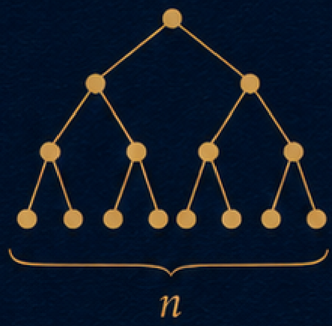
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

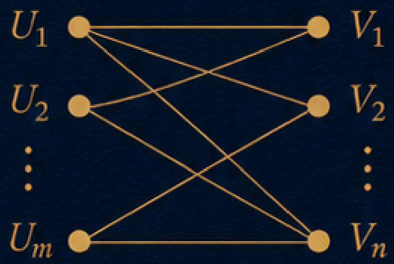


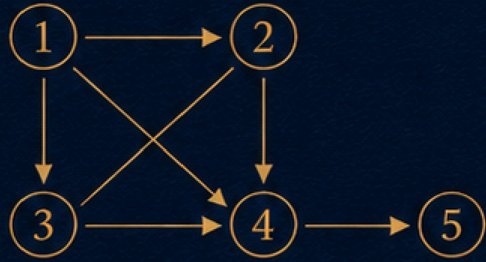
Διακριτά Μαθηματικά

Σημειώσεις από τις Διαλέξεις

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$
$$n \geq 2$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$





Σ. Μπραζιτίκος

Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Ηράκλειο, 2026

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

$$P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

1 Αρχή του Περιστερώνα

Ορισμός 1.1 (Πληθικός αριθμός). Ένα σύνολο S λέγεται πεπερασμένο αν υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ και $f : S \to \{1, \ldots, m\}$ η οποία είναι 1-1 και επί. Ο m λέγεται πληθάριθμος του S και θα τον συμβολίζομυε με $\#S$ ή $|S|$.

Πρόταση 1.2. *Έστω $f : A \to B$, όπου A, B πεπερασμένα σύνολα.*

a) Αν η f είναι 1-1, τότε $\#A \leq \#B$.

b) Αν η f είναι επί, τότε $\#A \geq \#B$.

Πόρισμα 1.3 (Αρχή Περιστερώνα). *Αν $f : A \to B$ και $\#A > \#B$, τότε η f **δεν** είναι 1-1. Άρα υπάρχουν $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$ τέτοια ώστε $f(x_1) = f(x_2)$.*

Γενικότερα, ισχύει το παρακάτω.

Πρόταση 1.4. *Έστω n, m, r θετικοί ακέραιοι με $n > rm$. Αν βάλουμε n μπάλες σε m κουτιά, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα κουτί με τουλάχιστον $r + 1$ μπάλες.*

Εφαρμογή 1. *Μεταξύ $m + 1$ ακεραίων, υπάρχουν δύο που η διαφορά τους διαιρείται με m.*

Απόδειξη. Έστω $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{m+1}\}$ το σύνολο των ακεραίων. Θεωρούμε τα υπόλοιπα της διαίρεσης του κάθε αριθμού με το m. Τα δυνατά υπόλοιπα είναι το σύνολο $B = \{0, 1, \ldots, m-1\}$. Επειδή το πλήθος των αριθμών $(m+1)$ είναι μεγαλύτερο από το πλήθος των δυνατών υπολοίπων (m), από την Αρχή του Περιστερώνα υπάρχουν τουλάχιστον δύο αριθμοί a_i, a_j που έχουν το ίδιο υπόλοιπο. Συνεπώς, $a_i \equiv a_j \pmod{m} \Rightarrow a_i - a_j = k \cdot m$, άρα η διαφορά τους διαιρείται με το m. □

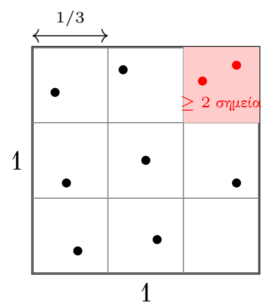
Εφαρμογή 2. *Σε μια συνάντηση m ατόμων, υπάρχουν δύο άτομα με το ίδιο πλήθος γνωστών.*

Απόδειξη. Έστω m άτομα. Ο αριθμός των γνωστών για κάθε άτομο μπορεί να είναι από 0 έως $m - 1$. Παρατηρούμε ότι δεν γίνεται να υπάρχει ταυτόχρονα άτομο με 0 γνωστούς και άτομο με $m - 1$ γνωστούς (αν κάποιος ξέρει όλους, δεν γίνεται κάποιος να μην ξέρει κανέναν). Άρα, οι δυνατές τιμές για το πλήθος των γνωστών είναι είτε $\{0, 1, \ldots, m - 2\}$ είτε $\{1, 2, \ldots, m - 1\}$. Σε κάθε περίπτωση, έχουμε m άτομα (περιστέρια) και $m - 1$ δυνατές τιμές πλήθους γνωστών (φωλιές). Από την Αρχή του Περιστερώνα, τουλάχιστον δύο άτομα θα έχουν το ίδιο πλήθος γνωστών. □

Εφαρμογή 3. *Δίνονται 10 σημεία στο εσωτερικό τετραγώνου πλευράς 1. Τότε υπάρχουν δύο από αυτά σε απόσταση μικρότερη από $0,48$. Επιπλέον, υπάρχουν 3 από αυτά που μπορούν να καλυφθούν από δίσκο ακτίνας $\frac{1}{2}$.*

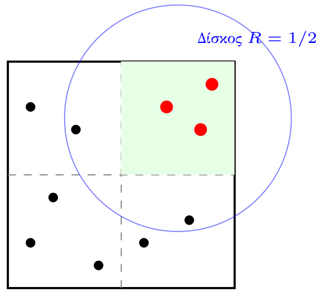
Απόδειξη. **Για την απόσταση**: Χωρίζουμε το τετράγωνο πλευράς 1 σε $3 \times 3 = 9$ ίσα μικρότερα τετράγωνα πλευράς $1/3$. Επειδή έχουμε 10 σημεία και 9 τετραγωνάκια, από την Αρχή του Περιστερώνα, τουλάχιστον 2 σημεία θα βρεθούν στο ίδιο μικρό τετράγωνο. Η μέγιστη απόσταση (διαγώνιος) μέσα στο μικρό τετράγωνο είναι:

$$d = \sqrt{(\frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{3})^2} = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3} < 0,48.$$



Σχήμα: 10 σημεία σε 9 τετράγωνα. Ένα κουτί έχει κόκκινο χρώμα και περιέχει 2 σημεία.

Για τον δίσκο ακτίνας 1/2: Ο δίσκος ακτίνας $1/2$ έχει διάμετρο 1. Ένα τετράγωνο πλευράς 1 μπορεί να καλυφθεί οριακά από κύκλο διαμέτρου $\sqrt{2} \approx 1.41$, οπότε χρειάζεται προσοχή στη διατύπωση. Ωστόσο, μια πιο απλή προσέγγιση για το δεύτερο σκέλος (κάλυψη 3 σημείων). Αν χωρίσουμε το τετράγωνο σε 4 ίσα τετράγωνα πλευράς $1/2$, τότε με 10 σημεία, από την γενικευμένη Αρχή Περιστερώνα ($\lceil 10/4 \rceil = 3$), θα υπάρχουν τουλάχιστον 3 σημεία στο ίδιο τετράγωνο πλευράς $1/2$.



Χωρίζοντας σε 4 κουτιά, με 10 σημεία,
τουλάχιστον ένα έχει $\lceil 10/4 \rceil = 3$ σημεία.

Ένα τετράγωνο πλευράς $1/2$ έχει διαγώνιο $\sqrt{2}/2 \approx 0.707$, άρα καλύπτεται άνετα από δίσκο ακτίνας $1/2$ (που έχει διάμετρο 1). □

Εφαρμογή 4. *Τα τελευταία 1000 χρόνια, καθένας μας είχε έναν πρόγονο A, ώστε υπάρχει άτομο P που ήταν πρόγονος και του πατέρα και της μητέρας του A.*

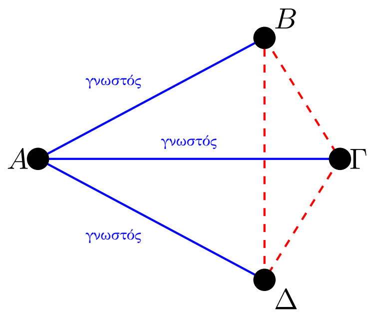
Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι μια γενιά είναι περίπου 30 χρόνια, άρα σε 1000 χρόνια έχουμε περίπου 33 γενιές. Αν όλοι οι πρόγονοι ήταν διαφορετικοί, πριν από n γενιές θα είχαμε 2^n προγόνους. Για $n = 33$, $2^{33} \approx 8.5$ δισεκατομμύρια, αριθμός που υπερβαίνει τον πληθυσμό της Γης εκείνη την εποχή (και σίγουρα τον πληθυσμό της περιοχής καταγωγής). Άρα, αναγκαστικά υπάρχουν επικαλύψεις στο γενεαλογικό δέντρο, δηλαδή άτομα που εμφανίζονται ως πρόγονοι από διαφορετικά κλαδιά (αιμομιξία σε μακρινό βαθμό). □

Εφαρμογή 5. *Σε κάθε πεντάγωνο με ακέραιες συντεταγμένες υπάρχει σημείο στο εσωτερικό του ή στην περίμετρό του με ακέραιες συντεταγμένες.*

Απόδειξη. Οι συντεταγμένες (x, y) μιας κορυφής μπορεί να είναι (άρτιος, άρτιος), (άρτιος, περιττός), (περιττός, άρτιος) ή (περιττός, περιττός). Υπάρχουν δηλαδή 4 δυνατοί συνδυασμοί. Ένα πεντάγωνο έχει 5 κορυφές. Από την Αρχή του Περιστερώνα, τουλάχιστον δύο κορυφές, έστω $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$, έχουν τον ίδιο συνδυασμό. Τότε, τα αθροίσματα $x_1 + x_2$ και $y_1 + y_2$ είναι άρτιοι αριθμοί. Το μέσον M του τμήματος AB έχει συντεταγμένες $(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$, οι οποίες θα είναι ακέραιοι αριθμοί. □

Εφαρμογή 6. *Σε κάθε εξάδα ατόμων μπορούμε να βρούμε είτε τριάδα γνωστών είτε τριάδα αγνώστων.*

Απόδειξη. Θεωρούμε ένα άτομο A. Από τα υπόλοιπα 5 άτομα, τουλάχιστον 3 έχουν την ίδια σχέση με το A (Αρχή Περιστερώνα: 5 αντικείμενα, 2 κουτιά). Έστω ότι το A έχει 3 γνωστούς (B, Γ, Δ).



Αν μία από τις διακεκομμένες ήταν μπλε, σχηματίζεται **μπλε τρίγωνο**. Αν όλες παραμένουν κόκκινες, σχηματίζεται **κόκκινο τρίγωνο** ($B\Gamma\Delta$).

□

Εφαρμογή 7. *Αν πάρουμε 19 αριθμούς από την αριθμητική πρόοδο* $1, 4, \ldots, 100$, *υπάρχουν δύο με άθροισμα 104.*

Απόδειξη. Η πρόοδος είναι $a_n = 3n - 2$. Το 100 είναι ο 34ος όρος ($3 \cdot 34 - 2 = 100$). Το σύνολο S έχει 34 στοιχεία. Ζητάμε ζεύγη με άθροισμα 104. Θεωρούμε τα ζεύγη:

$$\{4, 100\},\ \{7, 97\}, \ldots, \{49, 55\}.$$

Γενικά τα ζεύγη είναι της μορφής $\{k, 104 - k\}$. Επίσης, παρατηρούμε ότι από τους 34 αριθμούς της προόδου:
- Ο αριθμός 1 δεν έχει ταίρι στο σύνολο (θα ήθελε το 103).
- Ο αριθμός 52 δεν έχει ταίρι (θα ήθελε το 52, αλλά παίρνουμε διακριτούς αριθμούς).

Τα υπόλοιπα 32 νούμερα σχηματίζουν 16 ζεύγη με άθροισμα 104.
Δημιουργούμε τις "φωλιές" ως εξής: 16 φωλιές για τα ζεύγη, 1 φωλιά για το $\{1\}$ και 1 φωλιά για το $\{52\}$. Σύνολο 18 φωλιές. Επιλέγουμε 19 αριθμούς (περιστέρια). Από την Αρχή του Περιστερώνα, θα επιλεγούν αναγκαστικά και οι δύο αριθμοί από τουλάχιστον μία φωλιά ζεύγους (αφού οι φωλιές των μονών αριθμών χωράνε μόνο 1). Άρα θα έχουμε άθροισμα 104. □

2 Βασικές Αρχές Απαρίθμησης

Προσθετική Αρχή

Αν $A_1, \ldots, A_n$ πεπερασμένα ξένα ανά δύο, τότε:

$$\#\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} \#A_i$$

Πολλαπλασιαστική Αρχή

Έστω ότι μια διαδικασία μπορεί να χωριστεί σε k διαδοχικά στάδια. Αν το 1ο στάδιο μπορεί να ολοκληρωθεί με n_1 τρόπους, το 2ο στάδιο με n_2 τρόπους, ..., και το k-οστό στάδιο με n_k τρόπους, τότε το πλήθος των συνολικών τρόπων με τους οποίους μπορεί να πραγματοποιηθεί η διαδικασία είναι:

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot \cdots \cdot n_k.$$

Εφαρμογή 8. *Ένα εστιατόριο προσφέρει 3 είδη ορεκτικών, 5 κυρίως πιάτα και 2 επιδόρπια. Με πόσους τρόπους μπορεί ένας πελάτης να σχηματίσει ένα πλήρες γεύμα;*

Απόδειξη. Σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή, έχουμε 3 στάδια επιλογής:

- 1ο στάδιο (Ορεκτικό): $n_1 = 3$ επιλογές
- 2ο στάδιο (Κυρίως): $n_2 = 5$ επιλογές
- 3ο στάδιο (Επιδόρπιο): $n_3 = 2$ επιλογές

Το συνολικό πλήθος των διαφορετικών γευμάτων είναι:

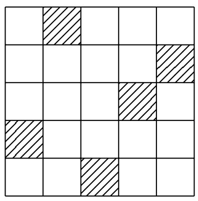
$$3 \cdot 5 \cdot 2 = 30 \text{ τρόποι.}$$

□

Πρόταση 2.1. *Αν $A_1, A_2, \ldots, A_k$ είναι πεπερασμένα σύνολα, τότε ο πληθικός αριθμός του καρτεσιανού γινομένου τους είναι το γινόμενο των πληθικών τους αριθμών:*

$$\#(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k) = \#A_1 \cdot \#A_2 \cdot \cdots \cdot \#A_k$$

Με πόσους τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν n όμοια πιόνια σε μια $n \times n$ σκακιέρα μη αλληλεπιδρώμενα (να μην απειλεί το ένα το άλλο, δηλαδή σε διαφορετικές γραμμές και στήλες); Απάντηση: $n!$. (Η n πύργοι).
Ερώτηση: Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε ένα μαύρο και ένα άσπρο πιόνι αν δεν θέλουμε να είναι σε ίδια γραμμή ή στήλη (σε σκακιέρα 8×8);
Απάντηση: Το πλήθος των αναδιατάξεων είναι $n!$. Ίδιο με τις μη αλληλεπιδρώμενες.
Συγκεκριμένα για την επιλογή 2 πιονιών: Το πρώτο μπαίνει σε 64 θέσεις. Το δεύτερο έχει αποκλειστεί από 1 γραμμή και 1 στήλη (15 θέσεις), άρα $64 - 15 = 49$. 64×49. (Σημείωση: Το κείμενο αναφέρεται γενικά σε αναδιατάξεις $n!$, πιθανώς αναφερόμενο στην τοποθέτηση n πύργων).



Σχήμα: Αντιστοιχία πλέγματος με μετάθεση $(2, 5, 1, 3, 4)$.

Άσκηση 1. *Θέτουμε*

$$X = \{1, 2, \ldots, 200\}$$

και ορίζουμε το σύνολο

$$S = \{(a, b, c) \in X^3 \ : \ a < b \text{ και } a < c\}.$$

Πόσα στοιχεία έχει το S;

Απόδειξη. Η συνθήκη $a < b$ και $a < c$ σημαίνει ότι το a είναι αυστηρά μικρότερο από *και* το b *και* το c. Παρατηρούμε πρώτα ότι δεν μπορεί να είναι $a = 200$, διότι τότε δεν υπάρχει κανένα $b \in X$ με $b > 200$, ούτε κανένα $c \in X$ με $c > 200$. Άρα αναγκαστικά

$$a \in \{1, 2, \ldots, 199\}.$$

Θα διασπάσουμε το S σε ξένα μεταξύ τους υποσύνολα, ανάλογα με την τιμή του a. Για κάθε $k \in \{1, 2, \ldots, 199\}$ ορίζουμε

$$A_k = \{(a, b, c) \in S : \ a = k\}.$$

Τότε τα A_k είναι ξένα ανά δύο και

$$S = \bigsqcup_{k=1}^{199} A_k \quad \Longrightarrow \quad |S| = \sum_{k=1}^{199} |A_k|$$

(αρχή πρόσθεσης).

Σταθεροποιούμε τώρα το $a = k$. Τότε η ανισότητα $a < b$ ισοδυναμεί με $b \in \{k+1, k+2, \dots, 200\}$, άρα υπάρχουν $200 - k$ επιλογές για το b. Ομοίως, από $a < c$ έχουμε $c \in \{k+1, k+2, \dots, 200\}$, άρα υπάρχουν $200 - k$ επιλογές και για το c. Οι επιλογές του b και του c είναι ανεξάρτητες (δεν υπάρχει περιορισμός μεταξύ τους· επιτρέπεται ακόμη και $b = c$), οπότε

$$|A_k| = (200-k)(200-k) = (200-k)^2.$$

Άρα

$$|S| = \sum_{k=1}^{199} (200-k)^2.$$

Θέτοντας $m = 200 - k$, όταν $k = 1$ παίρνουμε $m = 199$ και όταν $k = 199$ παίρνουμε $m = 1$, άρα

$$|S| = \sum_{m=1}^{199} m^2.$$

Χρησιμοποιούμε τον γνωστό τύπο

$$\sum_{m=1}^{n} m^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

με $n = 199$, και βρίσκουμε

$$|S| = \frac{199 \cdot 200 \cdot 399}{6} = \frac{15{,}880{,}200}{6} = 2{,}646{,}700.$$

Άρα το σύνολο S έχει $\boxed{2{,}646{,}700}$ στοιχεία. □

Άσκηση 2. *Πόσοι θετικοί ακέραιοι τετραψήφιοι αριθμοί έχουν* τουλάχιστον *ένα ψηφίο που είναι 2 ή 3;*

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε την *αρχή του συμπληρώματος*.

Βήμα 1: Μετράμε όλους τους τετραψήφιους θετικούς ακεραίους. Ένας τετραψήφιος αριθμός έχει μορφή $\overline{abcd}$, όπου $a \in \{1, 2, \dots, 9\}$ και $b, c, d \in \{0, 1, \dots, 9\}$. Άρα ο συνολικός αριθμός τετραψήφιων θετικών ακεραίων είναι

$$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000.$$

Βήμα 2: Μετράμε πόσοι *δεν* έχουν κανένα ψηφίο ίσο με 2 ή 3. Δηλαδή, θέλουμε τετραψήφιους $\overline{abcd}$ τέτοιους ώστε

$$a \notin \{2,3\}, \qquad b \notin \{2,3\}, \qquad c \notin \{2,3\}, \qquad d \notin \{2,3\}.$$

Για το πρώτο ψηφίο a επιτρέπονται οι τιμές $1, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, δηλαδή 7 επιλογές. Για καθένα από τα b, c, d επιτρέπονται όλα τα ψηφία $0, 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, δηλαδή 8 επιλογές (αφαιρούμε τα 2 και 3 από τα 10 ψηφία).

Επομένως, ο αριθμός των τετραψήφιων που *δεν* περιέχουν κανένα 2 ή 3 είναι

$$7 \cdot 8^3 = 7 \cdot 512 = 3584.$$

Βήμα 3: Αφαιρούμε από το σύνολο. Άρα οι τετραψήφιοι που έχουν *τουλάχιστον ένα* ψηφίο ίσο με 2 ή 3 είναι

$$9000 - 3584 = 5416.$$

Συνεπώς, η απάντηση είναι $\boxed{5416}$. □

Άσκηση 3. *Έστω $n \geq 2$ θετικός ακέραιος με*

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k},$$

όπου $p_1, \ldots, p_k$ είναι διαφορετικοί *πρώτοι αριθμοί και $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ θετικοί ακέραιοι. Πόσους θετικούς διαιρέτες έχει ο n;*

Απόδειξη. Θυμίζουμε ότι ένας θετικός ακέραιος d λέγεται *διαιρέτης* του n αν και μόνο αν $d \mid n$, δηλαδή αν υπάρχει ακέραιος q ώστε $n = dq$.

Ιδέα: Κάθε διαιρέτης d του n προκύπτει επιλέγοντας πόσες φορές θα εμφανίζεται κάθε πρώτος p_i στον d, με εκθέτη από 0 μέχρι α_i.

Ακριβέστερα: Έστω d θετικός διαιρέτης του n. Στην πρώιμη παραγοντοποίηση του d μπορούν να εμφανίζονται μόνο οι πρώτοι $p_1, \ldots, p_k$ (αφού αν κάποιος άλλος πρώτος r διαιρούσε το d, τότε θα διαιρούσε και το n, άτοπο). Άρα ο d γράφεται μοναδικά στη μορφή

$$d = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}$$

με $\beta_i \geq 0$ ακέραιους.

Επειδή $d \mid n$, για κάθε i πρέπει να ισχύει $\beta_i \leq \alpha_i$: αν είχαμε $\beta_i > \alpha_i$, τότε ο $p_i^{\beta_i}$ θα διαιρούσε τον d και άρα και τον n, όμως αυτό είναι αδύνατο αφού στον n ο p_i εμφανίζεται μόνο με δύναμη α_i. Συνεπώς

$$0 \leq \beta_i \leq \alpha_i \quad \text{για κάθε } i = 1, 2, \ldots, k.$$

Μετράμε τις επιλογές:

- Για τον β_1 έχουμε $\alpha_1 + 1$ επιλογές: $0, 1, 2, \ldots, \alpha_1$.
- Για τον β_2 έχουμε $\alpha_2 + 1$ επιλογές: $0, 1, 2, \ldots, \alpha_2$.
- ...
- Για τον β_k έχουμε $\alpha_k + 1$ επιλογές.

