουμε ότι

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \leq 1.$$

Να αποδειχθεί ότι ο Άγιος Βασίλης μπορεί να δώσει σε κάθε παιδί ένα δώρο που να αρέσει σε αυτό το παιδί.

Υπόδειξη. Σχημάτισε ένα διμερές γράφημα με αριστερή πλευρά τα παιδιά και δεξιά πλευρά τα δώρα. Για ένα σύνολο S παιδιών, αν $N(S)$ είναι το σύνολο των δώρων που αρέσουν σε τουλάχιστον ένα από αυτά, σύγκρινε το $|S|$ με το $|N(S)|$ χρησιμοποιώντας την ανισότητα

$$\sum_{i \in S} \frac{1}{x_i} \leq 1.$$

Πρόβλημα 11 Έστω G ένα απλό γράφημα με σύνολο κορυφών $V(G)$, $|V(G)| = n$, και βαθμούς $d(v)$, $v \in V(G)$.

(i) Να αποδείξετε την ακόλουθη “συμπληρωματική” μορφή του θεωρήματος Caro–Wei:

$$\omega(G) \geq \sum_{v \in V(G)} \frac{1}{n - d(v)},$$

όπου $\omega(G)$ είναι το μέγεθος μέγιστης κλίκας του G . Κλίκα του G είναι ένα υπογράφημα G' όπου όλες οι κορυφές στο G' συνδέονται με όλες τις άλλες κορυφές του G' .

(ii) Σε μια συνάντηση παρευρίσκονται 2011 επιστήμονες. Γνωρίζουμε ότι κάθε επιστήμονας γνωρίζει τουλάχιστον 1509 από τους υπόλοιπους. Να αποδείξετε ότι μπορούν να βρεθούν 5 επιστήμονες τέτοιοι ώστε καθένας να γνωρίζει και τους άλλους 4.

Πρόβλημα 12 Ένα γράφημα λέγεται χωρίς τρίγωνα αν δεν έχει τρεις διαφορετικές κορυφές u, v, w τέτοιες ώστε οι uv, vw, wu να είναι όλες ακμές. Ένα ανεξάρτητο σύνολο μεγέθους t είναι ένα σύνολο κορυφών $v_1, \dots, v_t$ τέτοιο ώστε καμία από τις $v_i v_j$, $i \neq j$, να μην είναι ακμή.

(i) Να αποδείξετε ότι κάθε γράφημα με n κορυφές που δεν έχει τρίγωνα περιέχει ένα ανεξάρτητο σύνολο μεγέθους τουλάχιστον $\frac{1}{2}\sqrt{n}$.

(ii) Να βελτιώσετε το αποτέλεσμα του πρώτου ερωτήματος, αποδεικνύοντας ότι για κάθε σταθερά $c < \sqrt{2}$ υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε κάθε γράφημα με n κορυφές χωρίς τρίγωνα, με $n \geq n_0$, έχει ανεξάρτητο σύνολο μεγέθους τουλάχιστον $c\sqrt{n}$.

Παραδίδετε 5 Προβλήματα έως 28–05–2026.

1 Έστω X τυχαίο σημείο του $[0, 1]$, επιλεγμένο ομοιόμορφα. Για κάθε $j = 1, \dots, m$, ορίζουμε την δείκτρια τυχαία μεταβλητή

$$X_j = \mathbf{1}_{\{X \in I_j\}}.$$

Δηλαδή

$$X_j = \begin{cases} 1, & \text{αν } X \in I_j, \\ 0, & \text{αν } X \notin I_j. \end{cases}$$

Θέτουμε

$$S = X_1 + \dots + X_m.$$

Τότε το S εκφράζει το πλήθος των διαστημάτων στα οποία ανήκει το τυχαίο σημείο X .