Οι επιλογές αυτές είναι ανεξάρτητες, άρα από τον κανόνα του γινομένου ο συνολικός αριθμός δυνατών k-άδων $(\beta_1, \ldots, \beta_k)$ (και άρα διαιρετών d) είναι

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1).$$

Άρα ο n έχει ακριβώς

$$\boxed{(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)}$$

θετικούς διαιρέτες.

Παράδειγμα: Για $n = 20$ έχουμε $20 = 2^2 \cdot 5^1$. Άρα το πλήθος των διαιρετών είναι $(2+1)(1+1) = 6$. Πράγματι οι θετικοί διαιρέτες είναι

$$1, 2, 4, 5, 10, 20.$$

□

Τέσσερις εκδοχές για παγωτά

Υποθέτουμε ότι υπάρχουν n διαθέσιμες γεύσεις και θέλουμε να φτιάξουμε επιλογές με k μπάλες.

- **Χωνάκι**: οι μπάλες έχουν *σειρά* (άρα οι διατάξεις διακρίνονται).
- **κυπελλάκι**: η σειρά *δεν* έχει σημασία (άρα μετράμε σύνολα/πολυσύνολα γεύσεων).

1) (Opening Day) Χωνάκι, επιτρέπονται επαναλήψεις

Άσκηση 4. *Πόσα διαφορετικά χωνάκια με k μπάλες μπορούν να φτιαχτούν από n γεύσεις, αν επιτρέπονται επαναλήψεις (δηλ. μπορεί να επιλεγεί η ίδια γεύση πολλές φορές) και η σειρά των μπαλών στο χωνάκι μετράει;*

Απόδειξη. Για κάθε μία από τις k θέσεις επιλέγουμε μία από τις n γεύσεις, ανεξάρτητα. Άρα, με τον κανόνα του γινομένου,

$$\underbrace{n \cdot n \cdots n}_{k \text{ φορές}} = n^k.$$

□

2) (Second Day) Χωνάκι, δεν επιτρέπονται επαναλήψεις

Άσκηση 5. *Πόσα διαφορετικά χωνάκια με k μπάλες μπορούν να φτιαχτούν από n γεύσεις, αν δεν επιτρέπονται επαναλήψεις (κάθε γεύση το πολύ μία φορά) και η σειρά των μπαλών στο χωνάκι μετράει; (Υποθέτουμε $k \leq n$.)*

Απόδειξη. Για την 1η θέση έχουμε n επιλογές, για τη 2η $n-1$, ..., για την k-οστή $n-k+1$. Άρα

$$n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

□

Ημέρα 3: *αδιάκριτες* μπάλες (δεν έχει σημασία η σειρά), *δεν* επιτρέπονται επαναλήψεις γεύσης

Ύστερα από δύο μέρες συνεχούς εξυπηρέτησης με χωνάκια, οι υπάλληλοι χρειάζονται ένα διάλειμμα. Την 3η μέρα κρατάμε τον περιορισμό «καμία γεύση πάνω από μία φορά», αλλά αντικαθιστούμε τα χωνάκια με *κυπελλάκια*. Τα κυπελλάκια είναι αρκετά μεγάλα ώστε η σειρά των μπαλών να μην έχει σημασία: ένα κυπελλάκι με chocolate και vanilla μετράει *μία* φορά, ανεξάρτητα από το ποια γεύση "είναι από πάνω". Με αυτούς τους κανόνες, πόσα διαφορετικά κυπελλάκια των k μπαλών υπάρχουν;

Απόδειξη. Θα συμβολίσουμε την απάντηση με $\binom{n}{k}$ (διαβάζεται «n choose k»): δηλαδή $\binom{n}{k}$ είναι ο αριθμός των διαφορετικών κυπελλακίων που παίρνουμε διαλέγοντας k μπάλες από n γεύσεις, χωρίς να επαναλαμβάνεται γεύση.

Θυμόμαστε την Ημέρα 2: εκεί δεν επιτρέπαμε επαναλήψεις *αλλά* η σειρά μετρούσε, οπότε είχαμε συνολικά

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

διαφορετικά χωνάκια.

Τώρα, πάρε ένα συγκεκριμένο κυπελλάκι με k μπάλες, όλες διαφορετικών γεύσεων. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να βάλουμε αυτές τις k μπάλες σε χωνάκι (όπου η σειρά μετράει); Αυτό είναι απλώς μια μετάθεση των k διακριτών γεύσεων, άρα υπάρχουν $k!$ τρόποι.

Άρα: (α) πρώτα διαλέγουμε το κυπελλάκι (δηλ. το σύνολο των k γεύσεων) με $\binom{n}{k}$ τρόπους και (β) μετά διατάσσουμε τις k γεύσεις στο χωνάκι με $k!$ τρόπους. Επομένως

$$\binom{n}{k} \cdot k! \;=\; \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Άρα

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Το $\binom{n}{k}$ ονομάζεται *διωνυμικός συντελεστής*. □

Ημέρα 4: *αδιάκριτες μπάλες (δεν έχει σημασία η σειρά), επιτρέπονται επαναλήψεις γεύσης*

Την τελευταία μέρα, το κατάστημα αφαιρεί τον περιορισμό και επιτρέπει να πάρουμε όσες μπάλες θέλουμε από μια γεύση. Υπάρχουν ακόμα n γεύσεις. Πόσα k-μπαλα κυπελλάκια υπάρχουν;

Είναι δελεαστικό να σκεφτούμε «από την Ημέρα 1 είχαμε n^k χωνάκια και τώρα δεν μας νοιάζει η σειρά, άρα να διαιρέσουμε με $k!$». Όμως αυτό είναι λάθος: το $k!$ μετράει διατάξεις *διαφορετικών* αντικειμένων. Αν υπάρχουν επαναλήψεις, δεν αντιστοιχούν $k!$ διαφορετικά χωνάκια στην ίδια επιλογή γεύσεων (π.χ. όταν όλες οι μπάλες είναι ίδια γεύση, υπάρχει μόνο *ένα* χωνάκι, άρα η διαίρεση με $k!$ δεν βγάζει νόημα).

Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο *αστέρια και μπάρες* (stars and bars). Χρησιμοποιούμε k αστέρια, κάθε ένα αντιστοιχεί σε μία μπάλα παγωτού, και $n-1$ μπάρες ως διαχωριστικά ανάμεσα στις γεύσεις. Όσα αστέρια εμφανίζονται πριν από την 1η μπάρα είναι μπάλες της 1ης γεύσης, όσα είναι ανάμεσα στην 1η και 2η μπάρα είναι της 2ης, κ.ο.κ. Έτσι επιτρέπεται και «πολλές μπάλες της ίδιας γεύσης» (πολλά αστέρια ανάμεσα σε δύο μπάρες) και «καμία μπάλα μιας γεύσης» (δύο μπάρες κολλητά).

Παράδειγμα: για 3 γεύσεις coffee, mint chip, chocolate και $k = 5$, το κυπελλάκι με 2 coffee, 2 mint chip, 1 chocolate γράφεται ως

$$\underbrace{**}_{coffee} \;\Big|\; \underbrace{**}_{mintchip} \;\Big|\; \underbrace{*}_{chocolate}.$$

Δύο μπάρες αρκούν για 3 γεύσεις.

Για παράδειγμα, τα διαγράμματα

$$****\,|\,**\,|\,*** \qquad \text{και} \qquad *\,||\,**$$

αντιστοιχούν αντίστοιχα σε

$$\underbrace{****}_{coffee} \Big| \underbrace{**}_{mintchip} \Big| \underbrace{***}_{chocolate} \qquad \text{και} \qquad \underbrace{*}_{coffee} \Big| \underbrace{\quad}_{mintchip} \Big| \underbrace{**}_{chocolate},$$

δηλαδή στο πρώτο έχουμε 4 μπάλες coffee, 2 mint chip, 3 chocolate, ενώ στο δεύτερο 1 coffee, 0 mint chip, 2 chocolate.

Γενικά, για να χωρίσουμε σε n περιοχές (γεύσεις) χρειαζόμαστε $n-1$ μπάρες και για k μπάλες χρειαζόμαστε k αστέρια. Άρα έχουμε συνολικά $n+k-1$ θέσεις που θα γεμίσουν με k αστέρια και $n-1$ μπάρες. Επιλέγουμε ποιες k από αυτές τις $n+k-1$ θέσεις θα καταληφθούν από αστέρια (τα αστέρια είναι όμοια, άρα η σειρά δεν μετράει), οπότε έχουμε

$$\binom{n+k-1}{k}$$

διαφορετικές διατάξεις *αστεριών και μπαρών*. Κάθε τέτοια διάταξη αντιστοιχεί μοναδικά σε ένα κυπελλάκι, και αντίστροφα. Άρα ο αριθμός των k-μπαλων κυπελλακίων, όταν επιτρέπονται επαναλήψεις γεύσης, είναι

$$\boxed{\binom{n+k-1}{k}}.$$

Άσκηση 6. *Έχουμε 3 γεύσεις παγωτού: βανίλια, σοκολάτα και φράουλα. Θέλουμε να φτιάξουμε ένα χωνάκι με συνολικά k μπάλες, έτσι ώστε*

v μπάλες να είναι βανίλια, $\quad$ c μπάλες να είναι σοκολάτα, $\quad$ s μπάλες να είναι φράουλα,

όπου $v, c, s \geq 0$ και $v + c + s = k$. Πόσα διαφορετικά χωνάκια υπάρχουν (δηλαδή πόσες διαφορετικές σειρές γεύσεων μήκους k με αυτές τις πληθικότητες);

Απόδειξη. Οι k μπάλες στο χωνάκι έχουν θέσεις (κάτω–πάνω), άρα η σειρά μετράει. Θα επιλέξουμε σε ποιες θέσεις μπαίνει κάθε γεύση.

Πρώτα διαλέγουμε ποιες v από τις k θέσεις θα είναι βανίλια: αυτό γίνεται με

$$\binom{k}{v}$$

τρόπους.

Απομένουν $k - v$ θέσεις. Από αυτές διαλέγουμε ποιες c θα είναι σοκολάτα: αυτό γίνεται με

$$\binom{k-v}{c}$$

τρόπους.

Οι υπόλοιπες θέσεις είναι αναγκαστικά φράουλα, και είναι

$$k - v - c = s$$

θέσεις.

Άρα, με τον κανόνα του γινομένου,

$$\binom{k}{v}\binom{k-v}{c} = \frac{k!}{v!(k-v)!} \cdot \frac{(k-v)!}{c!\,s!} = \frac{k!}{v!\,c!\,s!}.$$

Επομένως ο αριθμός των χωνάκων είναι

$$\boxed{\frac{k!}{v!\,c!\,s!}}.$$

□

Άσκηση 7. *Ένας φοιτητής Ιατρικής πρέπει να εργαστεί σε ένα νοσοκομείο για 5 ημέρες μέσα στον Ιανουάριο (ο Ιανουάριος έχει 31 ημέρες). Δεν επιτρέπεται να εργαστεί δύο διαδοχικές ημέρες. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να επιλέξει τις 5 ημέρες εργασίας του;*

Ας γράψουμε τις ημέρες που επιλέγει (σε αύξουσα σειρά) ως

$$1 \leq a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 \leq 31.$$

Ο περιορισμός «όχι δύο διαδοχικές ημέρες» ισοδυναμεί με

$$a_{i+1} \geq a_i + 2 \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Θέτουμε τώρα

$$b_i := a_i - (i-1) \qquad (i = 1,2,3,4,5).$$

Τότε για κάθε $i = 1,2,3,4$ έχουμε

$$b_{i+1} - b_i = \big(a_{i+1} - i\big) - \big(a_i - (i-1)\big) = (a_{i+1} - a_i) - 1 \geq 1,$$

άρα

$$b_1 < b_2 < b_3 < b_4 < b_5.$$

Επίσης, από $a_1 \geq 1$ παίρνουμε $b_1 \geq 1$, ενώ από $a_5 \leq 31$ παίρνουμε

$$b_5 = a_5 - 4 \leq 31 - 4 = 27.$$

Άρα η 5-άδα $(b_1, \dots, b_5)$ είναι απλώς επιλογή 5 διαφορετικών αριθμών από το σύνολο $\{1, 2, \dots, 27\}$.

Αντίστροφα, αν πάρουμε οποιαδήποτε $1 \leq b_1 < b_2 < b_3 < b_4 < b_5 \leq 27$ και ορίσουμε

$$a_i := b_i + (i-1),$$

τότε $1 \leq a_1 < \cdots < a_5 \leq 31$ και

$$a_{i+1} - a_i = (b_{i+1} - b_i) + 1 \geq 2,$$

άρα οι a_i δεν είναι διαδοχικοί. Επομένως έχουμε μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των επιτρεπτών επιλογών ημερών και των 5-υποσυνόλων του $\{1, \dots, 27\}$.

Συνεπώς ο αριθμός των τρόπων είναι

$$\binom{27}{5}.$$

Αριθμητικά,

$$\binom{27}{5} = \frac{27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23}{5!} = \frac{9\,687\,600}{120} = 80\,730.$$

Άρα οι τρόποι είναι $\boxed{\binom{27}{5} = 80\,730}$.

Άσκηση 8. *Σε N καρέκλες τοποθετημένες σε μια σειρά, θέλουμε να καθίσουν k διακριτοί μαθητές, με την προϋπόθεση ότι κάθε καρέκλα χωράει το πολύ έναν μαθητή. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να καθίσουν;*

Απόδειξη. Η διαδικασία γίνεται σε δύο ανεξάρτητα βήματα.

Βήμα 1: Επιλογή των k καρεκλών που θα καταληφθούν. Επιλέγουμε k καρέκλες από τις N:

$$\binom{N}{k} \text{ τρόποι.}$$

Βήμα 2: Ανάθεση των μαθητών στις επιλεγμένες καρέκλες. Αφού έχουν επιλεγεί οι k καρέκλες, οι k διακριτοί μαθητές μπορούν να τοποθετηθούν σε αυτές με $k!$ τρόπους (όλες οι μεταθέσεις).

Άρα συνολικά οι τρόποι είναι

$$\boxed{\binom{N}{k} k!}.$$

Ισοδύναμα, αυτό είναι ο αριθμός των διατάξεων k στοιχείων από N, δηλαδή

$$\binom{N}{k} k! = \frac{N!}{(N-k)!}.$$

□

Άσκηση 9. *Σε N καρέκλες τοποθετημένες σε μια σειρά κάθονται k διακεκριμένοι μαθητές (κάθε καρέκλα χωράει το πολύ έναν μαθητή). Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν, ώστε κανένας μαθητής να μην κάθεται ακριβώς δίπλα σε άλλον;*

Απόδειξη. **Βήμα 1: Επιλογή των θέσεων.** Αρχικά αγνοούμε *ποιος* κάθεται πού και μετράμε μόνο *ποιες* k καρέκλες θα καταληφθούν, με την προϋπόθεση να μην είναι γειτονικές. Αν οι επιλεγμένες θέσεις είναι

$$1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_k \leq N,$$

η συνθήκη «όχι γειτονικές» ισοδυναμεί με $a_{i+1} \geq a_i + 2$ για $i = 1, \ldots, k-1$. Θέτουμε $b_i := a_i - (i-1)$. Τότε $1 \leq b_1 < b_2 < \cdots < b_k \leq N - k + 1$. Άρα οι τρόποι επιλογής των θέσεων είναι

$$\binom{N-k+1}{k}.$$

Βήμα 2: Ανάθεση μαθητών στις θέσεις. Αφού επιλεγούν οι k θέσεις, οι k διακριτοί μαθητές μπορούν να τοποθετηθούν σε αυτές με $k!$ τρόπους.

Άρα συνολικά οι τρόποι είναι

$$\boxed{\binom{N-k+1}{k} k!}.$$

□

Δεύτερος Τρόπος. Θεωρούμε πρώτα μόνο *ποιες* καρέκλες καταλαμβάνονται.

Για να μη κάθονται δύο μαθητές δίπλα-δίπλα, ανάμεσα σε κάθε δύο *διαδοχικούς* (από αριστερά προς τα δεξιά) μαθητές πρέπει να υπάρχει τουλάχιστον μία άδεια καρέκλα. Άρα δεσμεύουμε προκαταβολικά $k-1$ άδειες καρέκλες, μία ανάμεσα σε κάθε ζεύγος μαθητών, σχηματίζοντας το πρότυπο

$$M \,\square\, M \,\square \cdots \square\, M,$$

που περιέχει k μαθητές και $k-1$ δεσμευμένες άδειες καρέκλες, άρα καταλαμβάνει συνολικά $2k-1$ καρέκλες.

Αν $N < 2k-1$, δεν υπάρχει καμία διάταξη. Υποθέτουμε λοιπόν $N \geq 2k-1$. Τότε οι συνολικές άδειες καρέκλες είναι $N-k$, από τις οποίες έχουμε ήδη δεσμεύσει $k-1$. Επομένως απομένουν

$$r = (N-k) - (k-1) = N - 2k + 1$$

ελεύθερες άδειες καρέκλες που μπορούμε να τοποθετήσουμε οπουδήποτε κάποιον μαθητή.

Οι r αυτές άδειες καρέκλες μοιράζονται σε $k+1$ "θήκες": πριν από τον πρώτο μαθητή, ανάμεσα σε κάθε ζεύγος μαθητών (επιπλέον πάνω από την ήδη δεσμευμένη άδεια), και μετά τον τελευταίο μαθητή. Αυτό γίνεται με συνδυασμούς με επανάληψη, όπως ακριβώς την τέταρτη ημέρα με τα παγωτά. Το πλήθος είναι

$$\binom{r+k+1-1}{k} = \binom{N-2k+1+k}{k} = \binom{N-k+1}{k}.$$

Άρα αυτός είναι ο αριθμός τρόπων επιλογής των k θέσεων.

Τέλος, αν οι k μαθητές είναι *διακριτοί*, τότε για κάθε επιλογή θέσεων μπορούν να καθίσουν με $k!$ τρόπους. Συνεπώς ο συνολικός αριθμός καθισμάτων είναι

$$\boxed{\binom{N-k+1}{k} k!}.$$

□

Άσκηση 10. *Σε κυκλικό τραπέζι με $n = 10$ θέσεις κάθονται $k = 3$ διακριτοί μαθητές, ώστε κανένας να μην κάθεται δίπλα σε άλλον (και η θέση 10 είναι γειτονική με τη θέση 1). Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν;*

Απόδειξη. Μετράμε πρώτα τις *επιλογές θέσεων* και στο τέλος πολλαπλασιάζουμε επί $k!$.

Χωρίζουμε σε δύο περιπτώσεις ανάλογα με το αν η θέση 1 είναι κενή ή κατειλημμένη.

Περίπτωση Α: Η θέση 1 είναι *κενή*. Τότε οι θέσεις $2, 3, \dots, 10$ σχηματίζουν γραμμή 9 θέσεων και θέλουμε 3 μη-γειτονικές:

$$\binom{9-3+1}{3} = \binom{7}{3} = 35.$$

Περίπτωση Β: Η θέση 1 είναι *κατειλημμένη*. Τότε οι θέσεις 2 και 10 αποκλείονται. Μένουν οι $3, 4, \dots, 9$ (γραμμή 7 θέσεων) και πρέπει να διαλέξουμε ακόμη 2 μη-γειτονικές:

$$\binom{7-2+1}{2} = \binom{6}{2} = 15.$$

Άρα οι επιλογές θέσεων είναι $35 + 15 = 50$. Τέλος, για κάθε επιλογή θέσεων οι 3 διακριτοί μαθητές κάθονται με $3! = 6$ τρόπους. Συνεπώς οι συνολικοί τρόποι είναι

$$\boxed{50 \cdot 3! = 300}.$$

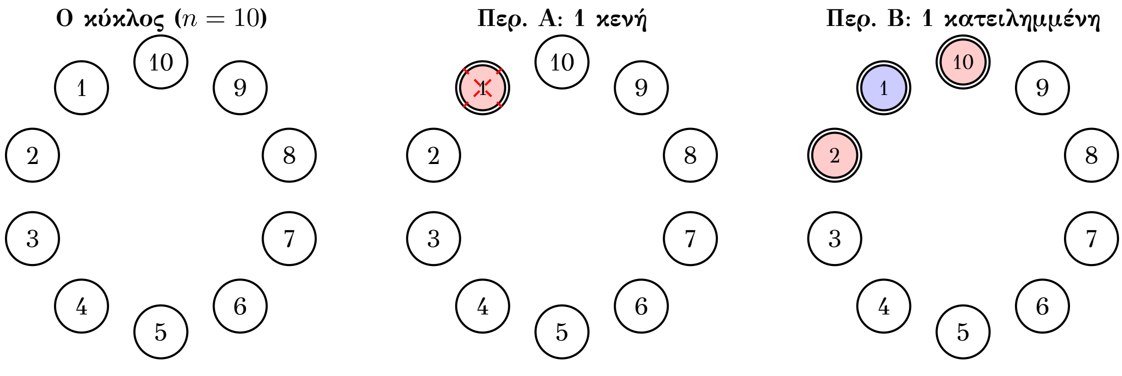
Γενικά: για n θέσεις σε κύκλο και k μαθητές (με $n \geq 2k$),

$$\#\{\text{επιλογές θέσεων}\} = \binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1} = \frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k},$$

άρα

$$\#\{\text{τοποθέτησης μαθητών}\} = \boxed{k!\left(\binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1}\right)} = \boxed{k!\,\frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}}.$$

□



Σχήμα 1: Διάσπαση σε δύο περιπτώσεις ανάλογα με τη θέση 1.

Κυκλικές αναδιατάξεις

Με πόσους τρόπους μπορούν να κάτσουν σε ένα τραπέζι n ιππότες;

Απάντηση: $(n-1)!$. (Αυτό συμβαίνει διότι σε κυκλική διάταξη η σχετική θέση μετράει και όχι η απόλυτη, οπότε "καρφώνουμε" τον έναν και μεταθέτουμε τους υπόλοιπους $n-1$).

Άσκηση 11. *Μοιράζουμε 15 (ίδιες) μπάλες του τένις σε 6 παιδιά.*

(α) Να βρεθεί ο αριθμός n_1 όλων των δυνατών μοιρασιών.

(β) Να βρεθεί ο αριθμός n_2 των μοιρασιών στις οποίες κάθε παιδί παίρνει τουλάχιστον μία μπάλα.