Για κάθε j , επειδή το X είναι ομοιόμορφο στο $[0, 1]$, έχουμε

$$\mathbb{P}(X \in I_j) = |I_j|,$$

όπου $|I_j|$ είναι το μήκος του διαστήματος I_j . Άρα

$$\mathbb{E}[X_j] = \mathbb{P}(X_j = 1) = \mathbb{P}(X \in I_j) = |I_j|.$$

Επομένως, από τη γραμμικότητα της μέσης τιμής,

$$\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[X_1 + \dots + X_m] = \sum_{j=1}^m \mathbb{E}[X_j] = \sum_{j=1}^m |I_j|.$$

Από την υπόθεση,

$$\sum_{j=1}^m |I_j| > 10.$$

Άρα

$$\mathbb{E}[S] > 10.$$

Άρα υπάρχει σημείο $x \in [0, 1]$ για το οποίο

$$S(x) > 10.$$

Επειδή το $S(x)$ είναι ακέραιος αριθμός, παίρνουμε

$$S(x) \geq 11.$$

Επομένως υπάρχει σημείο του $[0, 1]$ που ανήκει σε τουλάχιστον 11 από τα διαστήματα.

2 Έστω ότι το τετράγωνο έχει πλευρά a . Τότε η περίμετρός του είναι $4a$, άρα από την υπόθεση το άθροισμα των περιφερειών όλων των κύκλων είναι

$$2 \cdot 4a = 8a.$$

Θα δείξουμε ότι υπάρχουν άπειρες πολλές κατακόρυφες ευθείες που τέμνουν τουλάχιστον 3 από τους κύκλους.

Για κάθε $t \in [0, a]$, έστω

$$L_t := \{(x, y) : x = t\}$$

η κατακόρυφη ευθεία με τετμημένη t . Διαλέγουμε το t ομοιόμορφα στο $[0, a]$, και έτσι επιλέγουμε τυχαία μια κατακόρυφη ευθεία L_t .

Αν $C_1, C_2, \dots$ είναι οι δοσμένοι κύκλοι, ορίζουμε για κάθε i τη δεικτική μεταβλητή

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{αν η } L_t \text{ τέμνει τον κύκλο } C_i, \\ 0, & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

και θέτουμε

$$X = \sum_i X_i.$$

Τότε το X είναι ο αριθμός των κύκλων που τέμνει η τυχαία ευθεία L_t .

Έστω ότι ο κύκλος C_i έχει κέντρο (x_i, y_i) και ακτίνα r_i . Η ευθεία L_t τέμνει τον C_i αν και μόνον αν

$$|t - x_i| \leq r_i,$$

δηλαδή αν και μόνον αν

$$t \in [x_i - r_i, x_i + r_i].$$

Το μήκος του διαστήματος αυτού είναι $2r_i$. Επειδή ο κύκλος βρίσκεται ολόκληρος μέσα στο τετράγωνο, το διάστημα αυτό περιέχεται στο $[0, a]$. Άρα

$$\Pr(X_i = 1) = \frac{2r_i}{a},$$

και επομένως

$$\mathbb{E}[X_i] = \frac{2r_i}{a}.$$

Με τη γραμμικότητα της αναμενόμενης τιμής παίρνουμε

$$\mathbb{E}[X] = \sum_i \mathbb{E}[X_i] = \frac{2}{a} \sum_i r_i.$$

Αν c_i είναι η περίμετρος του C_i , τότε

$$c_i = 2\pi r_i,$$

άρα

$$\sum_i r_i = \frac{1}{2\pi} \sum_i c_i = \frac{1}{2\pi} \cdot 8a = \frac{4a}{\pi}.$$

Συνεπώς

$$\mathbb{E}[X] = \frac{2}{a} \cdot \frac{4a}{\pi} = \frac{8}{\pi} > 2.$$

Τώρα, αν σχεδόν κάθε κατακόρυφη ευθεία τέμνε το πολύ 2 κύκλους, τότε θα είχαμε $X \leq 2$ σχεδόν βέβαια, και άρα

$$\mathbb{E}[X] \leq 2,$$

που είναι άτοπο.

Άρα το σύνολο των $t \in [0, a]$ για τα οποία η L_t τέμνει τουλάχιστον 3 κύκλους έχει θετικό μήκος. Επομένως είναι άπειρο.

Συνεπώς υπάρχουν άπειρες πολλές ευθείες που τέμνουν τουλάχιστον 3 από τους δοσμένους κύκλους.