Απόδειξη. Αν θεωρήσουμε όλες τις μπάλες ως αδιαχώριστες, τότε δύο μοιρασιές είναι διαφορετικές αν κάποιο παιδί πάρει διαφορετικό πλήθος μπαλών. Για άλλη μία φορά κωδικοποιούμε κάθε μοίρασμα με μια ακολουθία από μηδενικά και μονάδες: γράφουμε τόσες 1 όσες μπάλες παίρνει το πρώτο παιδί έπειτα, χωρισμένες με ένα και μόνο 0, γράφουμε τόσες 1 όσες μπάλες παίρνει το δεύτερο παιδί, κ.ο.κ. Με αυτόν τον τρόπο παίρνουμε μία 20-άδα που αποτελείται από 15 άσους και 5 μηδενικά άρα υπάρχουν ακριβώς

$$n_1 = \binom{20}{5}$$

τέτοιες ακολουθίες.

Για να βρούμε τον αριθμό n_2 των πιο «δίκαιων» μοιρασιών, όπου κανένα παιδί δεν μένει χωρίς μπάλα, χρησιμοποιούμε το ακόλουθο τρικ: πρώτα δίνουμε σε όλα τα παιδιά από μία μπάλα και μετά μοιράζουμε τις υπόλοιπες 9 μπάλες χωρίς κανέναν περιορισμό. Χρησιμοποιώντας το εύκολο μέρος του (α), συμπεραίνουμε ότι αυτό μπορεί να γίνει με

$$n_2 = P_0(9,5) = \binom{14}{5}$$

τρόπους. □

Παράδειγμα 2.2. Να βρεθεί το πλήθος των ακέραιων λύσεων της εξίσωσης

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$$

με περιορισμούς

$$x_i \geq 0 \quad (i = 1, \ldots, k).$$

Απόδειξη. Θεωρούμε n αστέρια σε σειρά και θέλουμε να τα χωρίσουμε σε k ομάδες (όπου επιτρέπεται μια ομάδα να είναι κενή). Για να δημιουργήσουμε k ομάδες, τοποθετούμε $k-1$ μπάρες ανάμεσα από τα αστέρια. Έτσι παίρνουμε μια 1-1 αντιστοιχία ανάμεσα σε λύσεις $(x_1, \ldots, x_k)$ και σε διατάξεις με n αστέρια και $k-1$ μπάρες.

Συνολικά υπάρχουν $n+k-1$ θέσεις αντικειμένων, από τις οποίες επιλέγουμε τις $k-1$ θέσεις των μπαρών. Άρα ο αριθμός λύσεων είναι

$$\binom{n+k-1}{k-1}.$$

□

Παράδειγμα 2.3. Να βρεθεί το πλήθος των ακέραιων λύσεων της εξίσωσης

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$$

με περιορισμούς

$$x_i \geq 1 \quad (i = 1, \ldots, k).$$

Απόδειξη. Θέτουμε $y_i = x_i - 1 \geq 0$. Τότε

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_k = n - k, \qquad y_i \geq 0.$$

Με τη μέθοδο *αστέρια και μπάρες* ο αριθμός λύσεων είναι

$$\binom{(n-k)+k-1}{k-1} = \binom{n-1}{k-1}.$$

Άρα το πλήθος λύσεων είναι $\boxed{\binom{n-1}{k-1}}$. □

Παράδειγμα 2.4. Ο Α, ο Β, ο Γ και ο Δ θέλουν να ιδρύσουν μια εταιρεία και έχουν να μοιράσουν 16 ίδιες μετοχές ανάμεσα στα 4 άτομα. Ισχύουν οι περιορισμοί:

- Κάθε άτομο πρέπει να πάρει *θετικό* ακέραιο αριθμό μετοχών και όλες οι 16 μετοχές να μοιραστούν.
- Κανένα άτομο δεν μπορεί να έχει περισσότερες μετοχές από τους άλλους τρεις *μαζί*.

Με δεδομένο ότι οι μετοχές είναι αδιαχώριστες αλλά τα άτομα διακριτά, με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει το μοίρασμα;

Απόδειξη. Χωρίς τον δεύτερο περιορισμό, μετράμε τις τετράδες θετικών ακεραίων

$$(x_1, x_2, x_3, x_4), \qquad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 16, \qquad x_i \geq 1.$$

Με *αστέρια και μπάρες*: γράφουμε 16 αστέρια και τοποθετούμε 3 μπάρες ώστε να χωρίσουμε τα αστέρια σε 4 μη κενά κομμάτια. Οι μπάρες δεν επιτρέπεται να μπουν στα άκρα ούτε δίπλα-δίπλα. Άρα επιλέγουμε 3 θέσεις από τις 15 διαθέσιμες (ανάμεσα σε διαδοχικά αστέρια), οπότε

$$\#\{\text{όλα τα μοιράσματα με } x_i \geq 1\} = \binom{15}{3} = 455.$$

Τώρα αφαιρούμε τα "κακά" μοιράσματα όπου κάποιο άτομο έχει περισσότερες μετοχές από τους άλλους τρεις μαζί. Αν, π.χ., ο Α έχει x_1 μετοχές, ο περιορισμός παραβιάζεται όταν

$$x_1 > x_2 + x_3 + x_4 = 16 - x_1 \iff x_1 > 8 \iff x_1 \geq 9.$$

Άρα μετράμε πόσα μοιράσματα έχουν $x_1 \geq 9$. Θέτουμε $x_1' = x_1 - 8$, τότε $x_1' \geq 1$ και

$$x_1' + x_2 + x_3 + x_4 = 8, \qquad x_1', x_2, x_3, x_4 \geq 1.$$

Άρα ο αριθμός τους είναι

$$\binom{7}{3} = 35.$$

Το ίδιο πλήθος ισχύει αν το άτομο με τις πολλές μετοχές είναι ο Β ή ο Γ ή ο Δ, δηλαδή $4\binom{7}{3}$ συνολικά.

Τέλος, δεν μπορεί να υπάρχουν *δύο* άτομα με ≥ 9 μετοχές ταυτόχρονα (θα χρειαζόταν τουλάχιστον 18 μετοχές), άρα δεν υπάρχει διπλομέτρηση. Συνεπώς το ζητούμενο πλήθος είναι

$$\binom{15}{3} - 4\binom{7}{3} = 455 - 4 \cdot 35 = 315.$$

□

Εφαρμογή 9. *Η κηπουρός θέλει να φυτέψει 5 ίδια κόκκινα, 3 ίδια κίτρινα και 2 ίδια λευκά λουλούδια σε μια σειρά. Με πόσους τρόπους μπορεί;*

Απόδειξη. Πρόκειται για μεταθέσεις με επανάληψη. Το πλήθος δίνεται από τον τύπο:

$$A = \frac{10!}{5! \cdot 3! \cdot 2!}$$

Υπολογισμός:

$$\frac{3.628.800}{120 \cdot 6 \cdot 2} = \frac{3.628.800}{1.440} = 2.520 \text{ τρόποι.}$$

□

Παράδειγμα 2.5. Αναπτύσσουμε και απλοποιούμε την παράσταση $(x + y + z)^{10}$.

(α) Πόσοι *διαφορετικοί* όροι (μονώνυμα) εμφανίζονται στην τελική ανάπτυξη;

(β) Ποιος είναι ο συντελεστής του μονωνύμου $x^4y^3z^3$ στην ανάπτυξη του $(x + y + z)^{10}$;

Απόδειξη. **(α)** Κάθε όρος στην ανάπτυξη του $(x + y + z)^{10}$ είναι της μορφής

$$k\, x^a y^b z^c,$$

όπου k είναι κάποια σταθερά και οι εκθέτες a, b, c είναι μη αρνητικοί ακέραιοι με

$$a + b + c = 10.$$

Άρα το ζητούμενο πλήθος ισούται με το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $a + b + c = 10$ σε μη αρνητικούς ακεραίους. Με τη μέθοδο *αστέρια και μπάρες* (10 αστέρια και 2 μπάρες) αυτό είναι

$$\binom{10 + 3 - 1}{3 - 1} = \binom{12}{2} = 66.$$

(β) Στο πολυωνυμικό ανάπτυγμα του $(x+y+z)^{10}$, ο συντελεστής του $x^ay^bz^c$ (με $a+b+c = 10$) δίνεται από τον τριωνυμικό συντελεστή

$$\binom{10}{a, b, c} = \frac{10!}{a!\, b!\, c!}.$$

Για $a = 4$, $b = 3$, $c = 3$ παίρνουμε

$$\binom{10}{4, 3, 3} = \frac{10!}{4!\, 3!\, 3!} = \frac{3628800}{24 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{3628800}{864} = 4200.$$

Άρα ο συντελεστής του $x^4y^3z^3$ είναι $\boxed{4200}$. □

Παράδειγμα 2.6. Σε ένα ορθογώνιο πλέγμα, από το $(0, 0)$ θέλουμε να φτάσουμε στο (a, b) κάνοντας μόνο κινήσεις *δεξιά* $(1, 0)$ και *πάνω* $(0, 1)$. Πόσες τέτοιες διαδρομές υπάρχουν;

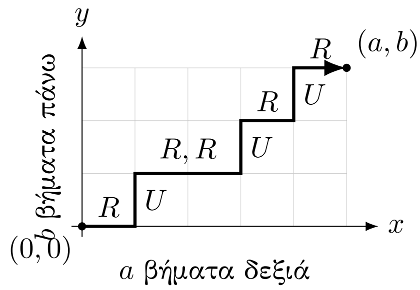
Απόδειξη. Κάθε διαδρομή αποτελείται από ακριβώς a κινήσεις δεξιά και b κινήσεις πάνω, άρα συνολικά από $a + b$ κινήσεις.

Αν κωδικοποιήσουμε τη διαδρομή ως λέξη μήκους $a+b$ πάνω στο αλφάβητο $\{R, U\}$, όπου R σημαίνει "δεξιά" και U σημαίνει "πάνω", τότε κάθε επιτρεπτή διαδρομή αντιστοιχεί 1-1 σε μια τέτοια λέξη που έχει ακριβώς a γράμματα R (και άρα b γράμματα U).

Επομένως, αρκεί να επιλέξουμε σε ποιες a από τις $a + b$ θέσεις της λέξης θα μπουν τα R. Ο αριθμός επιλογών είναι

$$\binom{a + b}{a}.$$

Άρα το πλήθος διαδρομών είναι $\boxed{\binom{a + b}{a}}$. □



Σχήμα 2: Παράδειγμα διαδρομής από $(0,0)$ στο (a,b) με κινήσεις μόνο δεξιά (R) και πάνω (U).

Άσκηση 12. *Για θετικό ακέραιο n, πόσες δυαδικές συμβολοσειρές μήκους n (δηλαδή λέξεις μήκους n πάνω στο αλφάβητο $\{0,1\}$) δεν περιέχουν δύο συνεχόμενα 1; Συμβολίζουμε τον αριθμό με a_n.*

Απόδειξη. Θα βρούμε αναδρομή για το a_n χωρίζοντας τις επιτρεπτές συμβολοσειρές ανάλογα με το πρώτο σύμβολο.

Περίπτωση 1: Η συμβολοσειρά αρχίζει με 0. Τότε τα υπόλοιπα $n-1$ ψηφία σχηματίζουν οποιαδήποτε επιτρεπτή συμβολοσειρά μήκους $n-1$. Άρα οι συμβολοσειρές αυτής της μορφής είναι a_{n-1}.

Περίπτωση 2: Η συμβολοσειρά αρχίζει με 1. Για να μην υπάρχουν δύο συνεχόμενα 1, το δεύτερο ψηφίο πρέπει αναγκαστικά να είναι 0. Άρα η συμβολοσειρά αρχίζει με 10, και τα υπόλοιπα $n-2$ ψηφία σχηματίζουν οποιαδήποτε επιτρεπτή συμβολοσειρά μήκους $n-2$. Άρα οι συμβολοσειρές αυτής της μορφής είναι a_{n-2}.

Οι δύο περιπτώσεις είναι ασυμβίβαστες και καλύπτουν όλες τις επιτρεπτές συμβολοσειρές, οπότε

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \qquad (n \geq 3).$$

Απομένει να δώσουμε αρχικές τιμές:

$$a_1 = 2 \quad (\text{οι } 0,1), \qquad a_2 = 3 \quad (\text{οι } 00, 01, 10).$$

Άρα το a_n ορίζεται από την αναδρομή

$$\boxed{a_1 = 2, \quad a_2 = 3, \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\ (n \geq 3).}$$

(Ισοδύναμα, $a_n = F_{n+2}$ όπου F_m οι αριθμοί Fibonacci με $F_1 = F_2 = 1$.) □

Άσκηση 13. *Θεωρούμε τους n-ψήφιους (δεκαδικούς) αριθμούς, δηλαδή ακολουθίες ψηφίων $d_1 d_2 \cdots d_n$ με $d_1 \in \{1,2,\ldots,9\}$ και $d_i \in \{0,1,\ldots,9\}$ για $i \geq 2$. Θέλουμε να μετρήσουμε όσους έχουν την ιδιότητα ότι κανένα δύο διαδοχικά ψηφία δεν είναι ίσα (δηλαδή $d_i \neq d_{i+1}$ για κάθε $i = 1, \ldots, n-1$).*

Ορίζουμε:

$E_n := \#\{$*τέτοιους n-ψήφιους που τελειώνουν σε άρτιο ψηφίο*$\}$, $\qquad O_n := \#\{$*τέτοιους n-ψήφιους που τελειώνο*

1. *Να αποδειχθούν οι αναδρομές*

$$E_{n+1} = 4E_n + 5O_n, \qquad O_{n+1} = 5E_n + 4O_n,$$

με αρχικές τιμές $E_1 = 4$, $O_1 = 5$.

2. *Χρησιμοποιώντας πίνακες, να υπολογιστούν κλειστοί τύποι για E_n και O_n, υπολογίζοντας τη δύναμη του πίνακα που εμφανίζεται.*

Απόδειξη. **(1) Οι αναδρομές.** Για να φτιάξουμε έναν επιτρεπτό $(n+1)$-ψήφιο, κοιτάμε το τελευταίο ψηφίο.

Για E_{n+1}: Θέλουμε το τελευταίο ψηφίο να είναι άρτιο (0,2,4,6,8).

- Αν το προηγούμενο (δηλαδή το n-οστό) ψηφίο είναι άρτιο, τότε υπάρχουν 5 άρτια ψηφία αλλά απαγορεύεται να επαναλάβουμε το ίδιο, άρα 4 επιλογές για το τελευταίο ψηφίο. Αυτό δίνει $4E_n$.
- Αν το n-οστό ψηφίο είναι περιττό, τότε μπορούμε να διαλέξουμε *οποιοδήποτε* από τα 5 άρτια ψηφία, άρα παίρνουμε $5O_n$.

Άρα $E_{n+1} = 4E_n + 5O_n$.

Ομοίως για O_{n+1}: Αν το n-οστό ψηφίο είναι περιττό, έχουμε 4 επιλογές περιττού ψηφίου (όχι το ίδιο), ενώ αν είναι άρτιο, έχουμε 5 επιλογές περιττού. Άρα $O_{n+1} = 5E_n + 4O_n$.

Οι αρχικές τιμές είναι:

$$E_1 = 4 \quad (2,4,6,8), \qquad O_1 = 5 \quad (1,3,5,7,9).$$

(2) Μέθοδος πινάκων και υπολογισμός δύναμης. Γράφουμε το σύστημα σε μορφή πίνακα:

$$\begin{pmatrix} E_{n+1} \\ O_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} E_n \\ O_n \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} E_1 \\ O_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Άρα

$$\begin{pmatrix} E_n \\ O_n \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Υπολογίζουμε το A^m διαγωνιοποιώντας τον A. Ο χαρακτηριστικός πολυώνυμος είναι

$$\det(A - \lambda I) = (4-\lambda)^2 - 25 = \lambda^2 - 8\lambda - 9 = (\lambda - 9)(\lambda + 1),$$

άρα οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 9$ και $\lambda_2 = -1$. Εύκολα βρίσκουμε ιδιοδιανύσματα:

$$\lambda_1 = 9 : \ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_2 = -1 : \ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Θέτουμε

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Τότε $A = PDP^{-1}$ και (ελέγχεται άμεσα) $P^{-1} = \frac{1}{2}P$. Άρα για κάθε $m \geq 0$,

$$A^m = PD^mP^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9^m & 0 \\ 0 & (-1)^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Κάνοντας τον πολλαπλασιασμό παίρνουμε τον κλειστό τύπο

$$A^m = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 9^m + (-1)^m & 9^m - (-1)^m \\ 9^m - (-1)^m & 9^m + (-1)^m \end{pmatrix}.$$

Θέτοντας $m = n-1$ και πολλαπλασιάζοντας με $\binom{4}{5}$,

$$\begin{pmatrix} E_n \\ O_n \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 9^{n-1} + (-1)^{n-1} & 9^{n-1} - (-1)^{n-1} \\ 9^{n-1} - (-1)^{n-1} & 9^{n-1} + (-1)^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Υπολογίζοντας τα δύο μέλη:

$$E_n = \frac{1}{2}\Big((9^{n-1} + (-1)^{n-1}) \cdot 4 + (9^{n-1} - (-1)^{n-1}) \cdot 5\Big) = \frac{9^n + (-1)^n}{2},$$

$$O_n = \frac{1}{2}\Big((9^{n-1} - (-1)^{n-1}) \cdot 4 + (9^{n-1} + (-1)^{n-1}) \cdot 5\Big) = \frac{9^n - (-1)^n}{2}.$$

Άρα

$$\boxed{E_n = \frac{9^n + (-1)^n}{2}}, \qquad \boxed{O_n = \frac{9^n - (-1)^n}{2}}.$$

(Συνεπώς $E_n + O_n = 9^n$, όπως αναμένεται.) □

Παράδειγμα 2.7. Πόσοι ακέραιοι αριθμοί μεταξύ 1 και 240 (συμπεριλαμβανομένων) είναι πολλαπλάσια του 4 ή του 6;

Απόδειξη. Υπάρχουν $\frac{240}{4} = 60$ πολλαπλάσια του 4 μεταξύ 1 και 240, και $\frac{240}{6} = 40$ πολλαπλάσια του 6 μεταξύ 1 και 240.

Αν προσθέσουμε $60 + 40$, τότε έχουμε μετρήσει δύο φορές τους αριθμούς που είναι πολλαπλάσια και του 4 και του 6, δηλαδή τα πολλαπλάσια του $\mathrm{lcm}(4, 6) = 12$. Τα πολλαπλάσια του 12 μεταξύ 1 και 240 είναι $\frac{240}{12} = 20$.

Άρα, με την αρχή της εγκλεισμού–αποκλεισμού, το ζητούμενο πλήθος είναι

$$60 + 40 - 20 = 80.$$

□

Παράδειγμα 2.8. Τα τέσσερα σύνολα A, B, C, D έχουν από 400 στοιχεία το καθένα. Η τομή οποιωνδήποτε δύο από αυτά έχει 115 στοιχεία, η τομή οποιωνδήποτε τριών έχει 53 στοιχεία, και η τομή και των τεσσάρων έχει 28 στοιχεία. Πόσα στοιχεία έχει η ένωση $A \cup B \cup C \cup D$;

Απόδειξη. Με την αρχή της εγκλεισμού–αποκλεισμού,

$$|A \cup B \cup C \cup D| = \sum |A_i| - \sum |A_i \cap A_j| + \sum |A_i \cap A_j \cap A_k| - |A \cap B \cap C \cap D|.$$

Έχουμε $\sum |A_i| = 4 \cdot 400 = 1600$. Υπάρχουν $\binom{4}{2} = 6$ ζεύγη, άρα $\sum |A_i \cap A_j| = 6 \cdot 115 = 690$. Υπάρχουν $\binom{4}{3} = 4$ τριάδες, άρα $\sum |A_i \cap A_j \cap A_k| = 4 \cdot 53 = 212$. Τέλος, $|A \cap B \cap C \cap D| = 28$. Άρα

$$|A \cup B \cup C \cup D| = 1600 - 690 + 212 - 28 = 1094.$$

□

Παράδειγμα 2.9. Να βρεθεί το πλήθος των μη αρνητικών ακεραίων μικρότερων του 10^6 που περιέχουν *και τα τέσσερα* ψηφία $1, 2, 3, 4$ στη δεκαδική τους αναπαράσταση.

Απόδειξη. Έστω N το ζητούμενο πλήθος, και n το πλήθος των μη αρνητικών ακεραίων μικρότερων του 10^6 που *δεν* περιέχουν ένα ή περισσότερα από τα ψηφία $1, 2, 3, 4$. Επειδή κάθε αριθμός με λιγότερα από 6 ψηφία μπορεί να γραφεί ως «εξαψήφιος» με πρόσθεση αρχικών μηδενικών, έχουμε συνολικά 10^6 εξαψήφιες ακολουθίες ψηφίων και άρα

$$N = 10^6 - n.$$

Για $i = 1, 2, 3, 4$ θέτουμε M_i το σύνολο όλων των (το πολύ) εξαψήφιων ακεραίων που *δεν* περιέχουν το ψηφίο i. Τότε

$$n = \big|M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4\big|.$$

Για κάθε μη κενό υποσύνολο $\{j_1, \dots, j_r\} \subseteq \{1,2,3,4\}$ ισχύει

$$|M_{j_1} \cap \cdots \cap M_{j_r}| = (10-r)^6,$$

αφού απαγορεύουμε r ψηφία και μένουν $10-r$ επιλογές σε καθεμία από τις 6 θέσεις. Άρα, με εγκλεισμό–αποκλεισμό,

$$n = \binom{4}{1}9^6 - \binom{4}{2}8^6 + \binom{4}{3}7^6 - \binom{4}{4}6^6 = 976840.$$

Επομένως

$$N = 1000000 - 976840 = 23160.$$

□

Άσκηση 14. Δίνονται τέσσερα δοχεία A, B, Γ, Δ και εννέα *διαφορετικά* μολύβια. (Δεν υπάρχει περιορισμός στη χωρητικότητα των δοχείων.)