3 Το πλήθος των τρόπων να χρωματίσουμε με 2 χρώματα τις ακμές ενός δοσμένου υπογραφήματος $K_{m,m}$ του $K_{n,n}$ είναι

$$2^{m^2},$$

και ακριβώς δύο από αυτούς τους χρωματισμούς δίνουν μονόχρωμο υπογραφήματα. Επομένως, η πιθανότητα να σχηματιστεί τουλάχιστον ένα μονόχρωμο $K_{m,m}$ είναι το πολύ

$$\binom{n}{m}^2 2^{1-m^2}.$$

Άρα αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\binom{n}{m}^2 2^{1-m^2} < 1,$$

δηλαδή ότι

$$2 \binom{n}{m}^2 < 2^{m^2}.$$

Για να το δούμε αυτό, γράφουμε

$$2 \binom{n}{m}^2 < n^{2m} \leq (2^{m/2})^{2m} = 2^{m^2},$$

όπου η δεύτερη ανισότητα είναι απλή συνέπεια της σχέσης ανάμεσα στα n και m .

Ένας άλλος τρόπος να διατυπώσουμε το ίδιο θεώρημα είναι ο εξής. Αν

$$m \geq 2 \log_2 n,$$

τότε υπάρχει πίνακας διαστάσεων $n \times n$ με στοιχεία 0 ή 1, ο οποίος δεν έχει κανέναν ελάχιστο $m \times m$ που να αποτελείται μόνο από μηδενικά ή μόνο από μονάδες.

Το εντυπωσιακό σε αυτό το αποτέλεσμα είναι ότι κανείς δεν ξέρει πώς να κατασκευάσει έναν τέτοιο πίνακα, ή πώς να χρωματίσει τις ακμές του $K_{n,n}$ έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι απαιτήσεις. Στην πραγματικότητα, το χάσμα ανάμεσα σε αυτό που μπορούμε να κάνουμε και σε αυτό που ξέρουμε ότι είναι δυνατό είναι αρκετά μεγάλο. Η καλύτερη κατασκευή που γνωρίζουμε μέχρι σήμερα για έναν $n \times n$ πίνακα με μηδενικά και μονάδες, χωρίς ελάχιστον $m \times m$, είναι για

$$m = c\sqrt{n},$$

όπου c είναι μια σταθερά. Αυτό είναι πολύ περισσότερο από αυτό που γνωρίζουμε ότι είναι αληθές, δηλαδή

$$m = 2 \log_2 n.$$

4 Χρωματίζουμε τυχαία τα στοιχεία του M με 4 χρώματα, ανεξάρτητα και ομοιόμορφα. Δηλαδή, κάθε στοιχείο παίρνει καθένα από τα 4 χρώματα με πιθανότητα $1/4$.

Θα δείξουμε ότι η αναμενόμενη τιμή του πλήθους των μονόχρωμων αριθμητικών προόδων 10 όρων είναι μικρότερη από 1. Αυτό θα συνεπάγεται ότι υπάρχει κάποιος χρωματισμός χωρίς καμία μονόχρωμη τέτοια πρόοδος.

Μια αριθμητική πρόοδος 10 όρων στο M έχει τη μορφή

$$a, a + d, a + 2d, \dots, a + 9d,$$

όπου $d \geq 1$ και

$$a + 9d \leq 1987.$$

Άρα

$$d \leq \left\lfloor \frac{1986}{9} \right\rfloor = 220.$$

Για δεδομένο d , ο αριθμός των δυνατών αρχικών όρων a είναι

$$1987 - 9d.$$

Επομένως ο συνολικός αριθμός των αριθμητικών προόδων 10 όρων είναι

$$N = \sum_{d=1}^{220} (1987 - 9d).$$

Υπολογίζουμε:

$$N = 220 \cdot 1987 - 9 \sum_{d=1}^{220} d = 220 \cdot 1987 - 9 \cdot \frac{220 \cdot 221}{2} = 218350.$$

Τώρα, για μια συγκεκριμένη αριθμητική πρόοδος 10 όρων, η πιθανότητα να είναι μονόχρωμη είναι

$$4 \left(\frac{1}{4} \right)^{10} = \left(\frac{1}{4} \right)^9 = \frac{1}{262144}.$$

Για κάθε αριθμητική πρόοδος P 10 όρων, ορίζουμε τη δεικτική μεταβλητή

$$X_P = \begin{cases} 1, & \text{αν η } P \text{ είναι μονόχρωμη,} \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Έστω

$$X = \sum_P X_P,$$

όπου το άθροισμα εκτείνεται σε όλες τις αριθμητικές προόδους 10 όρων στο M . Τότε το X είναι ο αριθμός των μονόχρωμων τέτοιων προόδων.

Από τη γραμμικότητα της αναμενόμενης τιμής,

$$\mathbb{E}[X] = \sum_P \mathbb{E}[X_P] = 218350 \cdot \frac{1}{262144} < 1.$$

Άρα δεν είναι δυνατόν κάθε χρωματισμός να έχει τουλάχιστον μία μονόχρωμη αριθμητική πρόοδος 10 όρων. Επομένως υπάρχει τουλάχιστον ένας χρωματισμός για τον οποίο

$$X = 0.$$

Δηλαδή υπάρχει 4-χρωματισμός του M χωρίς καμία μονόχρωμη αριθμητική πρόοδος 10 όρων.

6 Έστω a_n το πλήθος των τελείων ταιριασμάτων του $2 \times n$ γραφήματος Manhattan.

Θα βρούμε μια αναδρομική σχέση για το a_n , κοιτάζοντας τι συμβαίνει στην πρώτη στήλη.

Υπάρχουν δύο μόνο δυνατότητες σε ένα τέλειο ταίριασμα:

- (i) Οι δύο κορυφές της πρώτης στήλης ταιριάζονται μεταξύ τους με την κατακόρυφη ακμή της πρώτης στήλης. Τότε απομένει ένα $2 \times (n - 1)$ γράφημα Manhattan, το οποίο μπορεί να ταιριαστεί με a_{n-1} τρόπους.
- (ii) Οι δύο κορυφές της πρώτης στήλης δεν ταιριάζονται μεταξύ τους. Τότε, επειδή ζητάμε τέλειο ταίριασμα, η πάνω αριστερή κορυφή πρέπει να ταιριαστεί με την πάνω κορυφή της δεύτερης στήλης, και η κάτω αριστερή με την κάτω κορυφή της δεύτερης στήλης. Άρα οι δύο πρώτες στήλες καλύπτονται αναγκαστικά με δύο οριζόντιες ακμές, και απομένει ένα $2 \times (n - 2)$ γράφημα Manhattan. Αυτό δίνει a_{n-2} τρόπους.

Οι δύο περιπτώσεις είναι ξένες και εξαντλούν όλες τις δυνατότητες, άρα

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

Τώρα οι αρχικές τιμές είναι εύκολες:

$$a_1 = 1,$$

αφού στο 2×1 γράφημα υπάρχει μόνο το κατακόρυφο ταίριασμα, και

$$a_2 = 2,$$

αφού στο 2×2 γράφημα υπάρχουν ακριβώς δύο τέλεια ταιριασμάτα: είτε οι δύο κατακόρυφες ακμές είτε οι δύο οριζόντιες ακμές.

Άρα η ακολουθία (a_n) ικανοποιεί

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n \geq 3).$$

Επομένως τα a_n είναι οι αριθμοί Fibonacci μετατοπισμένοι κατά μία θέση. Αν (F_m) είναι η ακολουθία Fibonacci με

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_{m+2} = F_{m+1} + F_m,$$

τότε

$$a_n = F_{n+1}.$$

Άρα το πλήθος των τελείων ταιριασμάτων του $2 \times n$ γραφήματος Manhattan είναι

$$\boxed{F_{n+1}}.$$

7 Θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα του Hall. Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε υποσύνολο $S \subseteq X$ ισχύει

$$|N(S)| \geq |S|.$$

Έστω λοιπόν $S \subseteq X$, και θέτουμε

$$T := N(S) \subseteq Y.$$

Θεωρούμε το διμερές υπογράφημα που αποτελείται από τις κορυφές $S \cup T$ και από όλες τις ακμές του G που έχουν ένα άκρο στο S και το άλλο στο T . Έστω $e(S, T)$ το πλήθος αυτών των ακμών.