(α) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν τα εννέα μολύβια στα δοχεία;

(β) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν τα εννέα μολύβια στα δοχεία αυτά, ώστε κάθε δοχείο να περιέχει τουλάχιστον ένα μολύβι;

(γ) Όπως στο (β), αλλά τώρα τα μολύβια είναι *όμοια*. Με πόσους τρόπους;

Απόδειξη. (α) Κάθε ένα από τα 9 διαφορετικά μολύβια μπορεί να τοποθετηθεί ανεξάρτητα σε ένα από τα 4 δοχεία. Άρα, με τον κανόνα γινομένου, οι τρόποι είναι

$$4^9.$$

(β) Θέλουμε όλες οι θέσεις A, B, Γ, Δ να είναι μη κενές. Δηλαδή ζητάμε το πλήθος των *επί* συναρτήσεων από το σύνολο των 9 μολυβιών στο σύνολο των 4 δοχείων.

Με εγκλεισμό–αποκλεισμό: από τις 4^9 κατανομές αφαιρούμε όσες αφήνουν κάποιο δοχείο κενό.

- Αν ένα συγκεκριμένο δοχείο είναι κενό, τότε τα 9 μολύβια μπαίνουν στα άλλα 3 δοχεία: 3^9 τρόποι. Υπάρχουν $\binom{4}{1}$ επιλογές για το κενό δοχείο.
- Αν δύο συγκεκριμένα δοχεία είναι κενά, τότε τα 9 μολύβια μπαίνουν στα άλλα 2 δοχεία: 2^9 τρόποι. Υπάρχουν $\binom{4}{2}$ επιλογές για τα δύο κενά δοχεία.
- Αν τρία δοχεία είναι κενά, τότε όλα τα μολύβια μπαίνουν στο μοναδικό υπόλοιπο δοχείο: $1^9 = 1$ τρόπος. Υπάρχουν $\binom{4}{3}$ επιλογές για τα τρία κενά δοχεία.

Άρα

$$4^9 - \binom{4}{1}3^9 + \binom{4}{2}2^9 - \binom{4}{3}1^9.$$

(Ισοδύναμα: $4!\,S(9,4)$, όπου $S(9,4)$ αριθμός Stirling 2ου είδους.)

(γ) Τώρα τα 9 μολύβια είναι *όμοια* και κάθε δοχείο πρέπει να πάρει τουλάχιστον ένα. Αν $x_A, x_B, x_\Gamma, x_\Delta$ είναι τα πλήθη μολυβιών σε κάθε δοχείο, τότε ζητάμε τα θετικά ακέραια

$$x_A + x_B + x_\Gamma + x_\Delta = 9, \qquad x_A, x_B, x_\Gamma, x_\Delta \geq 1.$$

Θέτουμε $y_A = x_A - 1$, $y_B = x_B - 1$, $y_\Gamma = x_\Gamma - 1$, $y_\Delta = x_\Delta - 1$. Τότε

$$y_A + y_B + y_\Gamma + y_\Delta = 5, \qquad y_A, y_B, y_\Gamma, y_\Delta \geq 0.$$

Με «αστέρια και μπάρες», το πλήθος λύσεων είναι

$$\binom{5+4-1}{4-1} = \binom{8}{3} = 56.$$

$\square$

Άσκηση 15. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, θεωρούμε $2n$ στοιχεία τα οποία χωρίζονται σε n τύπους, και από κάθε τύπο υπάρχουν *ακριβώς δύο όμοια* στοιχεία. Να βρεθεί το πλήθος a_n των διαφορετικών διατάξεων (σε μια σειρά) αυτών των $2n$ στοιχείων, με την ιδιότητα ότι κανένα δύο στοιχεία του ίδιου τύπου δεν είναι γειτονικά.

Απόδειξη. Θέτουμε a_n το ζητούμενο πλήθος. Για $i = 1, 2, \ldots, n$, έστω M_i το σύνολο όλων των διατάξεων στις οποίες τα δύο στοιχεία του i-οστού τύπου είναι γειτονικά. Τότε

$$a_n = \frac{(2n)!}{(2!)^n} - \left|M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_n\right| = \frac{(2n)!}{2^n} - \left|M_1 \cup \cdots \cup M_n\right|.$$

Για να υπολογίσουμε $\left|M_1 \cup \cdots \cup M_n\right|$ εφαρμόζουμε την αρχή εγκλεισμού–αποκλεισμού. Πάρτε ένα μη κενό υποσύνολο $J = \{j_1, \ldots, j_r\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$. Τότε $M_{j_1} \cap \cdots \cap M_{j_r}$ είναι το σύνολο των διατάξεων όπου, για κάθε τύπο του J, τα δύο όμοια στοιχεία είναι γειτονικά. Για κάθε τέτοιο τύπο μπορούμε να *ενώσουμε* το ζεύγος σε ένα «μπλοκ» (ένα νέο αντικείμενο). Έτσι, αντί για $2r$ στοιχεία παίρνουμε r μπλοκ, άρα συνολικά έχουμε $2n - r$ αντικείμενα.

Από αυτά, τα r μπλοκ είναι διακριτά (διαφορετικών τύπων), ενώ για κάθε έναν από τους $n - r$ υπόλοιπους τύπους έχουμε ακόμη δύο όμοια στοιχεία. Άρα το πλήθος διατάξεων είναι

$$m(r) := \left|M_{j_1} \cap \cdots \cap M_{j_r}\right| = \frac{(2n-r)!}{2^{\,n-r}},$$

και εξαρτάται μόνο από το r, όχι από την επιλογή του J.

Επομένως, με εγκλεισμό–αποκλεισμό,

$$\left|M_1 \cup \cdots \cup M_n\right| = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r+1} \binom{n}{r} m(r) = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r+1} \binom{n}{r} \frac{(2n-r)!}{2^{\,n-r}}.$$

Τελικά,

$$a_n = \frac{(2n)!}{2^n} - \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r+1} \binom{n}{r} \frac{(2n-r)!}{2^{\,n-r}} = \sum_{r=0}^{n} (-1)^{r} \binom{n}{r} \frac{(2n-r)!}{2^{\,n-r}}.$$

$\square$

Παράδειγμα 2.10. Έστω $m \geq 1$ ακέραιος και έστω ότι οι *διαφορετικοί* πρώτοι διαιρέτες του είναι

$$p_1, p_2, \ldots, p_n, \qquad \text{δηλαδή} \qquad m = p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n}.$$

Να υπολογιστεί (με την αρχή εγκλεισμού–αποκλεισμού) το πλήθος των ακεραίων $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ που είναι πρώτοι προς το m.

Απόδειξη. Θέτουμε $M = \{1, 2, \ldots, m\}$. Για κάθε $i = 1, \ldots, n$ ορίζουμε

$$M_i = \{\, k \in M : \; p_i \mid k \,\}.$$

Τότε ένας ακέραιος $k \in M$ *δεν* είναι πρώτος προς το m αν και μόνο αν έχει κοινό πρώτο διαιρέτη με το m, δηλαδή αν και μόνο αν ανήκει στο $M_1 \cup \cdots \cup M_n$. Άρα το ζητούμενο πλήθος είναι

$$m - \left|M_1 \cup \cdots \cup M_n\right|.$$

Εφαρμόζουμε εγκλεισμό–αποκλεισμό:

$$\left|M_1 \cup \cdots \cup M_n\right| = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r+1} \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_r \le n} \left|M_{j_1} \cap \cdots \cap M_{j_r}\right|.$$

Για ένα σύνολο δεικτών $j_1 < \cdots < j_r$, έχουμε

$$M_{j_1} \cap \cdots \cap M_{j_r} = \{\, k \in M : \ p_{j_1} \cdots p_{j_r} \mid k \,\}.$$

Επειδή $p_{j_1} \cdots p_{j_r} \mid m$, ακριβώς τα πολλαπλάσια του $p_{j_1} \cdots p_{j_r}$ στο $\{1, \ldots, m\}$ είναι $\frac{m}{p_{j_1} \cdots p_{j_r}}$ πολλά, δηλαδή

$$\left|M_{j_1} \cap \cdots \cap M_{j_r}\right| = \frac{m}{p_{j_1} \cdots p_{j_r}}.$$

Άρα

$$\left|M_1 \cup \cdots \cup M_n\right| = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r+1} \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_r \le n} \frac{m}{p_{j_1} \cdots p_{j_r}}.$$

Τελικά, το πλήθος των $k \in \{1, \ldots, m\}$ με $\gcd(k, m) = 1$ είναι

$$m - \left|M_1 \cup \cdots \cup M_n\right| = m \left(1 + \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r} \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_r \le n} \frac{1}{p_{j_1} \cdots p_{j_r}} \right).$$

Ισοδύναμα, αναγνωρίζοντας την ανάπτυξη γινομένου,

$$m - \left|M_1 \cup \cdots \cup M_n\right| = m \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

□

Ορισμός 2.11. Μια *διαμέριση* του συνόλου $[n]$ είναι μια συλλογή από μη κενά μπλοκ έτσι ώστε κάθε στοιχείο του $[n]$ να ανήκει σε ακριβώς ένα από αυτά τα μπλοκ.

Ο αριθμός των διαμερίσεων του $[n]$ σε k μη κενά μπλοκ συμβολίζεται με $S(n, k)$. Οι αριθμοί $S(n, k)$ ονομάζονται *αριθμοί Stirling δεύτερου είδους*.

Παράδειγμα 2.12. Για κάθε $n \ge 1$, έχουμε $S(n, 1) = S(n, n) = 1$. Για κάθε $n \ge 2$, η ισότητα $S(n, n-1) = \binom{n}{2}$ ισχύει, καθώς μια διαμέριση του $[n]$ σε $n - 1$ μπλοκ πρέπει να αποτελείται από ένα υποσύνολο με δύο στοιχεία (ζεύγος) και $n - 2$ μονοσύνολα.

Παράδειγμα 2.13. Το σύνολο $[4]$ έχει επτά διαμερίσεις σε δύο μη κενά μπλοκ, συγκεκριμένα $\{1, 2, 3\}\{4\}$; $\{1, 2, 4\}\{3\}$; $\{1, 3, 4\}\{2\}$; $\{2, 3, 4\}\{1\}$, και επίσης $\{1, 2\}\{3, 4\}$; $\{1, 3\}\{2, 4\}$; και $\{1, 4\}\{2, 3\}$. Επομένως, $S(4, 2) = 7$.

Αρχικά, θα αποδείξουμε μια αναδρομική σχέση.

Θεώρημα 2.14. *Για όλους τους θετικούς ακεραίους $k \le n$,*

$$S(n, k) = S(n-1, k-1) + k \cdot S(n-1, k). \tag{1}$$

Απόδειξη. Όπως και πριν, μπορούμε να λάβουμε μια συνδυαστική απόδειξη εξετάζοντας προσεκτικά ένα συγκεκριμένο στοιχείο, ας πούμε το μέγιστο στοιχείο n. Αν αυτό το στοιχείο σχηματίζει ένα μπλοκ από μόνο του (μονοσύνολο), τότε τα υπόλοιπα $n - 1$ στοιχεία έχουν ακριβώς $S(n-1, k-1)$ τρόπους για να ολοκληρώσουν τη διαμέριση. Αυτές οι διαμερίσεις απαριθμούνται από το πρώτο μέλος της δεξιάς πλευράς. Αν, από την άλλη πλευρά, το στοιχείο n δεν σχηματίζει ένα μπλοκ από μόνο του, τότε τα υπόλοιπα $n-1$ στοιχεία πρέπει να σχηματίσουν μια διαμέριση με k μπλοκ με έναν από τους $S(n-1,k)$ τρόπους. Στη συνέχεια, μπορούμε να προσθέσουμε το n σε οποιοδήποτε από τα k μπλοκ που σχηματίζονται από αυτήν τη διαμέριση, πολλαπλασιάζοντας τον αριθμό όλων των πιθανοτήτων μας επί k. Αυτές οι διαμερίσεις απαριθμούνται από το δεύτερο μέλος της δεξιάς πλευράς. Καθώς η αριστερή πλευρά απαριθμεί όλες τις διαμερίσεις του $[n]$ σε k μπλοκ, ο ισχυρισμός αποδεικνύεται. □

Πόρισμα 2.15. *Ο αριθμός όλων των συναρτήσεων $f:[n]\to[k]$ που είναι επί είναι $k!\cdot S(n,k)$.*

Απόδειξη. Μια τέτοια συνάρτηση ορίζει μια διαμέριση του $[n]$. Τα μπλοκ είναι τα υποσύνολα των στοιχείων που απεικονίζονται στο ίδιο στοιχείο $i\in[k]$. Επομένως, τα μπλοκ φέρουν ετικέτες, και υπάρχουν ακριβώς k από αυτά. □

Μια ενδιαφέρουσα συνέπεια αυτού είναι το ακόλουθο απροσδόκητο πόρισμα. Είναι εκπληκτικό καθώς δείχνει ότι το x^n, είναι στην πραγματικότητα ένα άθροισμα $n+1$ όρων που περιλαμβάνουν αριθμούς Stirling.

Πόρισμα 2.16. *Για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x, και όλους τους μη αρνητικούς ακεραίους n,*

$$x^n=\sum_{k=0}^{n}S(n,k)(x)_k. \tag{2}$$

Απόδειξη. Και οι δύο πλευρές είναι πολυώνυμα του x βαθμού n. Επομένως, αν μπορέσουμε να δείξουμε ότι συμφωνούν για περισσότερες από n τιμές του x, η απόδειξη θα έχει ολοκληρωθεί. Θα αποδείξουμε μια ακόμη ισχυρότερη πρόταση, συγκεκριμένα ότι οι δύο πλευρές συμφωνούν για *όλους τους θετικούς ακεραίους* x.

Έστω λοιπόν x ένας θετικός ακέραιος. Τότε η αριστερή πλευρά είναι ο αριθμός όλων των συναρτήσεων από το $[n]$ στο $[x]$. Ισχυριζόμαστε ότι η δεξιά πλευρά είναι η ίδια, απαριθμημένη σύμφωνα με το *μέγεθος της εικόνας*. Πράγματι, αν η εικόνα μιας τέτοιας συνάρτησης έχει μέγεθος k, τότε υπάρχουν $\binom{x}{k}$ επιλογές για την εικόνα I, και στη συνέχεια, από το παραπάνω Πόρισμα, υπάρχουν $k!\cdot S(n,k)$ επιλογές για την ίδια τη συνάρτηση. Καθώς $(x)_k=k!\cdot\binom{x}{k}$, ο ισχυρισμός αποδεικνύεται. □

Θεώρημα 2.17. *Για όλους τους θετικούς ακεραίους n και k, η ισότητα*

$$S(n,k)=\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\frac{1}{i!(k-i)!}(k-i)^n$$

ισχύει.

Απόδειξη. Αντί να βρούμε έναν τύπο για το $S(n,k)$, θα βρούμε έναν τύπο για το $k!\cdot S(n,k)$. Γνωρίζουμε από το Πόρισμα ότι το τελευταίο είναι ο αριθμός όλων των επί συναρτήσεων από το $[n]$ στο $[k]$.

Είναι προφανές ότι ο αριθμός όλων των *συναρτήσεων* από το $[n]$ στο $[k]$ είναι k^n καθώς κάθε στοιχείο του πεδίου ορισμού μπορεί να απεικονιστεί σε ένα από τα k στοιχεία. Ωστόσο, δεν θα είναι όλες αυτές οι συναρτήσεις επί· πολλές θα χάσουν ένα, δύο ή περισσότερα στοιχεία του $[k]$ στην εικόνα τους. Πρέπει να απαριθμήσουμε εκείνες που δεν χάνουν *κανένα* στοιχείο του k. Έστω $i\in[k]$ και έστω A_i το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το $[n]$ στο $[k]$ των οποίων η εικόνα δεν περιέχει το i. Είναι τότε προφανές ότι $|A_i|=(k-1)^n$ καθώς τέτοιες συναρτήσεις μπορούν να απεικονίσουν οποιοδήποτε στοιχείο του $[n]$ σε οποιοδήποτε από τα $k-1$ στοιχεία. Παρομοίως,

$$|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_j}|=(k-j)^n,$$

για κάθε $j \leq k$. Επομένως, ο τύπος εγκλεισμού-αποκλεισμού δίνει:

$$|A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_n| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_j} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_j}|$$
$$= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \binom{k}{i} (k-i)^n.$$

Αυτός είναι ο αριθμός των συναρτήσεων από το $[n]$ στο $[k]$ των οποίων το πεδίο τιμών *δεν* είναι ολόκληρο το σύνολο $[k]$. Επομένως, ο αριθμός εκείνων με πεδίο τιμών το $[k]$, με άλλα λόγια, ο αριθμός των επί συναρτήσεων, μπορεί να προκύψει αφαιρώντας αυτόν τον αριθμό από εκείνον όλων των συναρτήσεων από το $[n]$ στο $[k]$, και ο ισχυρισμός μας έπεται. □

Ορισμός 2.18. Έστω $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_k \geq 1$ ακέραιοι ώστε

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k = n.$$

Τότε η ακολουθία $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ ονομάζεται *διαμέριση* (partition) του ακεραίου n. Το πλήθος όλων των διαμερίσεων του n συμβολίζεται με $p(n)$. Το πλήθος των διαμερίσεων του n σε *ακριβώς* k μέρη συμβολίζεται με $p_k(n)$.

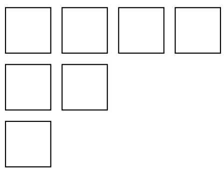
Παράδειγμα 2.19. Ο θετικός ακέραιος 5 έχει 7 διαμερίσεις. Πράγματι, είναι

$$(5),\ (4,1),\ (3,2),\ (3,1,1),\ (2,2,1),\ (2,1,1,1),\ (1,1,1,1,1).$$

Άρα $p(5) = 7$.

Ένα *σχήμα Ferrers* (Ferrers shape) μιας διαμέρισης $p = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ του n είναι ένα σύνολο από n τετραγωνικά κουτάκια με οριζόντιες και κατακόρυφες πλευρές, τοποθετημένα έτσι ώστε στην i-οστή σειρά να υπάρχουν x_i κουτάκια και όλες οι σειρές να αρχίζουν από την ίδια κατακόρυφη ευθεία. Ονομάζεται από τον Βρετανό μαθηματικό Norman Macleod Ferrers. Το σχήμα Ferrers της διαμέρισης $p = (4,2,1)$ φαίνεται στο Σχήμα 3. Είναι προφανές ότι υπάρχει 1–1 αντιστοιχία ανάμεσα στις διαμερίσεις του n και στα σχήματα Ferrers μεγέθους n.

Αν κατοπτρίσουμε ένα σχήμα Ferrers ως προς την κύρια διαγώνιό του, παίρνουμε ένα άλλο σχήμα, που αντιστοιχεί στη *συζυγή* (conjugate) διαμέριση. Στο παράδειγμά μας, η συζυγής της $(4,2,1)$ είναι η $(3,2,1,1)$. Ειδικότερα, το μήκος της i-οστής σειράς του σχήματος Ferrers της συζυγούς διαμέρισης είναι ίσο με το μήκος της i-οστής στήλης του αρχικού σχήματος.



Σχήμα 3: Σχήμα Ferrers της διαμέρισης $(4,2,1)$.

Θεώρημα 2.20. *Το πλήθος των διαμερίσεων του n σε το πολύ k μέρη είναι ίσο με το πλήθος των διαμερίσεων του n σε μέρη που δεν ξεπερνούν το k.*

Απόδειξη. Ο αριθμός των διαμερίσεων του n σε το πολύ k μέρη είναι ίσος με τον αριθμό των σχημάτων Ferrers μεγέθους n που έχουν το πολύ k σειρές. Ο αριθμός των διαμερίσεων του n σε μέρη $\leq k$ είναι ίσος με τον αριθμό των σχημάτων Ferrers μεγέθους n που έχουν το πολύ k στήλες. Αλλά τα σχήματα Ferrers με το πολύ k σειρές αντιστοιχούν 1–1 στα σχήματα Ferrers με το πολύ k στήλες με την κατοπτρική συμμετρία ως προς την κύρια διαγώνιο (δηλαδή με τη συζυγή διαμέριση). Άρα οι δύο αριθμοί είναι ίσοι. □

3 Γεννήτριες Συναρτήσεις

Παράδειγμα 3.1 (Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων και ερμηνεία συντελεστών). Πώς πολλαπλασιάζουμε τα πολυώνυμα

$$p(x) = x + x^2 + x^3 + x^4 \qquad \text{και} \qquad q(x) = x + x^3 + x^4;$$

Επίσης, χωρίς να υπολογίσουμε όλο το γινόμενο, να βρούμε τον συντελεστή του x^5 στο $p(x)q(x)$.

Απόδειξη. Για να πολλαπλασιάσουμε τα $p(x), q(x)$, πολλαπλασιάζουμε *κάθε* όρο του $p(x)$ με *κάθε* όρο του $q(x)$ και αθροίζουμε όλα τα γινόμενα. Εδώ όλοι οι συντελεστές είναι 1, άρα στο τέλος απλώς «μετράμε» πόσες φορές εμφανίζεται κάθε δύναμη του x. Έτσι παίρνουμε

$$p(x)q(x) = x^8 + 2x^7 + 2x^6 + 3x^5 + 2x^4 + x^3 + x^2.$$

Τώρα θέλουμε τον συντελεστή του x^5 *χωρίς* να κάνουμε όλο το γινόμενο. Ο όρος x^5 προκύπτει όταν επιλέξουμε έναν όρο x^i από το $p(x)$ και έναν όρο x^j από το $q(x)$ με $i + j = 5$. Στην περίπτωσή μας το x^5 εμφανίζεται:

$$x \cdot x^4, \qquad x^2 \cdot x^3, \qquad x^4 \cdot x,$$

δηλαδή υπάρχουν 3 τέτοια ζεύγη, άρα ο συντελεστής του x^5 στο $p(x)q(x)$ είναι 3.

Μια ωραία «εικόνα» είναι η εξής: σκεφτόμαστε ότι το $p(x)$ αντιστοιχεί σε επιλογή από το σύνολο εκθετών $I = \{1, 2, 3, 4\}$ και το $q(x)$ σε επιλογή από $J = \{1, 3, 4\}$. Το να φτιάξουμε x^5 ισοδυναμεί με το να επιλέξουμε *διατεταγμένο* ζεύγος (i, j) με $i \in I$, $j \in J$ και $i + j = 5$.