Από τον ορισμό του $T = N(S)$, κάθε κορυφή του S έχει όλους τους γείτονές της μέσα στο T . Άρα, αν $d(v)$ είναι ο βαθμός της κορυφής v στο G , τότε

$$e(S, T) = \sum_{x \in S} d(x).$$

Από την υπόθεση του προβλήματος, κάθε κορυφή του X έχει βαθμό τουλάχιστον τόσο μεγάλο όσο κάθε κορυφή του Y . Άρα, για κάθε $x \in S$ και κάθε $y \in T$, ισχύει

$$d(x) \geq d(y).$$

Επομένως

$$\sum_{x \in S} d(x) \geq |S| \cdot d(y) \quad \text{για κάθε } y \in T.$$

Αθροίζοντας ως προς όλα τα $y \in T$, παίρνουμε

$$|T| \sum_{x \in S} d(x) \geq |S| \sum_{y \in T} d(y).$$

Δηλαδή

$$|T| \cdot e(S, T) \geq |S| \sum_{y \in T} d(y).$$

Τώρα κάθε κορυφή $y \in T$ έχει τουλάχιστον μία γειτονική κορυφή στο S , αλλά ίσως και άλλες εκτός του S , άρα

$$d(y) \geq d_S(y),$$

όπου $d_S(y)$ είναι ο αριθμός των γειτόνων του y μέσα στο S . Επομένως

$$\sum_{y \in T} d(y) \geq \sum_{y \in T} d_S(y) = e(S, T).$$

Άρα

$$|T| \cdot e(S, T) \geq |S| \cdot e(S, T).$$

Αφού $e(S, T) \geq 0$, και αν $S \neq \emptyset$ μάλιστα $e(S, T) > 0$, συμπεραίνουμε ότι

$$|T| \geq |S|.$$

Δηλαδή

$$|N(S)| \geq |S| \quad \text{για κάθε } S \subseteq X.$$

Άρα ισχύει η συνθήκη του Hall, και συνεπώς υπάρχει ταίριασμα που καλύπτει όλες τις κορυφές του X , δηλαδή ένα τέλει ταίριασμα του X μέσα στο Y .

8 Θεωρούμε το διμερές γράφημα $G = (X, Y)$, όπου:

- το X είναι το σύνολο των 20 μαθητών,
- το Y είναι το σύνολο των 20 προβλημάτων,
- ένας μαθητής $x \in X$ συνδέεται με ένα πρόβλημα $y \in Y$ αν και μόνον αν ο x έχει λύσει το y .

Τότε κάθε κορυφή του X έχει βαθμό 2, αφού κάθε μαθητής έχει λύσει ακριβώς 2 προβλήματα, και κάθε κορυφή του Y έχει επίσης βαθμό 2, αφού κάθε πρόβλημα έχει λυθεί από ακριβώς 2 μαθητές.

Θα εφαρμόσουμε το Θεώρημα του Hall. Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε υποσύνολο $S \subseteq X$ ισχύει

$$|N(S)| \geq |S|,$$

όπου $N(S)$ είναι το σύνολο των προβλημάτων που έχουν λυθεί από τουλάχιστον έναν μαθητή του S .

Πράγματι, έστω $S \subseteq X$. Κάθε μαθητής του S έχει βαθμό 2, άρα ο συνολικός αριθμός των ακμών που εξέρχονται από το S είναι

$$2|S|.$$

Όλες αυτές οι ακμές καταλήγουν σε κορυφές του $N(S)$. Από την άλλη, κάθε κορυφή του $N(S)$ έχει βαθμό το πολύ 2 ως προς όλο το γράφημα, άρα δέχεται το πολύ 2 από αυτές τις ακμές. Επομένως

$$2|S| \leq 2|N(S)|.$$

Άρα

$$|S| \leq |N(S)|.$$

Επομένως ισχύει η συνθήκη του Hall, και άρα υπάρχει ταίριασμα που καλύπτει όλες τις κορυφές του X , δηλαδή μπορούμε να αντιστοιχίσουμε σε κάθε μαθητή ένα πρόβλημα που έχει λύσει, έτσι ώστε διαφορετικοί μαθητές να αντιστοιχιστούν σε διαφορετικά προβλήματα.

Επειδή

$$|X| = |Y| = 20,$$

ένα τέτοιο ταίριασμα που καλύπτει όλες τις κορυφές του X καλύπτει αναγκαστικά και όλες τις κορυφές του Y . Δηλαδή κάθε πρόβλημα αντιστοιχεί σε ακριβώς έναν μαθητή.

Άρα μπορούμε να αναθέσουμε σε κάθε μαθητή να παρουσιάσει τη λύση ενός προβλήματος που έχει λύσει, έτσι ώστε στο τέλος να έχουν παρουσιαστεί οι λύσεις όλων των 20 προβλημάτων.

9 Θεωρούμε το σύνολο S_n όλων των μεταθέσεων του $\{1, 2, \dots, n\}$, και επιλέγουμε μια μετάθεση $\sigma \in S_n$ ομοιόμορφα στην τύχη. Άρα κάθε μετάθεση έχει πιθανότητα

$$\frac{1}{n!}.$$

Έστω X η τυχαία μεταβλητή που δίνει τον αριθμό των σταθερών σημείων της σ , δηλαδή

$$X(\sigma) = \#\{i \in \{1, \dots, n\} : \sigma(i) = i\}.$$

Θα υπολογίσουμε την $\mathbb{E}[X]$ με δύο τρόπους.

Πρώτος τρόπος. Για κάθε $i = 1, \dots, n$, θέτουμε

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{αν } \sigma(i) = i, \\ 0, & \text{αν } \sigma(i) \neq i. \end{cases}$$

Τότε

$$X = X_1 + \dots + X_n.$$

Άρα, από τη γραμμικότητα της αναμενόμενης τιμής,

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_1] + \dots + \mathbb{E}[X_n].$$

Επειδή X_i είναι δεικτική μεταβλητή,

$$\mathbb{E}[X_i] = \Pr(\sigma(i) = i).$$

Τώρα, αν παγώσουμε το i , τότε οι μεταθέσεις που αφήνουν σταθερό το i είναι ακριβώς $(n-1)!$, αφού τα υπόλοιπα $n-1$ στοιχεία μετατίθενται αυθαίρετα. Άρα

$$\Pr(\sigma(i) = i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$

Επομένως

$$\mathbb{E}[X] = n \cdot \frac{1}{n} = 1.$$

Δεύτερος τρόπος. Η τυχαία μεταβλητή X παίρνει τιμές $0, 1, \dots, n$. Για κάθε k , ακριβώς $p_n(k)$ μεταθέσεις έχουν ακριβώς k σταθερά σημεία. Επομένως

$$\Pr(X = k) = \frac{p_n(k)}{n!}.$$

Άρα, από τον ορισμό της αναμενόμενης τιμής,

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^n k \Pr(X = k) = \sum_{k=0}^n k \frac{p_n(k)}{n!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n k p_n(k).$$

Αλλά από τον πρώτο τρόπο βρήκαμε ότι $\mathbb{E}[X] = 1$. Άρα

$$1 = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n k p_n(k),$$

και πολλαπλασιάζοντας με $n!$, παίρνουμε

$$\sum_{k=0}^n k p_n(k) = n!.$$

Αυτό ακριβώς θέλαμε να αποδείξουμε.

10 Θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα του Hall.

Θεωρούμε το διμερές γράφημα $G = (X, Y)$, όπου:

- το X είναι το σύνολο των n παιδιών,
- το Y είναι το σύνολο των δώρων,
- ενώνουμε το παιδί $i \in X$ με ένα δώρο $g \in Y$ αν και μόνον αν το παιδί i θεωρεί το δώρο g επιθυμητό.

Θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχει ταίριασμα που καλύπτει όλες τις κορυφές του X , δηλαδή ότι μπορεί να δοθεί σε κάθε παιδί ένα διαφορετικό δώρο που του αρέσει. Από το Θεώρημα του Hall αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε υποσύνολο $S \subseteq X$ ισχύει

$$|N(S)| \geq |S|,$$

όπου $N(S)$ είναι το σύνολο των δώρων που αρέσουν σε τουλάχιστον ένα παιδί του S .