Αυτό γενικεύεται: αν I, J είναι πεπερασμένα σύνολα φυσικών αριθμών και ορίσουμε

$$p(x) = \sum_{i \in I} x^i, \qquad q(x) = \sum_{j \in J} x^j,$$

τότε για κάθε $r \in \mathbb{N}$, ο συντελεστής του x^r στο γινόμενο $p(x)q(x)$ είναι ίσος με το πλήθος των διατεταγμένων ζευγών (i, j) που λύνουν την εξίσωση

$$i + j = r, \qquad i \in I, \ j \in J.$$

□

Απόδειξη ταυτοτήτων. Θέλουμε να αποδείξουμε

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Θεωρούμε την ταυτότητα

$$(1 + x)^n (1 + x)^n = (1 + x)^{2n}.$$

Ο συντελεστής του x^n στο δεξιό μέλος είναι $\binom{2n}{n}$ από το διωνυμικό θεώρημα. Στο αριστερό μέλος, μπορούμε να αναπτύξουμε και τις δύο δυνάμεις $(1 + x)^n$ σύμφωνα με το διωνυμικό θεώρημα, και στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε τα δύο προκύπτοντα πολυώνυμα. Ο συντελεστής του x^n στο γινόμενό τους μπορεί να εκφραστεί ως $\binom{n}{0}\binom{n}{n} + \binom{n}{1}\binom{n}{n-1} + \binom{n}{2}\binom{n}{n-2} + \cdots + \binom{n}{n}\binom{n}{0}$, και αυτός πρέπει να είναι ο ίδιος αριθμός με τον συντελεστή του x^n στο δεξιό μέλος. Αυτό οδηγεί στο

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n}{n-i} = \binom{2n}{n}.$$

Παράδειγμα 3.2 (Καλάθι με φρούτα και γεννήτριες συναρτήσεις). Με πόσους τρόπους μπορούμε να γεμίσουμε ένα καλάθι με συνολικά n φρούτα, αν ισχύουν οι περιορισμοί:

- ο αριθμός των πορτοκαλιών είναι άρτιος,
- μπορούμε να έχουμε το πολύ 3 μπανάνες,
- ο αριθμός των ανανάδων είναι πολλαπλάσιο του 4,
- μπορούμε να έχουμε το πολύ 1 καρπούζι,
- όλα τα φρούτα είναι μόνο μπανάνες, πορτοκάλια, ανανάδες, καρπούζια.

Απόδειξη. Ας είναι f_n ο ζητούμενος αριθμός τρόπων και

$$F(X) = \sum_{n\geq 0} f_n X^n$$

η (συνήθης) γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $\{f_n\}_{n\geq 0}$. Θα γράψουμε μια γεννήτρια συνάρτηση για κάθε «είδος φρούτου» και μετά θα τις πολλαπλασιάσουμε, επειδή οι επιλογές γίνονται ανεξάρτητα και τα πλήθη αθροίζονται.

Πορτοκάλια (άρτιος αριθμός).

$$O(X) = 1 + X^2 + X^4 + \cdots = \frac{1}{1-X^2}.$$

Μπανάνες (το πολύ 3).

$$B(X) = 1 + X + X^2 + X^3 = \frac{1-X^4}{1-X}.$$

Ανανάδες (πολλαπλάσιο του 4).

$$P(X) = 1 + X^4 + X^8 + \cdots = \frac{1}{1-X^4}.$$

Καρπούζια (το πολύ 1).

$$W(X) = 1 + X.$$

Άρα η συνολική γεννήτρια είναι

$$F(X) = O(X)B(X)P(X)W(X) = \frac{1}{1-X^2} \cdot \frac{1-X^4}{1-X} \cdot \frac{1}{1-X^4} \cdot (1+X).$$

Απλοποιώντας,

$$\frac{1-X^4}{1-X^4} = 1, \qquad \frac{1+X}{1-X^2} = \frac{1+X}{(1-X)(1+X)} = \frac{1}{1-X},$$

οπότε

$$F(X) = \frac{1}{1-X} \cdot \frac{1}{1-X} = \frac{1}{(1-X)^2}.$$

Μένει να βρούμε την ανάπτυξη του $\frac{1}{(1-X)^2}$. Θυμίζουμε τον *γενικευμένο διωνυμικό συντελεστή*:

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \qquad (n \geq 0),$$

και την ταυτότητα

$$(1+X)^\alpha = \sum_{n\geq 0} \binom{\alpha}{n} X^n.$$

Βάζοντας $\alpha = -2$ και αντικαθιστώντας $X \mapsto -X$, παίρνουμε

$$\frac{1}{(1-X)^2} = (1-X)^{-2} = \sum_{n\geq 0} \binom{-2}{n}(-X)^n = \sum_{n\geq 0}(n+1)X^n.$$

(Πράγματι $\binom{-2}{n}(-1)^n = n+1$.)

Άρα ο συντελεστής του X^n στο $F(X)$ είναι $f_n = n+1$. □

Άσκηση 16. Ένα κουτί περιέχει 30 κόκκινες, 40 μπλε και 50 άσπρες μπάλες. Οι μπάλες του ίδιου χρώματος θεωρούνται όμοιες. Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε μια συλλογή 70 μπαλών από το κουτί;

Απόδειξη. Αν r, b, w είναι αντίστοιχα οι κόκκινες/μπλε/άσπρες μπάλες που επιλέγουμε, τότε ζητάμε το πλήθος των τριάδων

$$r + b + w = 70, \qquad 0 \leq r \leq 30, \quad 0 \leq b \leq 40, \quad 0 \leq w \leq 50.$$

Με γεννήτριες συναρτήσεις: ο παράγοντας για τις κόκκινες είναι

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{30},$$

για τις μπλε

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{40},$$

και για τις άσπρες

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{50}.$$

Άρα το ζητούμενο πλήθος είναι ο συντελεστής του x^{70} στο γινόμενο

$$(1 + x + \cdots + x^{30})(1 + x + \cdots + x^{40})(1 + x + \cdots + x^{50}).$$

Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα γεωμετρικής προόδου

$$1 + x + \cdots + x^m = \frac{1 - x^{m+1}}{1-x}.$$

Έτσι

$$(1 + x + \cdots + x^{30})(1 + x + \cdots + x^{40})(1 + x + \cdots + x^{50}) = \frac{(1-x^{31})(1-x^{41})(1-x^{51})}{(1-x)^3}.$$

Τώρα χρειαζόμαστε τον συντελεστή του x^{70} στο

$$\frac{(1-x^{31})(1-x^{41})(1-x^{51})}{(1-x)^3}.$$

Γνωρίζουμε ότι

$$\frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{t\geq 0} \binom{t+2}{2} x^t,$$

διότι ο συντελεστής του x^t στο $(1-x)^{-3}$ μετρά τις μη αρνητικές λύσεις της $u + v + z = t$, οι οποίες είναι $\binom{t+2}{2}$ (αστέρια και μπάρες).

Επιπλέον, για να βρούμε τον συντελεστή του x^{70}, αρκεί να κρατήσουμε από το $(1-x^{31})(1-x^{41})(1-x^{51})$ μόνο τους όρους μέχρι βαθμό 70. Πράγματι,

$$(1-x^{31})(1-x^{41})(1-x^{51}) = 1 - x^{31} - x^{41} - x^{51} + x^{72} + x^{82} + x^{92} - x^{123},$$

και όλοι οι όροι $x^{72}, x^{82}, x^{92}, x^{123}$ έχουν βαθμό > 70, άρα δεν επηρεάζουν τον συντελεστή του x^{70} στο τελικό γινόμενο με $(1-x)^{-3}$. Επομένως, ο συντελεστής του x^{70} είναι

$$\binom{70+2}{2} - \binom{(70-31)+2}{2} - \binom{(70-41)+2}{2} - \binom{(70-51)+2}{2}.$$

Δηλαδή

$$\binom{72}{2} - \binom{41}{2} - \binom{31}{2} - \binom{21}{2} = 2556 - 820 - 465 - 210 = 1061.$$

Άρα υπάρχουν 1061 τρόποι. □

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να βρούμε την ακολουθία για την οποία ισχύει

$$a_{n+1} = 4a_n - 100, \tag{3}$$

για κάθε ακέραιο $n \geq 0$, με αρχική συνθήκη $a_0 = 50$. Στην πραγματικότητα έχουμε άπειρες εξισώσεις, σε άπειρες μεταβλητές. Για να συγκεντρώσουμε όλες τις πληροφορίες που είναι διάσπαρτες σε αυτές τις άπειρες εξισώσεις σε μία μόνο εξίσωση, θα εισαγάγουμε την τεχνική των *γεννητριών συναρτήσεων*.

Ορισμός 3.3 (Γεννήτρια συνάρτηση). Έστω $\{f_n\}_{n\geq 0}$ μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Τότε η τυπική δυναμοσειρά

$$F(x) = \sum_{n\geq 0} f_n x^n$$

ονομάζεται η *συνήθης γεννήτρια συνάρτηση* της ακολουθίας $\{f_n\}_{n\geq 0}$.

Επειδή εδώ συζητάμε μόνο συνήθεις παραγωγικές συναρτήσεις, μερικές φορές θα παραλείπουμε τη λέξη «συνήθης» για συντομία. Στη συνέχεια θα χειριστούμε την (8.1) έτσι ώστε να εμφανιστεί η παραγωγική συνάρτηση της ακολουθίας $\{a_n\}_{n\geq 0}$. Θέτουμε

$$G(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n.$$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της (3) με x^{n+1}, και μετά αθροίζουμε ως προς $n \geq 0$. Δηλαδή: παίρνουμε ένα αντίγραφο της (3) για κάθε $n \geq 0$, πολλαπλασιάζουμε με x^{n+1}, και κατόπιν παίρνουμε το άθροισμα όλων των εξισώσεων που προκύπτουν. Παίρνουμε

$$\sum_{n\geq 0} a_{n+1}x^{n+1} = \sum_{n\geq 0} 4a_n x^{n+1} - \sum_{n\geq 0} 100x^{n+1}. \tag{4}$$

Το αριστερό μέλος είναι «σχεδόν» η παραγωγική συνάρτηση $G(x)$. Πράγματι, αν αντικαταστήσουμε $n+1$ με n, ο μόνος όρος που λείπει είναι ο a_0. Άρα το αριστερό μέλος της (8.2) είναι $G(x) - a_0$. Ο πρώτος όρος του δεξιού μέλους είναι $4xG(x)$, ενώ ο δεύτερος όρος του δεξιού μέλους είναι $\dfrac{100x}{1-x}$, αφού $\sum_{n\geq 0} x^n = \dfrac{1}{1-x}$. Επομένως η (8.2) ισοδυναμεί με

$$G(x) - a_0 = 4xG(x) - \frac{100x}{1-x}. \tag{5}$$

Αναδιατάσσοντας την (5) παίρνουμε

$$G(x) = \frac{a_0}{1-4x} - \frac{100x}{(1-x)(1-4x)}. \tag{6}$$

Θυμόμαστε ότι $a_0 = 50$, άρα το δεξί μέλος δεν περιέχει αγνώστους· δηλαδή είναι μια τυπική δυναμοσειρά ως προς x. Έτσι έχουμε βρει έναν *ρητό τύπο* για τη $G(x)$, την παραγωγική συνάρτηση της ακολουθίας $\{a_n\}$.

Τέλος, θέλουμε έναν ρητό τύπο για τους ίδιους τους αριθμούς a_n. Παρατηρούμε ότι η (6) είναι ισότητα τυπικών δυναμοσειρών, και δύο τυπικές δυναμοσειρές είναι ίσες αν και μόνο αν, για κάθε n, οι συντελεστές του x^n είναι ίσοι. Ο συντελεστής του x^n στο $G(x)$ είναι (εξ ορισμού) ο a_n. Άρα ο συντελεστής του x^n στο δεξί μέλος της (6) είναι επίσης a_n.

Ο πρώτος όρος είναι εύκολος:

$$\frac{a_0}{1-4x} = 50\sum_{n\geq 0}(4x)^n = 50\sum_{n\geq 0} 4^n x^n,$$

άρα, στον πρώτο όρο, ο συντελεστής του x^n είναι $50\cdot 4^n$.

Ο δεύτερος όρος είναι λίγο πιο σύνθετος. Γράφουμε

$$\frac{100x}{(1-x)(1-4x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1-4x}.$$

Πολλαπλασιάζοντας με $(1-x)(1-4x)$ παίρνουμε

$$A(1-4x) + B(1-x) = 100x,$$

δηλαδή

$$(-B-4A)x + (A+B) = 100x.$$

Άρα $-B-4A = 100$ και $A+B=0$, οπότε $A = -\frac{100}{3}$ και $B = \frac{100}{3}$. Επομένως,

$$\frac{100x}{(1-x)(1-4x)} = \frac{100}{3}\left(\frac{1}{1-4x} - \frac{1}{1-x}\right) = \frac{100}{3}\left(\sum_{n\geq 0} 4^n x^n - \sum_{n\geq 0} x^n\right) = \sum_{n\geq 0}\frac{100}{3}(4^n-1)x^n.$$

Άρα, στον δεύτερο όρο, ο συντελεστής του x^n είναι $\frac{100}{3}(4^n-1)$. Τελικά καταλήγουμε ότι

$$a_n = 50\cdot 4^n - 100\cdot\frac{4^n-1}{3}. \tag{7}$$

Ολοκληρώσαμε το ζητούμενο, δηλαδή βρήκαμε ρητό τύπο για το a_n. Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι η (7) ικανοποιεί την αναδρομή: για $n=0$ δίνει $a_0 = 50$, και επίσης

$$4a_n - 100 = 4\left(50\cdot 4^n - 100\cdot\frac{4^n-1}{3}\right) - 100 = 50\cdot 4^{n+1} - 100\cdot\frac{4^{n+1}-1}{3} = a_{n+1}.$$

Παράδειγμα 3.4 (Γεννήτρια συνάρτηση για αναδρομή 2ου βαθμού)**.** Θέτουμε $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$ για $n\geq 0$, με $a_0 = 0$ και $a_1 = 1$. Να βρεθεί ρητός τύπος για το a_n.

Απόδειξη. Θέτουμε τη (συνήθη) *γεννήτρια συνάρτηση*

$$G(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n.$$

Πολλαπλασιάζουμε τη σχέση $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$ με x^{n+2} και αθροίζουμε για όλα τα $n\geq 0$:

$$\sum_{n\geq 0} a_{n+2}x^{n+2} = 3\sum_{n\geq 0} a_{n+1}x^{n+2} - 2\sum_{n\geq 0} a_n x^{n+2}.$$

Το αριστερό μέλος είναι

$$\sum_{n\geq 0} a_{n+2}x^{n+2} = G(x) - a_0 - a_1 x = G(x) - x,$$

επειδή $a_0 = 0$ και $a_1 = 1$. Επίσης,

$$\sum_{n\geq 0} a_{n+1}x^{n+2} = x\sum_{n\geq 0} a_{n+1}x^{n+1} = x\left(G(x) - a_0\right) = xG(x),$$

και

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^{n+2} = x^2 G(x).$$

Άρα η παραπάνω ισότητα γίνεται

$$G(x) - x = 3xG(x) - 2x^2 G(x),$$

οπότε

$$G(x)\left(1 - 3x + 2x^2\right) = x \quad \Longrightarrow \quad G(x) = \frac{x}{1 - 3x + 2x^2}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$1 - 3x + 2x^2 = (1-x)(1-2x),$$

άρα

$$G(x) = \frac{x}{(1-x)(1-2x)}.$$

Θέλουμε A, B ώστε

$$\frac{x}{(1-x)(1-2x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1-2x}.$$

Πολλαπλασιάζοντας με $(1-x)(1-2x)$ παίρνουμε

$$x = A(1-2x) + B(1-x) = (A+B) + (-2A-B)x.$$

Ταυτίζοντας συντελεστές: $A + B = 0$ και $-2A - B = 1$, άρα $A = -1$, $B = 1$. Επομένως

$$G(x) = -\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-2x}.$$

Αναπτύσσοντας σε γεωμετρικές σειρές,

$$-\frac{1}{1-x} = -\sum_{n\geq 0} x^n, \qquad \frac{1}{1-2x} = \sum_{n\geq 0} 2^n x^n,$$

οπότε

$$G(x) = \sum_{n\geq 0} (2^n - 1)x^n.$$

Άρα ο συντελεστής του x^n είναι $a_n = 2^n - 1$. □

Παράδειγμα 3.5. Ένα εξάμηνο σε ένα Πολυτεχνείο έχει n ημέρες. Στην αρχή του εξαμήνου, η Κοσμήτορας χωρίζει το εξάμηνο σε δύο μέρη ως εξής: οι πρώτες k ημέρες αποτελούν το θεωρητικό μέρος, και οι επόμενες $n-k$ ημέρες αποτελούν το εργαστηριακό μέρος, όπου $1 \leq k \leq n-2$. Έπειτα, επιλέγει *μία* αργία στο πρώτο μέρος και *δύο* αργίες στο δεύτερο μέρος. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να σχεδιάσει το εξάμηνο με αυτούς τους περιορισμούς;

Απόδειξη. Θέτουμε f_n το ζητούμενο πλήθος.

(Άμεση απαρίθμηση ως άθροισμα). Για δεδομένο k, υπάρχουν k τρόποι να επιλέξουμε μία ημέρα-αργία στο πρώτο μέρος. Για το δεύτερο μέρος θέτουμε $m = n - k$ (οπότε $m \geq 2$) και υπάρχουν $\binom{m}{2}$ τρόποι να επιλέξουμε δύο αργίες. Άρα

$$f_n = \sum_{k=1}^{n-2} k\binom{n-k}{2}.$$

Η παραπάνω μορφή είναι σωστή, αλλά δεν είναι προφανές αν «κλείνει» σε κλειστό τύπο. Γι' αυτό χρησιμοποιούμε γεννήτριες συναρτήσεις.

(Με γεννήτριες συναρτήσεις). Θεωρούμε τις ακολουθίες

$$a_k = \begin{cases} k, & k \geq 1, \\ 0, & k = 0, \end{cases} \qquad b_m = \begin{cases} \binom{m}{2}, & m \geq 2, \\ 0, & m = 0, 1. \end{cases}$$

και τις (συνήθεις) γεννήτριες συναρτήσεις τους

$$A(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k = \sum_{k \geq 1} k x^k, \qquad B(x) = \sum_{m \geq 0} b_m x^m = \sum_{m \geq 2} \binom{m}{2} x^m.$$

Τότε το f_n είναι ακριβώς η συνέλιξη $f_n = \sum_{k+m=n} a_k b_m$, άρα η γεννήτρια

$$F(x) := \sum_{n \geq 0} f_n x^n$$

ικανοποιεί

$$F(x) = A(x)\, B(x).$$

Υπολογίζουμε τώρα κλειστές μορφές για $A(x), B(x)$. Από γνωστές ταυτότητες (π.χ. με παραγώγιση της $\sum_{k \geq 0} x^k = \frac{1}{1-x}$) έχουμε

$$A(x) = \sum_{k \geq 1} k x^k = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Επίσης, επειδή $\binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{2}$, προκύπτει (πάλι από παραγώγιση/γνωστή σειρά) ότι

$$B(x) = \sum_{m \geq 2} \binom{m}{2} x^m = \frac{x^2}{(1-x)^3}.$$

Άρα

$$F(x) = A(x)B(x) = \frac{x}{(1-x)^2} \cdot \frac{x^2}{(1-x)^3} = \frac{x^3}{(1-x)^5}.$$

Χρησιμοποιούμε τώρα το γνωστό ανάπτυγμα

$$\frac{1}{(1-x)^5} = \sum_{t \geq 0} \binom{t+4}{4} x^t.$$

Οπότε

$$F(x) = x^3 \sum_{t \geq 0} \binom{t+4}{4} x^t = \sum_{n \geq 3} \binom{(n-3)+4}{4} x^n = \sum_{n \geq 3} \binom{n+1}{4} x^n.$$

Συνεπώς, για $n \geq 3$ παίρνουμε

$$f_n = \binom{n+1}{4}.$$

$\square$

Παράδειγμα 3.6 (Μια χρήσιμη ταυτότητα για σειρές). Για $|x| < 1$ ισχύει

$$\sum_{n \geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}. \tag{8}$$

Παραγωγίζοντας k φορές ως προς x, παίρνουμε

$$\sum_{n\geq k} n(n-1)\cdots(n-k+1)\,x^{n-k} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}.$$

Αντικαθιστώντας n από $n+k$ και διαιρώντας με $k!$ προκύπτει η ταυτότητα

$$\sum_{n\geq 0} \binom{n+k}{k} x^n = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}, \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

Παράδειγμα 3.7. Με τις ίδιες n ημέρες, η Κοσμήτορας χωρίζει πάλι το εξάμηνο σε δύο μέρη, και τώρα (αντί για αργίες) επιλέγει *μερικές* ημέρες για ανεξάρτητη μελέτη και στα δύο μέρη (επιτρέπεται να μη διαλέξει καμία ημέρα σε κάποιο μέρος). Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να σχεδιάσει το εξάμηνο;

Απόδειξη. Θέτουμε g_n το ζητούμενο πλήθος.

Αν το πρώτο μέρος έχει k ημέρες, τότε ο αριθμός τρόπων να διαλέξουμε *ένα υποσύνολο* ημερών για μελέτη μέσα σε αυτές τις k ημέρες είναι 2^k. Αν το δεύτερο μέρος έχει $m = n-k$ ημέρες, τότε αντίστοιχα υπάρχουν 2^m τρόποι. Άρα για δεδομένο k έχουμε $2^k \cdot 2^{n-k} = 2^n$ τρόπους.

Αν θεωρήσουμε ότι το k μπορεί να πάρει όλες τις τιμές $0, 1, \ldots, n$, τότε υπάρχουν $n+1$ επιλογές για το σημείο διάσπασης, οπότε

$$g_n = (n+1)\,2^n.$$

(Με γεννήτριες συναρτήσεις). Η ακολουθία $c_k = 2^k$ $(k \geq 0)$ έχει γεννήτρια

$$C(x) = \sum_{k\geq 0} 2^k x^k = \frac{1}{1-2x}.$$

Το ζητούμενο είναι συνέλιξη της c_k με τον εαυτό της, άρα

$$G(x) := \sum_{n\geq 0} g_n x^n = C(x)^2 = \frac{1}{(1-2x)^2}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{1}{(1-2x)^2} = \frac{1}{2}\,\frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{1-2x}\Big) = \frac{1}{2}\,\frac{d}{dx}\Big(\sum_{n\geq 0} 2^n x^n\Big) = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1} n\cdot 2^n x^{n-1} = \sum_{n\geq 0}(n+1)2^n x^n,$$

άρα $g_n = (n+1)2^n$, όπως πριν. □

Παράδειγμα 3.8. Αν $p_{\leq k}(n)$ συμβολίζει το πλήθος των διαμερίσεων του n σε μέρη μεγέθους $\leq k$, τότε

$$\sum_{n\geq 0} p_{\leq k}(n)\,x^n = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1-x^i} = \big(1+x+x^2+x^3+\cdots\big)\big(1+x^2+x^4+x^6+\cdots\big)\cdots\big(1+x^k+x^{2k}+x^{3k}+\cdots\big).$$

Απόδειξη. Θα εξηγήσουμε γιατί ο συντελεστής του x^n στο δεξί μέλος είναι $p_{\leq k}(n)$.