Έστω λοιπόν $S \subseteq X$, και θέτουμε

$$m := |N(S)|.$$

Τότε κάθε παιδί $i \in S$ συμπαθεί μόνο δώρα που ανήκουν στο $N(S)$, άρα

$$x_i \leq m \quad \text{για κάθε } i \in S.$$

Επειδή οι αριθμοί είναι θετικοί, από αυτό έπεται

$$\frac{1}{x_i} \geq \frac{1}{m} \quad \text{για κάθε } i \in S.$$

Αθροίζοντας για όλα τα $i \in S$, παίρνουμε

$$\sum_{i \in S} \frac{1}{x_i} \geq \frac{|S|}{m}.$$

Από την άλλη, αφού όλα τα μέλη του αθροίσματος είναι θετικά και

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \leq 1,$$

έχουμε και

$$\sum_{i \in S} \frac{1}{x_i} \leq 1.$$

Άρα

$$\frac{|S|}{m} \leq 1,$$

δηλαδή

$$|S| \leq m = |N(S)|.$$

Η συνθήκη Hall λοιπόν ισχύει για κάθε $S \subseteq X$. Συνεπώς το γράφημα G έχει ταίριασμα που καλύπτει όλες τις κορυφές του X . Αυτό σημαίνει ακριβώς ότι ο Άγιος Βασίλης μπορεί να δώσει σε κάθε παιδί ένα διαφορετικό δώρο που να αρέσει σε αυτό το παιδί.

11 (1) Θεωρούμε το συμπληρωματικό γράφημα $\overline{G}$. Τότε μια κλίκα του G είναι ακριβώς ένα ανεξάρτητο σύνολο του $\overline{G}$, άρα

$$\omega(G) = \alpha(\overline{G}).$$

Εφαρμόζουμε τώρα το θεώρημα Caro–Wei στο $\overline{G}$:

$$\alpha(\overline{G}) \geq \sum_{v \in V(G)} \frac{1}{d_{\overline{G}}(v) + 1}.$$

Αλλά για κάθε κορυφή v ,

$$d_{\overline{G}}(v) = n - 1 - d_G(v),$$

οπότε

$$d_{\overline{G}}(v) + 1 = n - d_G(v).$$

Επομένως

$$\omega(G) = \alpha(\overline{G}) \geq \sum_{v \in V(G)} \frac{1}{n - d_G(v)}.$$

Αυτό ακριβώς θέλαμε να δείξουμε.

(2) Θεωρούμε το γράφημα G με κορυφές τους 2011 επιστήμονες, όπου δύο κορυφές ενώνονται με ακμή αν και μόνον αν οι αντίστοιχοι επιστήμονες γνωρίζονται. Από την υπόθεση, για κάθε κορυφή v ισχύει

$$d(v) \geq 1509.$$

Εφαρμόζουμε το ερώτημα (1). Παίρνουμε

$$\omega(G) \geq \sum_{v \in V(G)} \frac{1}{2011 - d(v)}.$$

Επειδή $d(v) \geq 1509$, έχουμε

$$2011 - d(v) \leq 2011 - 1509 = 502,$$

και άρα

$$\frac{1}{2011 - d(v)} \geq \frac{1}{502} \quad \text{για κάθε } v.$$

Συνεπώς

$$\omega(G) \geq 2011 \cdot \frac{1}{502} = \frac{2011}{502} > 4.$$

Αφού το $\omega(G)$ είναι ακέραιος, συμπεραίνουμε ότι

$$\omega(G) \geq 5.$$

Άρα το γράφημα G περιέχει μια κλίκα 5 κορυφών. Δηλαδή υπάρχουν 5 επιστήμονες τέτοιοι ώστε κάθε ένας να γνωρίζει και τους άλλους 4.

12 (1) Έστω G ένα γράφημα χωρίς τρίγωνα με n κορυφές, και έστω Δ ο μέγιστος βαθμός του.

Θα διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

Περίπτωση 1: $\Delta \geq \sqrt{n}$. Έστω v κορυφή βαθμού Δ . Τότε το σύνολο γειτόνων της $N(v)$ είναι ανεξάρτητο.

Πράγματι, αν δύο κορυφές $x, y \in N(v)$ ήταν γειτονικές, τότε οι v, x, y θα σχημάτιζαν τρίγωνο, άτοπο.