Αναπτύσσοντας το γινόμενο

$$\prod_{i=1}^{k} \big(1 + x^i + x^{2i} + x^{3i} + \cdots\big),$$

κάθε όρος που προκύπτει επιλέγει από τον i-οστό παράγοντα μια δύναμη x^{ij_i} για κάποιο $j_i \geq 0$. Ο συνολικός εκθέτης είναι

$$1 \cdot j_1 + 2 \cdot j_2 + \cdots + k \cdot j_k.$$

Άρα ο συντελεστής του x^n μετρά ακριβώς τα k-αδες $(j_1, \ldots, j_k)$ με $j_i \geq 0$ και

$$1j_1 + 2j_2 + \cdots + kj_k = n \iff 1 + 1 + \ldots + 1 + 2 + 2 + \ldots + 2 + \ldots + k + k + \ldots + k = n.$$

Αλλά αυτό ισοδυναμεί με διαμέριση του n στην οποία εμφανίζεται το μέρος i ακριβώς j_i φορές. Επομένως, μετράμε όλες τις διαμερίσεις του n σε μέρη $\leq k$, δηλαδή $p_{\leq k}(n)$. □

Παράδειγμα 3.9. Αν $p(n)$ είναι το πλήθος όλων των διαμερίσεων του n, τότε

$$\sum_{n \geq 0} p(n)\, x^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^k} = \big(1 + x + x^2 + \cdots\big)\big(1 + x^2 + x^4 + \cdots\big)\big(1 + x^3 + x^6 + \cdots\big) \cdots.$$

Απόδειξη. Ακριβώς όπως στο παραπάνω Παράδειγμα, μόνο που τώρα δεν υπάρχει άνω φράγμα στο μέγεθος των μερών, άρα εμφανίζονται άπειροι παράγοντες. Ο συντελεστής του x^n αντιστοιχεί στο πλήθος τρόπων να γράψουμε

$$n = 1j_1 + 2j_2 + 3j_3 + \cdots \quad (j_i \geq 0, \text{ όλα μηδέν τελικά}),$$

δηλαδή στο πλήθος των διαμερίσεων του n. □

Παράδειγμα 3.10. Το πλήθος $p_{\text{odd}}(n)$ των διαμερίσεων του n σε *περιττά* μέρη είναι ίσο με το πλήθος $p_{\text{dist}}(n)$ των διαμερίσεων του n σε *διαφορετικά* (άνισα) μέρη.

Απόδειξη. Η βασική ιδέα είναι ότι αρκεί να δείξουμε πως οι γεννήτριες συναρτήσεις των δύο ακολουθιών είναι ίδιες.

(Περιττά μέρη). Αν επιτρέπονται μόνο περιττά μέρη $1, 3, 5, \ldots$, τότε για κάθε περιττό i μπορούμε να πάρουμε $0, 1, 2, \ldots$ φορές το μέρος i. Άρα η γεννήτρια συνάρτηση είναι

$$F(x) = \sum_{n \geq 0} p_{\text{odd}}(n)\, x^n = \prod_{\substack{i \geq 1 \\ i \text{ περιττό}}} \frac{1}{1 - x^i}.$$

(Διαφορετικά μέρη). Αν τα μέρη πρέπει να είναι όλα διαφορετικά, τότε για κάθε $i \geq 1$ είτε παίρνουμε το μέρος i μία φορά είτε δεν το παίρνουμε καθόλου. Άρα ο i-οστός παράγοντας είναι $(1 + x^i)$ και

$$G(x) = \sum_{n \geq 0} p_{\text{dist}}(n)\, x^n = \prod_{i \geq 1} (1 + x^i).$$

Χρησιμοποιούμε τώρα την ταυτότητα

$$1 + x^i = \frac{1 - x^{2i}}{1 - x^i}.$$

Άρα

$$G(x) = \prod_{i \geq 1} \frac{1 - x^{2i}}{1 - x^i} = \frac{\prod_{i \geq 1}(1 - x^{2i})}{\prod_{i \geq 1}(1 - x^i)}.$$

Στο κλάσμα αυτό απαλείφονται όλοι οι «άρτιοι» παράγοντες του παρονομαστή με το γινόμενο του αριθμητή, και μένει

$$G(x) = \prod_{\substack{i \geq 1 \\ i \text{ περιττό}}} \frac{1}{1 - x^i} = F(x).$$

Άρα οι συντελεστές των x^n στα $F(x)$ και $G(x)$ είναι ίσοι για κάθε n, δηλαδή $p_{\text{odd}}(n) = p_{\text{dist}}(n)$. □

Άσκηση 17. Έστω $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε να υπάρχουν δύο *διαφορετικά* σύνολα ακεραίων

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}, \qquad B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\},$$

με την ιδιότητα ότι τα *πολυσύνολα* (multisets) των αθροισμάτων ανά δύο συμπίπτουν, δηλαδή

$$\{a_i + a_j : \ 1 \le i < j \le n\} \ \text{ και } \ \{b_i + b_j : \ 1 \le i < j \le n\}$$

είναι ίσα ως πολυσύνολα. Να αποδείξετε ότι ο n είναι δύναμη του 2.

Απόδειξη. Θεωρούμε τα πολυώνυμα (γεννήτριες συναρτήσεις)

$$f(X) = \sum_{i=1}^{n} X^{a_i}, \qquad g(X) = \sum_{i=1}^{n} X^{b_i}.$$

Από την υπόθεση ότι τα πολυσύνολα των αθροισμάτων $a_i + a_j$ και $b_i + b_j$ (για $i < j$) συμπίπτουν, έχουμε ισότητα πολυωνύμων

$$\sum_{1 \le i < j \le n} X^{a_i + a_j} = \sum_{1 \le i < j \le n} X^{b_i + b_j}.$$

Υπολογίζουμε τώρα τα τετράγωνα:

$$f(X)^2 = \Big(\sum_{i=1}^{n} X^{a_i} \Big)^2 = \sum_{i=1}^{n} X^{2a_i} + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} X^{a_i + a_j},$$

και αντίστοιχα

$$g(X)^2 = \sum_{i=1}^{n} X^{2b_i} + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} X^{b_i + b_j}.$$

Αφαιρώντας κατά μέλη και χρησιμοποιώντας την ισότητα των «σταυρωτών» όρων, παίρνουμε

$$f(X)^2 - g(X)^2 = \sum_{i=1}^{n} X^{2a_i} - \sum_{i=1}^{n} X^{2b_i}.$$

Όμως

$$\sum_{i=1}^{n} X^{2a_i} = \sum_{i=1}^{n} (X^2)^{a_i} = f(X^2), \qquad \sum_{i=1}^{n} X^{2b_i} = g(X^2),$$

άρα

$$f(X)^2 - g(X)^2 = f(X^2) - g(X^2).$$

Ισοδύναμα,

$$\big(f(X) - g(X)\big)\big(f(X) + g(X)\big) = f(X^2) - g(X^2). \tag{10}$$

Παρατηρούμε ότι $f(1) = g(1) = n$, άρα $f(1) - g(1) = 0$ και συνεπώς το $X - 1$ διαιρεί το $f(X) - g(X)$. Έστω $k \ge 1$ η μέγιστη δύναμη ώστε $(X-1)^k \mid (f(X) - g(X))$. Τότε γράφουμε

$$f(X) - g(X) = (X-1)^k h(X), \qquad \text{με } h(1) \neq 0.$$

Αντικαθιστώντας $X \mapsto X^2$ παίρνουμε

$$f(X^2) - g(X^2) = (X^2 - 1)^k h(X^2) = (X-1)^k (X+1)^k h(X^2).$$

Με βάση τη (10) έχουμε λοιπόν

$$(X-1)^k h(X)\big(f(X) + g(X)\big) = (X-1)^k (X+1)^k h(X^2).$$

Διαιρούμε με $(X-1)^k$ και καταλήγουμε στην ταυτότητα

$$h(X)\big(f(X)+g(X)\big) = (X+1)^k h(X^2).$$

Θέτουμε τώρα $X=1$. Τότε $f(1)+g(1) = n+n = 2n$ και $h(1) \neq 0$, άρα

$$h(1)\cdot 2n = (1+1)^k h(1) = 2^k h(1).$$

Απλοποιώντας με $h(1)$ παίρνουμε $2n = 2^k$, δηλαδή

$$n = 2^{k-1},$$

οπότε ο n είναι δύναμη του 2, όπως ζητήθηκε. □

Ορισμός 3.11 (Οι αριθμοί Catalan). Ο n-οστός αριθμός Catalan $(C_n)_{n\geq 0}$ ορίζεται αναδρομικά από

$$C_0 = 1 \qquad \text{και} \qquad C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_i\, C_{n-i} \quad (n \geq 0).$$

Οι πρώτοι όροι είναι

$$1,\ 1,\ 2,\ 5,\ 14,\ 42,\ 132,\ 429,\ 1430,\ 4862, \ldots$$

Θεώρημα 3.12 (Κλειστός τύπος για τους C_n). *Για κάθε $n \geq 0$ ισχύει*

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε *γεννήτριες συναρτήσεις*. Θέτουμε

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} C_n z^n.$$

Τότε

$$f(z)^2 = \Big(\sum_{n\geq 0} C_n z^n\Big)\Big(\sum_{n\geq 0} C_n z^n\Big) = \sum_{n\geq 0}\Big(\sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i}\Big) z^n.$$

Με τον ορισμό των Catalan, $\sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i} = C_{n+1}$, άρα

$$f(z)^2 = \sum_{n\geq 0} C_{n+1} z^n.$$

Από την άλλη,

$$\sum_{n\geq 0} C_{n+1} z^n = \frac{f(z) - C_0}{z} = \frac{f(z)-1}{z}.$$

Επομένως

$$z\, f(z)^2 = f(z) - 1, \qquad \text{δηλ.} \qquad z f(z)^2 - f(z) + 1 = 0.$$

Λύνοντας ως προς $f(z)$ παίρνουμε

$$f(z) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4z}}{2z}.$$

Επειδή $f(0) = C_0 = 1$, επιλέγουμε το $(-)$, αφού

$$\lim_{z\to 0} \frac{1+\sqrt{1-4z}}{2z} = +\infty, \qquad \lim_{z\to 0} \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z} = 1.$$

Άρα

$$f(z) = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z}.$$

Τώρα αναπτύσσουμε με το γενικευμένο διωνυμικό:

$$\sqrt{1-4z} = (1-4z)^{1/2} = \sum_{n\geq 0} \binom{1/2}{n} (-4z)^n.$$

Για $n \geq 1$,

$$\binom{1/2}{n} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!} = (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2^n\, n!}.$$

Άρα (για $n \geq 1$) ο συντελεστής του z^n στο $\sqrt{1-4z}$ είναι

$$\binom{1/2}{n}(-4)^n = (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2^n n!}\cdot(-1)^n 4^n = -\frac{2^n(2n-3)!!}{n!},$$

όπου $(2n-3)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)$. Επομένως

$$\sqrt{1-4z} = 1 - \sum_{n\geq 1} \frac{2^n(2n-3)!!}{n!}\, z^n,$$

και άρα

$$f(z) = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z} = \sum_{n\geq 1} \frac{2^{n-1}(2n-3)!!}{n!}\, z^{n-1} = \sum_{m\geq 0} \frac{2^m(2m-1)!!}{(m+1)!}\, z^m.$$

(Χρησιμοποιούμε τη σύμβαση $(-1)!! = 1$ ώστε να καλύπτεται και η περίπτωση $m = 0$.) Άρα

$$C_m = \frac{2^m(2m-1)!!}{(m+1)!}.$$

Τέλος, επειδή $(2m)! = (2m)!!\,(2m-1)!!$ και $(2m)!! = 2^m m!$, έχουμε

$$(2m-1)!! = \frac{(2m)!}{2^m m!},$$

οπότε

$$C_m = \frac{2^m}{(m+1)!}\cdot\frac{(2m)!}{2^m m!} = \frac{(2m)!}{m!(m+1)!} = \frac{1}{m+1}\binom{2m}{m}.$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Παράδειγμα 3.13 (Τριγωνοποιήσεις κυρτού πολυγώνου). Πόσες *τριγωνοποιήσεις* υπάρχουν για ένα κυρτό n-γωνο; (Με «τριγωνοποίηση» εννοούμε έναν τρόπο να χωρίσουμε το πολύγωνο σε τρίγωνα με διαγωνίους, χωρίς να προσθέτουμε νέα σημεία κορυφών.)

Για παράδειγμα, για $n = 3$ υπάρχει προφανώς 1 τριγωνοποίηση, για $n = 4$ υπάρχουν 2, για $n = 5$ υπάρχουν 5, και για $n = 6$ υπάρχουν 14. Θα δείξουμε ότι γενικά ο αριθμός των τριγωνοποιήσεων ενός κυρτού n-γώνου είναι

$$C_{n-2},$$

όπου $(C_m)_{m\geq 0}$ είναι οι αριθμοί Catalan.

Απόδειξη. Έστω T_n ο αριθμός των τριγωνοποιήσεων ενός κυρτού n-γώνου. Θέτουμε επίσης (για ευκολία) $T_2 = 1$. (Η τιμή αυτή είναι «τεχνητή», αλλά κάνει την αναδρομή να γράφεται όμορφα.)

Πάρε ένα κυρτό n-γωνο με κορυφές $v_1, v_2, \dots, v_n$ με αυτή τη σειρά. Σταθεροποιούμε την πλευρά v_1v_n. Σε κάθε τριγωνοποίηση, η πλευρά v_1v_n ανήκει σε *ακριβώς ένα* τρίγωνο· άρα υπάρχει μοναδική κορυφή v_k με $2 \le k \le n-1$ ώστε το τρίγωνο αυτό να είναι (v_1, v_k, v_n).

Η διαγώνιος v_1v_k και η διαγώνιος v_kv_n (όταν δεν είναι πλευρές) χωρίζουν το n-γωνο σε δύο κυρτά πολύγωνα:

- ένα k-γωνο με κορυφές $v_1, v_2, \dots, v_k$,
- και ένα $(n-k+1)$-γωνο με κορυφές $v_1, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n$.

Κάθε τριγωνοποίηση του αρχικού n-γώνου ισοδυναμεί με: (α) επιλογή του k, (β) τριγωνοποίηση του k-γώνου και (γ) τριγωνοποίηση του $(n-k+1)$-γώνου. Οι επιλογές (β) και (γ) είναι ανεξάρτητες, άρα για σταθερό k δίνουν $T_k\, T_{n-k+1}$ δυνατότητες.

Συνεπώς,

$$T_n = \sum_{k=2}^{n-1} T_k\, T_{n-k+1} \qquad (n \ge 3),$$

με αρχική τιμή $T_2 = 1$.

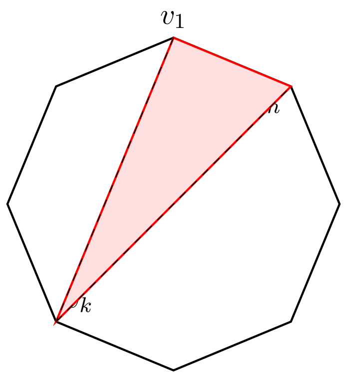
Τώρα ορίζουμε $C_m := T_{m+2}$ για $m \ge 0$. Τότε $C_0 = T_2 = 1$, και για $m \ge 0$ (δηλαδή $n = m+3$) η παραπάνω σχέση γίνεται

$$C_{m+1} = T_{m+3} = \sum_{k=2}^{m+2} T_k\, T_{m+4-k} = \sum_{i=0}^{m} C_i\, C_{m-i},$$

όπου βάλαμε $i = k-2$. Αυτή είναι ακριβώς η αναδρομή των αριθμών Catalan με $C_0 = 1$. Άρα C_m είναι ο m-οστός Catalan, και επομένως

$$T_n = C_{n-2} \qquad (n \ge 3).$$

(Ισοδύναμα, $T_n = \dfrac{1}{n-1}\binom{2n-4}{n-2}$.) $\square$



Σχήμα 4: Η πλευρά v_1v_n ανήκει σε μοναδικό τρίγωνο (v_1, v_k, v_n), που χωρίζει το n-γωνο σε δύο μικρότερα κυρτά πολύγωνα.

Πρόταση 3.14 (Αντιστοιχία διαδρομών που τέμνουν τη διαγώνιο). *Οι μονοτονικές διαδρομές πλέγματος στο $n \times n$ (δηλ. διαδρομές από $(0,0)$ στο (n,n) με βήματα Ανατολή $E = (1,0)$ και Βορρά $N = (0,1)$) που τέμνουν την ευθεία $y = x$ (δηλ. περνούν κάποια στιγμή σε σημείο με $y > x$) είναι σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία με τις μονοτονικές διαδρομές στο ορθογώνιο $(n-1) \times (n+1)$ (δηλ. από $(0,0)$ στο $(n-1, n+1)$ με τα ίδια βήματα E, N).*

Απόδειξη. Έστω P μια διαδρομή στο $n \times n$ που τέμνει τη διαγώνιο $y = x$. Θεωρούμε το *πρώτο* βήμα p του P που «περνά» τη διαγώνιο: δηλαδή το πρώτο βήμα του οποίου το τελικό σημείο ικανοποιεί $y > x$. Αναγκαστικά το p είναι ένα βήμα προς τα πάνω από σημείο της διαγωνίου (από (t,t) στο $(t,t+1)$).

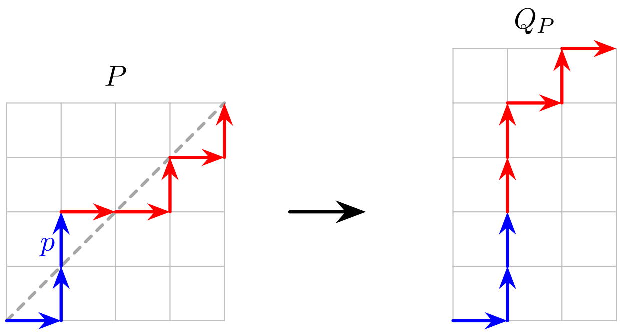
Ορίζουμε τώρα μια νέα διαδρομή Q_P ως εξής: συμφωνεί με το P μέχρι και το βήμα p, και *μετά το p* αλλάζουμε τη διεύθυνση κάθε επόμενου βήματος: κάθε E το αντικαθιστούμε με N και κάθε N το αντικαθιστούμε με E.

Θα δείξουμε ότι τότε Q_P καταλήγει στο $(n-1, n+1)$. Πράγματι, στο αρχικό ("μπλε") τμήμα του P μέχρι και το p έχουμε *ακριβώς ένα* βήμα N περισσότερο από E, διότι το τμήμα αυτό τελειώνει για πρώτη φορά σε σημείο με $y = x + 1$. Αφού συνολικά στο P υπάρχουν ακριβώς n βήματα N και n βήματα E, στο υπόλοιπο ("κόκκινο") τμήμα του P υπάρχει *ακριβώς ένα* βήμα E περισσότερο από N. Μετά την ανταλλαγή $E \leftrightarrow N$ στο κόκκινο τμήμα, το κόκκινο τμήμα του Q_P έχει *ένα* βήμα N περισσότερο από E. Άρα και τα δύο τμήματα (μπλε και κόκκινο) του Q_P έχουν «$N = E + 1$», οπότε συνολικά

$$\#N(Q_P) = \#E(Q_P) + 2.$$

Επειδή το μήκος της διαδρομής παραμένει $2n$, παίρνουμε $\#E(Q_P) = n-1$ και $\#N(Q_P) = n+1$, δηλαδή Q_P είναι διαδρομή στο $(n-1) \times (n+1)$.

Για το αντίστροφο, ξεκινάμε από μια διαδρομή Q στο $(n-1) \times (n+1)$. Εφόσον τελειώνει στο $(n-1, n+1)$, έχουμε $\#N(Q) = \#E(Q) + 2$, άρα *οπωσδήποτε* κάποια στιγμή περνά πάνω από τη διαγώνιο $y = x$. Θέτουμε p το πρώτο βήμα του Q που καταλήγει σε σημείο με $y > x$ και κάνουμε *την ίδια* ανταλλαγή $E \leftrightarrow N$ μετά το p. Με ακριβώς τον ίδιο υπολογισμό προκύπτει ότι η νέα διαδρομή έχει $\#E = \#N = n$, άρα είναι διαδρομή στο $n \times n$ και τέμνει τη διαγώνιο. Οι δύο κατασκευές είναι αντίστροφες μεταξύ τους, άρα έχουμε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία. $\square$



Παράδειγμα 3.15. Για $n \geq 0$ ορίζουμε C_n ως το πλήθος των διαδρομών από $(0,0)$ στο (n,n) με βήματα $E = (1,0)$ και $N = (0,1)$, που δεν περνούν *κάτω* από τη διαγώνιο $y = x$ (δηλαδή σε κάθε σημείο της διαδρομής ισχύει $y \geq x$).

Να αποδείξετε ότι

$$C_0 = 1 \qquad \text{και} \qquad C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k\, C_{n-k} \quad (n \geq 0).$$

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε $n \geq 0$ και παίρνουμε μια «καλή» διαδρομή P από $(0,0)$ στο $(n+1, n+1)$, πάντα με $y \geq x$.

Βήμα 1: Πρώτη επιστροφή στη διαγώνιο. Η διαδρομή ξεκινά από σημείο της διαγωνίου. Εφόσον δεν επιτρέπεται να περάσει κάτω από $y = x$, το πρώτο βήμα δεν μπορεί να είναι E (θα πήγαινε στο $(1,0)$ με $y < x$), άρα είναι N. Ομοίως, όταν η διαδρομή ξαναβρεθεί πάνω στη διαγώνιο, αυτό συμβαίνει σε κάποιο (k,k) με $1 \leq k \leq n+1$. Ορίζουμε το k ως το *ελάχιστο* τέτοιο, δηλαδή το πρώτο σημείο (μετά το $(0,0)$) όπου η P ξαναπατάει τη διαγώνιο $y = x$.

Τότε η P διασπάται μοναδικά ως

$$P = P_1 \cdot P_2,$$

όπου P_1 είναι το αρχικό τμήμα από $(0,0)$ στο (k,k) και P_2 το υπόλοιπο από (k,k) στο $(n+1, n+1)$. Από την ελαχιστικότητα του k προκύπτει ότι το P_1 *δεν* ακουμπά τη διαγώνιο σε κανένα ενδιάμεσο σημείο: δηλαδή για όλα τα ενδιάμεσα σημεία του P_1 ισχύει αυστηρά $y > x$.

Βήμα 2: Πόσες επιλογές έχει το P_1 για δεδομένο k; Έστω λοιπόν ότι έχουμε διαδρομή P_1 από $(0,0)$ στο (k,k) με $y \geq x$ και που αγγίζει τη διαγώνιο μόνο στην αρχή και στο τέλος. Τότε: - το πρώτο βήμα του P_1 είναι αναγκαστικά N, - το τελευταίο βήμα του P_1 είναι αναγκαστικά E (αλλιώς θα ερχόταν στο (k,k) από $(k,k-1)$, που είναι κάτω από τη διαγώνιο).

Ορίζουμε απεικόνιση

$$\Phi : \{\text{τέτοιες } P_1\} \to \{\text{καλές διαδρομές από } (0,0) \text{ στο } (k-1,k-1)\}$$

ως εξής: αφαιρούμε από το P_1 το πρώτο βήμα N και το τελευταίο βήμα E, και έπειτα μετατοπίζουμε όλο το υπόλοιπο τμήμα κατά $(0,-1)$ (δηλαδή κατεβάζουμε όλα τα σημεία κατά 1 στο y). Το αποτέλεσμα είναι διαδρομή με $k-1$ βήματα N και $k-1$ βήματα E, που ξεκινά από $(0,0)$ και τελειώνει στο $(k-1,k-1)$. Επιπλέον, επειδή στο ενδιάμεσο του P_1 ίσχυε $y > x$, μετά την κατακόρυφη μετατόπιση κατά -1 παίρνουμε $y \geq x$. Άρα $\Phi(P_1)$ είναι «καλή» διαδρομή μεγέθους $k-1$.

Αντίστροφα, από οποιαδήποτε καλή διαδρομή Q από $(0,0)$ στο $(k-1,k-1)$, παίρνουμε μία τέτοια P_1 ως εξής: μετατοπίζουμε το Q κατά $(0,+1)$ (το ανεβάζουμε κατά 1), προσθέτουμε στην αρχή ένα N και στο τέλος ένα E. Τότε στο ενδιάμεσο έχουμε $y > x$, άρα η νέα διαδρομή ακουμπά τη διαγώνιο μόνο στα άκρα και καταλήγει στο (k,k). Έτσι η Φ είναι αμφιμονοσήμαντη και συνεπώς

$$\#\{P_1 \text{ από } (0,0) \text{ στο } (k,k) \text{ με πρώτη επιστροφή στο } (k,k)\} = C_{k-1}.$$

Βήμα 3: Πόσες επιλογές έχει το P_2; Για δεδομένο k, το P_2 είναι απλώς *οποιαδήποτε* καλή διαδρομή από (k,k) στο $(n+1,n+1)$. Με μετατόπιση κατά $(-k,-k)$ αυτό ισοδυναμεί με καλή διαδρομή από $(0,0)$ στο $(n+1-k, n+1-k)$, άρα υπάρχουν C_{n+1-k} επιλογές.

Βήμα 4: Άθροιση ως προς k. Για κάθε $k \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$ οι επιλογές για P_1 και P_2 είναι ανεξάρτητες, άρα για αυτό το k υπάρχουν $C_{k-1}\, C_{n+1-k}$ διαδρομές. Επειδή το k (η πρώτη επιστροφή στη διαγώνιο) είναι μοναδικό, οι κλάσεις για διαφορετικά k είναι ξένες και παίρνουμε

$$C_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} C_{k-1}\, C_{n+1-k}.$$

Θέτοντας $j = k-1$ (οπότε $j = 0, 1, \ldots, n$) καταλήγουμε

$$C_{n+1} = \sum_{j=0}^{n} C_j\, C_{n-j},$$

όπως ζητήθηκε. Η αρχική τιμή $C_0 = 1$ αντιστοιχεί στη μοναδική «κενή» διαδρομή από $(0,0)$ στο $(0,0)$. □

Παράδειγμα 3.16 (Διαμερισμοί γραμμής και επιλογή υπομονάδων). Όλοι οι n στρατιώτες μιας διμοιρίας στέκονται σε μια γραμμή. Ο αξιωματικός χωρίζει τη γραμμή σε μερικά σημεία, σχηματίζοντας μικρότερες (μη κενές) διαδοχικές ομάδες. Έπειτα επιλέγει ένα (ενδεχομένως κενό) υποσύνολο από τις ομάδες που σχηματίστηκαν, για να φύγουν από υπηρεσία. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να το κάνει αυτό;

Απόδειξη. Αν η γραμμή χωριστεί σε k (μη κενές) διαδοχικές ομάδες, τότε οι αριθμοί των μελών τους δίνουν μια *διάταξη* θετικών ακεραίων

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k, \qquad n_i \geq 1,$$

δηλαδή μια σύνθεση του n σε k μέρη. Αφού σχηματιστούν οι k ομάδες, ο αξιωματικός διαλέγει ένα υποσύνολο τους για να φύγουν, άρα για κάθε ομάδα υπάρχουν 2 επιλογές (φεύγει / δεν φεύγει), ανεξάρτητα από τις άλλες.

Άρα, ισοδύναμα, μετράμε *ακολουθίες* από «χρωματισμένα» μέρη: κάθε μέρος έχει μέγεθος $m \geq 1$ και επιπλέον μια από 2 καταστάσεις (επιλεγμένο ή όχι). Η γεννήτρια συνάρτηση για *μία* ομάδα είναι

$$2(x + x^2 + x^3 + \cdots) = \frac{2x}{1-x},$$

επειδή για κάθε μέγεθος $m \geq 1$ υπάρχουν 2 επιλογές κατάστασης.

Για k ομάδες, η γεννήτρια είναι $\left(\frac{2x}{1-x}\right)^k$. Επειδή k μπορεί να είναι οποιοσδήποτε ακέραιος ≥ 1, η συνολική γεννήτρια είναι

$$F(x) = \sum_{k\geq 1} \left(\frac{2x}{1-x}\right)^k = \frac{\frac{2x}{1-x}}{1 - \frac{2x}{1-x}} = \frac{2x}{1-3x}.$$

Άρα ο ζητούμενος αριθμός είναι ο συντελεστής του x^n στο $F(x)$. Εφόσον

$$\frac{2x}{1-3x} = 2x \sum_{t\geq 0} (3x)^t = \sum_{t\geq 0} 2 \cdot 3^t \, x^{t+1},$$

παίρνουμε

$$[x^n]\, F(x) = 2 \cdot 3^{n-1}.$$

Επομένως, οι τρόποι είναι $2 \cdot 3^{n-1}$. □

Άσκηση 18. *Είναι δυνατόν να χωρίσουμε το σύνολο όλων των 12-ψηφίων αριθμών (επιτρέπονται αρχικά μηδενικά) σε ομάδες των 4 αριθμών, έτσι ώστε, σε κάθε ομάδα, οι τέσσερις αριθμοί να έχουν τα ίδια ψηφία στις 11 θέσεις και στην εναπομείνασα θέση να εμφανίζονται τέσσερα διαδοχικά ψηφία (με κάποια σειρά);*

Απόδειξη. Η απάντηση είναι αρνητική. Υποθέτουμε προς άτοπο ότι υπάρχει τέτοια διαμέριση.

Έστω A το σύνολο όλων των 12-ψηφίων ακολουθιών ψηφίων (δηλ. αριθμών με επιτρεπτά αρχικά μηδενικά). Για $a \in A$ συμβολίζουμε με $s(a)$ το άθροισμα των ψηφίων του a. Θεωρούμε το πολυώνυμο

$$f(X) = \sum_{a\in A} X^{s(a)}.$$

Έστω ότι η διαμέριση αποτελείται από ομάδες $G_1, \ldots, G_k$, καθεμία με 4 στοιχεία. Πάρε μια ομάδα G_i. Από την υπόθεση, οι τέσσερις αριθμοί συμφωνούν σε 11 θέσεις, ενώ σε μία θέση τα ψηφία είναι $d, d+1, d+2, d+3$ (για κάποιο $d \in \{0, 1, \ldots, 6\}$). Άρα, οι τιμές του $s(a)$ για $a \in G_i$ διαφέρουν κατά $0, 1, 2, 3$ (αφού μόνο ένα ψηφίο αλλάζει και αλλάζει κατά $0, 1, 2, 3$). Επομένως, υπάρχει ακέραιος t_i ώστε

$$\sum_{a\in G_i} X^{s(a)} = X^{t_i}\,(1 + X + X^2 + X^3),$$

δηλαδή $\sum_{a\in G_i} X^{s(a)}$ είναι πολλαπλάσιο του $1 + X + X^2 + X^3$.

Αθροίζοντας σε όλες τις ομάδες, παίρνουμε

$$f(X) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{a \in G_i} X^{s(a)},$$

άρα το $f(X)$ είναι επίσης πολλαπλάσιο του $1 + X + X^2 + X^3$.

Όμως μπορούμε να υπολογίσουμε το $f(X)$ κλειστά. Κάθε μία από τις 12 θέσεις μπορεί να πάρει ψηφίο $0, 1, \ldots, 9$, οπότε για κάθε θέση η συνεισφορά στη γεννήτρια είναι $(1+X+\cdots+X^9)$, και άρα

$$f(X) = (1 + X + \cdots + X^9)^{12} = \left(\frac{X^{10} - 1}{X - 1}\right)^{12}.$$

Το πολυώνυμο $1 + X + X^2 + X^3$ έχει ρίζα τον μιγαδικό i (και τον $-i$). Αλλά

$$f(i) = (1 + i + i^2 + \cdots + i^9)^{12},$$

και επειδή $1 + i + i^2 + i^3 = 0$ έχουμε

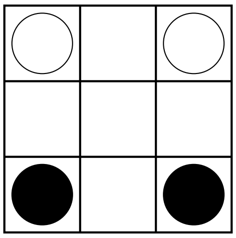
$$1+i+i^2+\cdots+i^9 = (1+i+i^2+i^3)+(i^4+i^5+i^6+i^7)+(i^8+i^9) = 0+0+(1+i) = 1+i \neq 0.$$

Άρα $f(i) = (1 + i)^{12} \neq 0$, οπότε το $1 + X + X^2 + X^3$ *δεν* διαιρεί το $f(X)$. Αυτό αντιφάσκει με το συμπέρασμα ότι $f(X)$ είναι πολλαπλάσιο του $1 + X + X^2 + X^3$.

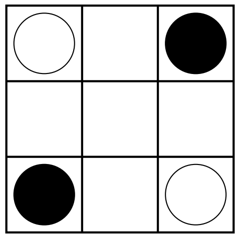
Η αντίφαση δείχνει ότι τέτοια διαμέριση δεν υπάρχει. □

4 Γραφήματα

Παράδειγμα 4.1 (Ιπποι σε πίνακα 3×3). Σε έναν πίνακα 3×3 βρίσκονται τέσσερις ίπποι, όπως στο Σχήμα 5. Μπορούν, με τις συνηθισμένες κινήσεις του ίππου στο σκάκι, να μεταφερθούν στη θέση του Σχήματος 6;



Σχήμα 5: Αρχική θέση



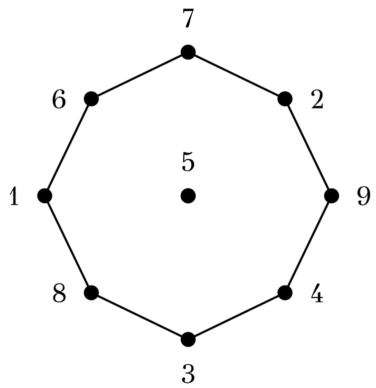
Σχήμα 6: Τελική θέση

Απόδειξη. Η απάντηση είναι αρνητική.

Αριθμούμε πρώτα τα τετράγωνα του πίνακα όπως στο Σχήμα 7. Έπειτα κατασκευάζουμε έναν γράφο ως εξής: κάθε τετράγωνο αντιστοιχεί σε μία κορυφή, και δύο κορυφές ενώνονται με ακμή αν ο ίππος μπορεί να μετακινηθεί από το ένα αντίστοιχο τετράγωνο στο άλλο με μία κίνηση. Ο γράφος που προκύπτει φαίνεται στο Σχήμα 8.

1	4	7
2	5	8
3	6	9

Σχήμα 7: Αρίθμηση των τετραγώνων



Σχήμα 8: Ο γράφος των επιτρεπτών κινήσεων

Παρατηρούμε ότι η κορυφή 5 είναι απομονωμένη, ενώ οι υπόλοιπες οκτώ κορυφές σχηματίζουν έναν κύκλο μήκους 8. Άρα κάθε ίππος κινείται μόνο πάνω σε αυτόν τον κύκλο.

Αν τοποθετήσουμε πάνω στον κύκλο τις αρχικές και τις τελικές θέσεις των τεσσάρων ίππων, παίρνουμε τα δύο διαγράμματα του Σχήματος 9. Στην αρχική θέση, αν διαβάσουμε τις κατειλημμένες κορυφές γύρω από τον κύκλο, η κυκλική σειρά είναι

λευκός, λευκός, μαύρος, μαύρος.

Στην τελική θέση η κυκλική σειρά είναι

λευκός, μαύρος, λευκός, μαύρος.

Αρχική διάταξη πάνω στον κύκλο   Τελική διάταξη πάνω στον κύκλο

Σχήμα 9: Οι ίπποι ως θέσεις πάνω στον κύκλο

Όμως μία νόμιμη κίνηση μεταφέρει έναν ίππο σε γειτονική *κενή* κορυφή του κύκλου. Άρα κανένας ίππος δεν μπορεί να «περάσει» πάνω από άλλον, και επομένως η κυκλική σειρά των τεσσάρων ίππων παραμένει αναλλοίωτη σε κάθε ακολουθία κινήσεων.

Εφόσον η αρχική και η τελική διάταξη έχουν διαφορετική κυκλική σειρά, η μετάβαση από το Σχήμα 5 στο Σχήμα 6 είναι αδύνατη. □

Παραπάνω μετατρέψαμε το πρόβλημα σε μια διάταξη με κορυφές και ακμές, στην οποία το μόνο που μας ενδιαφέρει είναι η σύνδεση των κορυφών με ακμές. Αυτή είναι η έννοια του γραφήματος, του οποίου δίνουμε τον αυστηρό ορισμό.

Ορισμός 4.2. Γράφημα ή Γράφος λέγεται μια τριάδα $G = (V, E, \varphi)$, όπου V και E είναι σύνολα, τα στοιχεία των οποίων λέγονται *κορυφές* και *ακμές* του G, αντιστοίχως, και

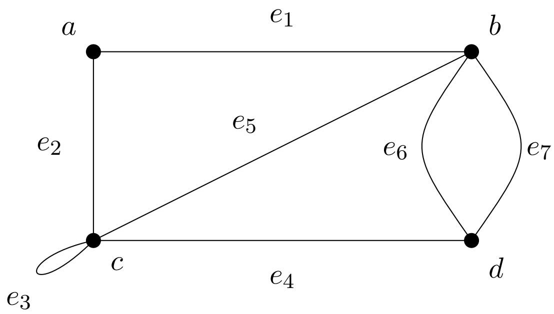
$$\varphi : E \to \big\{\{a, b\} : a, b \in V\big\}$$

είναι απεικόνιση από το E στο σύνολο των υποσυνόλων του V με ένα ή δύο στοιχεία. Αν $e \in E$ και $\varphi(e) = \{a, b\}$, τότε οι κορυφές a, b λέγονται *άκρα* της ακμής e.

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε μόνο πεπερασμένα γραφήματα, δηλαδή γραφήματα με πεπερασμένα σύνολα κορυφών και ακμών. Στο Σχήμα 10 απεικονίζεται ένα γράφημα $G = (V, E, \varphi)$ με σύνολο κορυφών $V = \{a, b, c, d\}$ και επτά ακμές, για το οποίο ισχύουν

$$\varphi(e_1) = \{a, b\}, \qquad \varphi(e_2) = \{a, c\}, \qquad \varphi(e_3) = \{c\},$$

και ούτω καθεξής.



Σχήμα 10: Ένα γράφημα με τέσσερις κορυφές.

Θα χρησιμοποιήσουμε την ακόλουθη ορολογία για ένα γράφημα $G = (V, E, \varphi)$.

Λέμε ότι δύο κορυφές $a, b \in V$ είναι *γειτονικές*, και ότι *συνδέονται με ακμή*, στο G, αν υπάρχει $e \in E$ με $\varphi(e) = \{a, b\}$.

Μια ακμή $e \in E$ με άκρα a και b λέγεται *θηλιά* (ή *βρόχος*) αν $a = b$.

Δύο ακμές $e_1, e_2 \in E$ λέγονται *παράλληλες* αν

$$\varphi(e_1) = \varphi(e_2) = \{a, b\}$$

για διακεκριμένες κορυφές a, b.

Το γράφημα G λέγεται *απλό* αν δεν έχει θηλιές ή παράλληλες ακμές. Στην περίπτωση αυτή ταυτίζουμε μια ακμή $e \in E$ με το σύνολο $\{a, b\}$ των δύο άκρων της a, b.

Το πλήθος των ακμών του G που δεν είναι θηλιές και έχουν ένα από τα δύο άκρα τους ίσο με v λέγεται *βαθμός* της κορυφής v και συμβολίζεται με $\deg(v)$.

Η κορυφή v λέγεται *απομονωμένη* αν $\deg(v) = 0$, και *άρτια* ή *περιττή* αν ο βαθμός της v είναι άρτιος ή περιττός ακέραιος, αντιστοίχως.

Στο γράφημα του Σχήματος 10 η ακμή e_3 είναι θηλιά, οι e_6, e_7 είναι παράλληλες και οι κορυφές a, b, c, d έχουν βαθμούς $2, 4, 3, 3$, αντιστοίχως.

Θα μπορούσαμε να σχεδιάσουμε αλλιώς το γράφημα από το αρχικό παράδειγμα με την τοποθέτηση των ίππων; Η απάντηση είναι ναι, γιατί το μόνο που μας ενδιαφέρει είναι τα ονόματα που έχουν έχουν οι κορυφές και ποιες συνδέονται μεταξύ τους.

Ορισμός 4.3. Δύο γραφήματα

$$G_1 = (V_1, E_1, \varphi_1) \qquad \text{και} \qquad G_2 = (V_2, E_2, \varphi_2)$$

λέγονται *ισόμορφα* αν υπάρχουν αμφιμονοσήμαντες απεικονίσεις

$$f : V_1 \to V_2 \qquad \text{και} \qquad g : E_1 \to E_2,$$

τέτοιες ώστε για όλα τα $a, b \in V_1$ και $e \in E_1$ να ισχύει

$$\varphi_1(e) = \{a, b\} \iff \varphi_2\big(g(e)\big) = \{f(a), f(b)\}.$$

Ειδικότερα, δύο απλά γραφήματα

$$G_1 = (V_1, E_1) \qquad \text{και} \qquad G_2 = (V_2, E_2)$$

είναι ισόμορφα αν υπάρχει αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση

$$f : V_1 \to V_2,$$

τέτοια ώστε για όλα τα $a, b \in V_1$ να ισχύει

$$\{a, b\} \in E_1 \iff \{f(a), f(b)\} \in E_2.$$

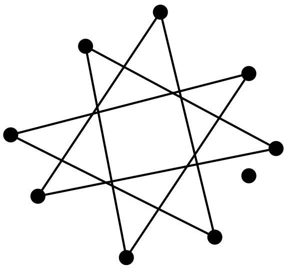
Μια τέτοια απεικόνιση f λέγεται *ισομορφισμός γραφημάτων*.

Αφήνεται στον αναγνώστη να βεβαιωθεί ότι η σχέση του ισομορφισμού είναι σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των γραφημάτων. Οι κλάσεις ισοδυναμίας της σχέσης αυτής λέγονται *κλάσεις ισομορφισμού γραφημάτων*.

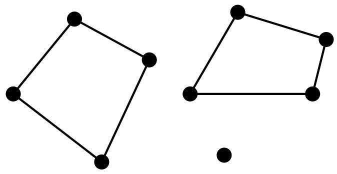
Ορισμός 4.4 (Υπογράφος). Ένας γράφος $G = (V, E)$ *περιέχει* έναν γράφο $G' = (V', E')$, ή ισοδύναμα ο G' είναι *υπογράφος* του G, αν

$$V' \subseteq V \qquad \text{και} \qquad E' \subseteq E.$$

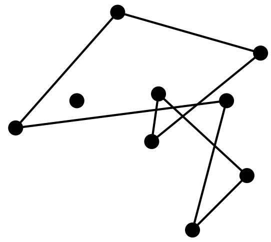
Παράδειγμα 4.5 (Ισομορφικοί γράφοι). Να βρεθεί ποιοι από τους γράφους των Σχημάτων 11, 12 και 13 είναι ισόμορφοι με τον γράφο του Σχήματος 8.



Σχήμα 11: Πρώτος υποψήφιος γράφος



Σχήμα 12: Δεύτερος υποψήφιος γράφος



Σχήμα 13: Τρίτος υποψήφιος γράφος

Απόδειξη. Ο γράφος του Σχήματος 8 αποτελείται από μία απομονωμένη κορυφή και από έναν κύκλο μήκους 8.

Το ίδιο ακριβώς ισχύει για τους γράφους των Σχημάτων 11 και 13. Άρα οι γράφοι αυτοί είναι ισομορφικοί με τον γράφο του Σχήματος 8.

Αντίθετα, ο γράφος του Σχήματος 12 αποτελείται από μία απομονωμένη κορυφή και από *δύο* ξένους κύκλους μήκους 4. Επομένως δεν μπορεί να είναι ισομορφικός με έναν γράφο που έχει μία μόνο μη τετριμμένη συνιστώσα, και μάλιστα κύκλο μήκους 8.