Άρα

$$\alpha(G) \geq |N(v)| = \Delta \geq \sqrt{n}.$$

Περίπτωση 2: $\Delta < \sqrt{n}$. Εφαρμόζουμε το θεώρημα Caro–Wei:

$$\alpha(G) \geq \sum_{u \in V(G)} \frac{1}{d(u) + 1}.$$

Εφόσον για κάθε κορυφή u ισχύει $d(u) \leq \Delta$, παίρνουμε

$$\alpha(G) \geq \sum_{u \in V(G)} \frac{1}{\Delta + 1} = \frac{n}{\Delta + 1}.$$

Από την υπόθεση $\Delta < \sqrt{n}$, προκύπτει

$$\alpha(G) \geq \frac{n}{\sqrt{n} + 1}.$$

Τώρα, για κάθε $n \geq 1$, έχουμε $\sqrt{n} + 1 \leq 2\sqrt{n}$, άρα

$$\alpha(G) \geq \frac{n}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2}\sqrt{n}.$$

Συνεπώς και στις δύο περιπτώσεις

$$\alpha(G) \geq \frac{1}{2}\sqrt{n}.$$

Άρα το (1) αποδείχθηκε.

(2) Θα χρησιμοποιήσουμε τους αριθμούς Ramsey. Θυμίζουμε ότι $R(3, t)$ είναι ο ελάχιστος θετικός ακέραιος N με την ιδιότητα ότι κάθε γράφημα με N κορυφές περιέχει είτε τρίγωνο είτε ανεξάρτητο σύνολο μεγέθους t .

Θα δείξουμε πρώτα ότι

$$R(3, t) \leq \binom{t+1}{2} \quad \text{για κάθε } t \geq 1.$$

Πράγματι, από τη γνωστή αναδρομική σχέση Ramsey

$$R(3, t) \leq R(2, t) + R(3, t-1),$$

και επειδή $R(2, t) = t$, παίρνουμε

$$R(3, t) \leq t + R(3, t-1).$$

Με επαγωγή ως προς το t , αυτό δίνει

$$R(3, t) \leq 1 + 2 + \dots + t = \binom{t+1}{2}.$$

Τώρα έστω $c < \sqrt{2}$. Θέτουμε

$$t = \lfloor c\sqrt{n} \rfloor.$$

Αρκεί να δείξουμε ότι για όλα τα αρκετά μεγάλα n ισχύει

$$R(3, t) \leq n.$$

Από το προηγούμενο φράγμα αρκεί να ελέγξουμε ότι

$$\binom{t+1}{2} \leq n.$$

Επειδή $t \leq c\sqrt{n}$, έχουμε

$$\binom{t+1}{2} \leq \frac{(c\sqrt{n}+1)c\sqrt{n}}{2} = \frac{c^2}{2}n + \frac{c}{2}\sqrt{n}.$$

Εφόσον $c < \sqrt{2}$, ισχύει

$$\frac{c^2}{2} < 1.$$

Άρα για όλα τα αρκετά μεγάλα n ,

$$\frac{c^2}{2}n + \frac{c}{2}\sqrt{n} \leq n,$$

και συνεπώς

$$\binom{t+1}{2} \leq n.$$

Επομένως, για όλα τα αρκετά μεγάλα n ,

$$R(3, t) \leq n.$$

Τώρα, αν G είναι γράφημα χωρίς τρίγωνα με n κορυφές, τότε από τον ορισμό του $R(3, t)$ συμπεραίνουμε ότι το G περιέχει ανεξάρτητο σύνολο μεγέθους τουλάχιστον t . Άρα

$$\alpha(G) \geq t = \lfloor c\sqrt{n} \rfloor.$$

Για όλα τα αρκετά μεγάλα n , αυτό συνεπάγεται

$$\alpha(G) \geq c\sqrt{n} - 1.$$

Αν θέλουμε, μπορούμε απλώς να αντικαταστήσουμε το c με μια ελαφρώς μικρότερη σταθερά και να γράψουμε καθαρά ότι για κάθε $c < \sqrt{2}$ υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$,

$$\alpha(G) \geq c\sqrt{n}.$$

Ιδιαίτερα, επειδή

$$1.414 < \sqrt{2},$$

μπορούμε να πάρουμε

$$c = 1.414.$$