Συνεπώς, οι ισομορφικοί με το Σχήμα 8 είναι ο πρώτος και ο τρίτος γράφος. □

Παράδειγμα 4.6. Στο Smallville υπάρχουν 15 τηλέφωνα. Μπορούν να συνδεθούν με καλώδια έτσι ώστε κάθε τηλέφωνο να συνδέεται με ακριβώς 5 άλλα;

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι αυτό είναι δυνατό.

Θεωρούμε τον γράφο του οποίου οι κορυφές παριστάνουν τα τηλέφωνα και οι ακμές παριστάνουν τα καλώδια. Ο γράφος αυτός έχει 15 κορυφές και καθεμία έχει βαθμό 5.

Προσθέτουμε τους βαθμούς όλων των κορυφών. Το άθροισμα είναι $15 \cdot 5$. Όμως κάθε ακμή μετριέται δύο φορές σε αυτό το άθροισμα, αφού έχει δύο άκρα. Άρα ο αριθμός των ακμών πρέπει να είναι

$$\frac{15 \cdot 5}{2}.$$

Αλλά αυτός ο αριθμός δεν είναι ακέραιος. Άρα ένας τέτοιος γράφος δεν μπορεί να υπάρχει. □

Παρατήρηση 4.7. Λύνοντας αυτό το πρόβλημα, δείξαμε πώς μπορούμε να μετράμε τις ακμές ενός γράφου όταν γνωρίζουμε τους βαθμούς όλων των κορυφών: προσθέτουμε τους βαθμούς όλων των κορυφών και διαιρούμε διά 2.

Παράδειγμα 4.8 (Δρόμοι σε ένα βασίλειο)**.** Σε ένα βασίλειο υπάρχουν 100 πόλεις και από κάθε πόλη ξεκινούν 4 δρόμοι. Πόσοι δρόμοι υπάρχουν συνολικά στο βασίλειο;

Απόδειξη. Θεωρούμε τον αντίστοιχο γράφο. Έχει 100 κορυφές, καθεμία από τις οποίες έχει βαθμό 4. Άρα το άθροισμα των βαθμών είναι

$$100 \cdot 4 = 400.$$

Εφόσον κάθε ακμή μετριέται δύο φορές, ο συνολικός αριθμός δρόμων είναι

$$\frac{400}{2} = 200.$$

□

Ορισμός 4.9 (Άρτια και περιττή κορυφή)**.** Μια κορυφή λέγεται *άρτια* αν έχει άρτιο βαθμό, και *περιττή* αν έχει περιττό βαθμό.

Θεώρημα 4.10. *Το πλήθος των περιττών κορυφών οποιουδήποτε γράφου είναι άρτιος αριθμός.*

Απόδειξη. Το άθροισμα των βαθμών όλων των κορυφών ενός γράφου είναι ίσο με το διπλάσιο του αριθμού των ακμών, άρα είναι άρτιος αριθμός.

Από την άλλη, ένα άθροισμα ακεραίων είναι άρτιο αν και μόνο αν ο αριθμός των περιττών προσθετέων είναι άρτιος. Επομένως ο αριθμός των περιττών βαθμών, δηλαδή των περιττών κορυφών, είναι άρτιος. □

Ορισμός 4.11 (Συνεκτικός γράφος). Ένας γράφος λέγεται *συνεκτικός* αν οποιεσδήποτε δύο κορυφές του μπορούν να ενωθούν με μια διαδρομή.

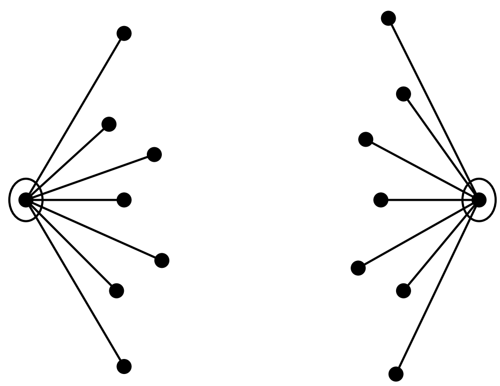
Ορισμός 4.12 (Συνεκτική συνιστώσα). Οι μέγιστοι συνεκτικοί υπογράφοι ενός γράφου λέγονται *συνεκτικές συνιστώσες*. Ισοδύναμα, είναι τα «κομμάτια» στα οποία διασπάται ένας γράφος, έτσι ώστε μέσα σε κάθε κομμάτι κάθε δύο κορυφές να συνδέονται με διαδρομή.

Παράδειγμα 4.13 (Η χώρα του Επτά). Στη χώρα του Επτά υπάρχουν 15 πόλεις, καθεμία από τις οποίες είναι συνδεδεμένη με τουλάχιστον 7 άλλες. Να αποδείξετε ότι μπορεί κανείς να ταξιδέψει από οποιαδήποτε πόλη σε οποιαδήποτε άλλη, ίσως περνώντας από ενδιάμεσες πόλεις.

Απόδειξη. Θεωρούμε δύο οποιεσδήποτε πόλεις και υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει διαδρομή που να τις συνδέει.

Τότε καθεμία από τις δύο πόλεις είναι συνδεδεμένη με τουλάχιστον 7 άλλες πόλεις. Αυτές οι 14 πόλεις πρέπει να είναι όλες διαφορετικές. Πράγματι, αν δύο από αυτές συνέπιπταν, τότε θα υπήρχε διαδρομή που θα ένωνε τις δύο αρχικές πόλεις μέσω αυτής της κοινής πόλης, όπως φαίνεται σχηματικά στο Σχήμα 14.

Άρα έχουμε τουλάχιστον 16 διαφορετικές πόλεις, πράγμα αδύνατο. Η αντίφαση δείχνει ότι κάθε δύο πόλεις μπορούν πράγματι να ενωθούν με κάποια διαδρομή. □



Σχήμα 14: Σχηματική απεικόνιση του επιχειρήματος

Παράδειγμα 4.14 (Ελάχιστος βαθμός και συνεκτικότητα). Να αποδείξετε ότι ένας γράφος με n κορυφές, καθεμία από τις οποίες έχει βαθμό τουλάχιστον $(n-1)/2$, είναι συνεκτικός.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι ο γράφος δεν είναι συνεκτικός. Τότε αποτελείται από τουλάχιστον δύο συνεκτικές συνιστώσες. Έστω ότι μία από αυτές έχει τον μικρότερο αριθμό κορυφών, έστω k. Τότε αναγκαστικά

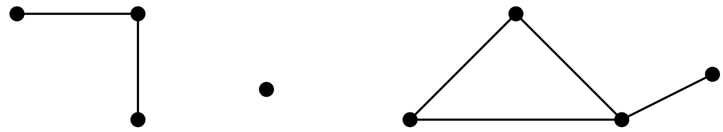
$$k \leq \frac{n}{2}.$$

Κάθε κορυφή αυτής της συνιστώσας μπορεί να συνδέεται μόνο με κορυφές της ίδιας συνιστώσας, άρα ο βαθμός της είναι το πολύ

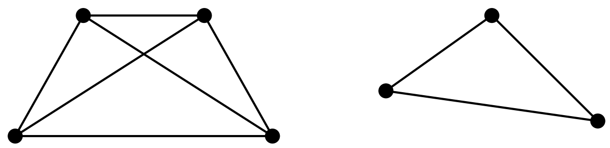
$$k-1 \leq \frac{n}{2} - 1 < \frac{n-1}{2}.$$

Αυτό αντιφάσκει με την υπόθεση. Άρα ο γράφος είναι συνεκτικός. □

Παρατήρηση 4.15. Ο γράφος του Σχήματος 15 αποτελείται από τρεις συνεκτικές συνιστώσες, ενώ ο γράφος του Σχήματος 16 αποτελείται από δύο.



Σχήμα 15: Ένας γράφος με τρεις συνεκτικές συνιστώσες



Σχήμα 16: Ένας γράφος με δύο συνεκτικές συνιστώσες

Παράδειγμα 4.16 (Μαγικά χαλιά στη Χώρα του Ποτέ). Στη Χώρα του Ποτέ υπάρχει μόνο ένα μέσο μεταφοράς: το μαγικό χαλί. Είκοσι μία γραμμές χαλιών εξυπηρετούν την πρωτεύουσα. Μία και μόνη γραμμή πετά προς τη Farville, και κάθε άλλη πόλη εξυπηρετείται από ακριβώς 20 γραμμές χαλιών. Να δείξετε ότι είναι δυνατό να ταξιδέψει κανείς με μαγικό χαλί από την πρωτεύουσα στη Farville, ίσως αλλάζοντας από μία γραμμή χαλιών σε μία άλλη.

Απόδειξη. Θεωρούμε τη συνεκτική συνιστώσα του γράφου των γραμμών χαλιών που περιέχει την πρωτεύουσα. Πρέπει να δείξουμε ότι αυτή η συνιστώσα περιέχει και τη Farville.

Υποθέτουμε το αντίθετο. Τότε, μέσα σε αυτή τη συνιστώσα, υπάρχει μία κορυφή βαθμού 21, δηλαδή η πρωτεύουσα, ενώ κάθε άλλη κορυφή της έχει βαθμό 20. Άρα η συνιστώσα αυτή έχει ακριβώς μία περιττή κορυφή.

Αυτό όμως είναι αδύνατο, αφού σε κάθε γράφο ο αριθμός των περιττών κορυφών είναι άρτιος. Η αντίφαση δείχνει ότι η Farville ανήκει στην ίδια συνεκτική συνιστώσα με την πρωτεύουσα. Επομένως μπορεί κανείς να ταξιδέψει από την πρωτεύουσα στη Farville. □

Ορισμός 4.17 (Περίπατοι, διαδρομές και κύκλοι). Έστω $G = (V, E)$ ένα απλό γράφημα.

- Ένας *περίπατος* είναι μια ακολουθία κορυφών, όχι κατ' ανάγκην διαφορετικών, τέτοια ώστε κάθε δύο διαδοχικές κορυφές να είναι γειτονικές.

- Ένα *μονοπάτι* είναι μια ακολουθία διαφορετικών κορυφών, τέτοια ώστε κάθε δύο διαδοχικές κορυφές να είναι γειτονικές.

- Ένας *κύκλος* είναι μια διαδρομή με την πρόσθετη ιδιότητα ότι η πρώτη και η τελευταία κορυφή είναι επίσης γειτονικές. Αν ένας κύκλος έχει k κορυφές, τότε λέγεται k-*κύκλος*.

- Δύο κορυφές λέγονται *συνδεδεμένες* αν υπάρχει διαδρομή που ξεκινά από τη μία και καταλήγει στην άλλη.

Ορισμός 4.18 (Περίπατοι, μονοπάτια και κύκλοι σε πολυγράφημα). Έστω $G = (V, E, \varphi)$ ένα πολυγράφημα.

- Ένας *περίπατος* στο G είναι μια πεπερασμένη ακολουθία

  $$v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_k, v_k,$$

  όπου $v_0, \dots, v_k \in V$, $e_1, \dots, e_k \in E$, και για κάθε $i = 1, \dots, k$ η ακμή e_i έχει άκρα τις κορυφές v_{i-1} και v_i, δηλαδή

  $$\varphi(e_i) = \{v_{i-1}, v_i\}.$$

  (Στην περίπτωση θηλιάς μπορεί να συμβαίνει $v_{i-1} = v_i$.)

- Ένας περίπατος λέγεται *κλειστός* αν

$$v_0 = v_k.$$

- Ένα *μονοπάτι* είναι ένας περίπατος στον οποίο όλες οι κορυφές $v_0, \ldots, v_k$ είναι διαφορετικές.

- Ένας *κύκλος* είναι ένας κλειστός περίπατος

$$v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_k, v_k$$

τέτοιος ώστε

$$v_k = v_0,$$

οι ακμές $e_1, \ldots, e_k$ να είναι όλες διαφορετικές, και οι κορυφές

$$v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}$$

να είναι επίσης όλες διαφορετικές.

- Αν ένας κύκλος χρησιμοποιεί ακριβώς k ακμές, τότε λέγεται *k-κύκλος*.

- Δύο κορυφές $u, v \in V$ λέγονται *συνδεδεμένες* αν υπάρχει μονοπάτι που αρχίζει στην u και τελειώνει στην v.

Παρατήρηση 4.19 (Σχέση με τα απλά γραφήματα). Στα πολυγραφήματα είναι αναγκαίο να γράφουμε έναν περίπατο, ένα μονοπάτι ή έναν κύκλο ως εναλλασσόμενη ακολουθία κορυφών και ακμών, διότι δύο διαδοχικές κορυφές δεν καθορίζουν γενικά μοναδικά την ακμή που χρησιμοποιείται: μπορεί να υπάρχουν παράλληλες ακμές μεταξύ τους.

Αν όμως το γράφημα είναι απλό, τότε κάθε δύο γειτονικές κορυφές ενώνονται με μοναδική ακμή. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να παραλείπουμε τις ακμές από τη γραφή και να παριστάνουμε περιπάτους, μονοπάτια και κύκλους μόνο με ακολουθίες κορυφών.

Επιπλέον, σε ένα απλό γράφημα δεν υπάρχουν θηλιές ούτε παράλληλες ακμές, άρα:

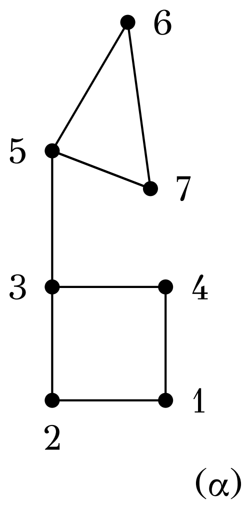
- δεν υπάρχουν 1-κύκλοι,
- δεν υπάρχουν 2-κύκλοι,
- κάθε κύκλος έχει μήκος τουλάχιστον 3.

Παράδειγμα 4.20 (Παραδείγματα κύκλων). Ο γράφος του Σχήματος 17 έχει δύο κύκλους:

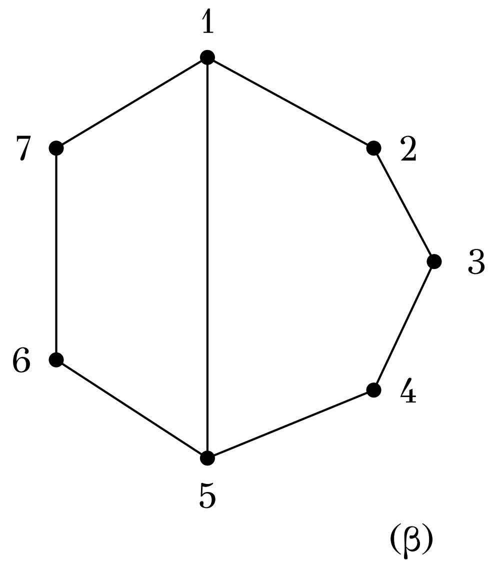
$$1-2-3-4-1 \qquad \text{και} \qquad 5-6-7-5,$$

ενώ ο γράφος του Σχήματος 18 έχει τρεις κύκλους:

$$1-5-6-7-1, \qquad 1-2-3-4-5-1, \qquad 1-2-3-4-5-6-7-1.$$

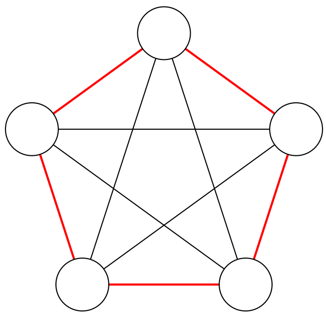


Σχήμα 17: Παράδειγμα με δύο κύκλους

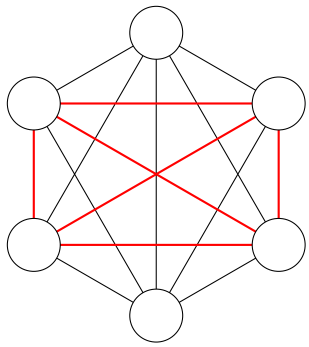


Σχήμα 18: Παράδειγμα με τρεις κύκλους

Παράδειγμα 4.21 (Υπογράφοι σε πλήρεις γράφους). Ακολουθούν δύο παραδείγματα υπογράφων.



Ο πλήρης γράφος K_5 περιέχει έναν 5-κύκλο C_5.



Ο πλήρης γράφος K_6 περιέχει έναν K_4.

Παράδειγμα 4.22 (Πόσοι n-κύκλοι υπάρχουν στον K_n;). Ο αριθμός των n-κύκλων στον πλήρη γράφο K_n είναι

$$\frac{n!}{2n} = \frac{(n-1)!}{2}.$$

Απόδειξη. Αν προσπαθήσουμε να μετρήσουμε τους n-κύκλους βάζοντας τις n κορυφές σε σειρά, παίρνουμε αρχικά $n!$ δυνατότητες.

Όμως κάθε κύκλος μετριέται πολλές φορές. Πρώτα, η ίδια κυκλική διάταξη μπορεί να αρχίσει από οποιαδήποτε από τις n κορυφές. Για παράδειγμα, οι ακολουθίες

$$(1,2,3,4,1), \quad (2,3,4,1,2), \quad (3,4,1,2,3), \quad (4,1,2,3,4)$$

παριστάνουν όλες τον ίδιο κύκλο. Άρα πρέπει να διαιρέσουμε διά n.

Επιπλέον, και οι δύο φορές διάσχισης ενός κύκλου παριστάνουν τον ίδιο κύκλο. Για παράδειγμα,

$$(1,2,3,4,1) \qquad \text{και} \qquad (1,4,3,2,1)$$

είναι ο ίδιος κύκλος. Άρα πρέπει να διαιρέσουμε και διά 2.

Συνεπώς ο αριθμός των n-κύκλων είναι

$$\frac{n!}{2n} = \frac{(n-1)!}{2}.$$

□

Θεώρημα 4.23 (Συνθήκη ύπαρξης κύκλου). *Σταθεροποιούμε $n \geq 3$. Κάθε γράφος με n κορυφές και τουλάχιστον n ακμές περιέχει έναν κύκλο.*

Επιπλέον, το φράγμα αυτό είναι βέλτιστο.

Απόδειξη. Θα κάνουμε επαγωγή ως προς $n \geq 3$.

Βάση $n = 3$. Ένας γράφος με 3 κορυφές και τουλάχιστον 3 ακμές είναι αναγκαστικά ο K_3, άρα περιέχει κύκλο.

Επαγωγική υπόθεση. Υποθέτουμε ότι κάθε γράφος με $n-1$ κορυφές και τουλάχιστον $n-1$ ακμές περιέχει κύκλο.

Επαγωγικό βήμα. Έστω G γράφος με n κορυφές και τουλάχιστον n ακμές. Θα δείξουμε ότι ο G περιέχει κύκλο.

Υπάρχουν τρεις περιπτώσεις.

Περίπτωση 1: Ο G έχει κορυφή βαθμού 0.

Αν αφαιρέσουμε αυτή την απομονωμένη κορυφή, παίρνουμε γράφο με $n-1$ κορυφές και τουλάχιστον n ακμές. Άρα έχει βεβαίως τουλάχιστον $n-1$ ακμές. Από την επαγωγική υπόθεση, περιέχει κύκλο. Ο ίδιος κύκλος υπάρχει και στον G.

Περίπτωση 2: Ο G έχει κορυφή βαθμού 1.

Αφαιρούμε αυτή την κορυφή και τη μοναδική ακμή που προσπίπτει σε αυτήν. Παίρνουμε γράφο με $n-1$ κορυφές και τουλάχιστον $n-1$ ακμές. Από την επαγωγική υπόθεση, ο νέος γράφος περιέχει κύκλο. Ο κύκλος αυτός παραμένει και στον αρχικό γράφο, αφού η αφαιρεθείσα κορυφή δεν μπορούσε να ανήκει σε κύκλο.

Περίπτωση 3: Ο G δεν έχει κορυφή βαθμού 0 ή 1.

Άρα κάθε κορυφή του G έχει βαθμό τουλάχιστον 2.

Ξεκινάμε από μια αυθαίρετη κορυφή v_0 και κατασκευάζουμε ένα μονοπάτι

$$v_0, v_1, \ldots, v_k$$

μέγιστου δυνατού μήκους.

Η τελευταία κορυφή v_k έχει βαθμό τουλάχιστον 2. Μία από τις γειτονικές της κορυφές είναι η v_{k-1}. Αν υπήρχε άλλη γειτονική κορυφή εκτός της διαδρομής, θα μπορούσαμε να επεκτείνουμε τη διαδρομή, πράγμα αδύνατο. Άρα κάθε άλλη γειτονική κορυφή της v_k ανήκει ήδη στη διαδρομή, και μάλιστα μία από αυτές είναι κάποια v_i με $0 \leq i \leq k-2$.

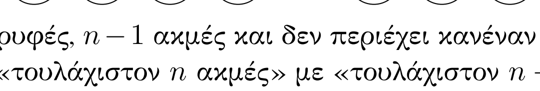
Τότε οι κορυφές

$$v_i, v_{i+1}, \ldots, v_k$$

μαζί με την ακμή $v_k v_i$ σχηματίζουν κύκλο.

Άρα σε κάθε περίπτωση ο G περιέχει κύκλο.

Μένει να δείξουμε ότι το φράγμα είναι βέλτιστο. Για αυτό αρκεί να εξετάσουμε το μονοπάτι P_n με n κορυφές:



Ο γράφος αυτός έχει n κορυφές, $n-1$ ακμές και δεν περιέχει κανέναν κύκλο. Άρα δεν μπορούμε να αντικαταστήσουμε το «τουλάχιστον n ακμές» με «τουλάχιστον $n-1$ ακμές». □

Παράδειγμα 4.24 (Κλείσιμο ενός δρόμου). Σε μια χώρα, από κάθε πόλη ξεκινούν 100 δρόμοι και μπορεί κανείς να ταξιδέψει από οποιαδήποτε πόλη σε οποιαδήποτε άλλη. Ένας δρόμος κλείνει για επισκευές. Να αποδείξετε ότι και πάλι μπορεί κανείς να φτάσει από οποιαδήποτε πόλη σε οποιαδήποτε άλλη.

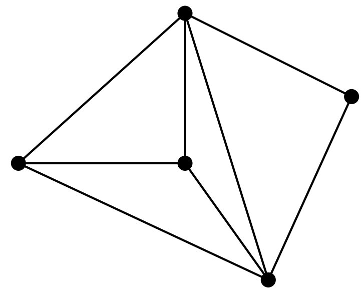
Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι, αφού κλείσει ένας δρόμος, ο νέος γράφος δεν είναι συνεκτικός. Τότε ο κλειστός δρόμος ήταν γέφυρα, άρα η αφαίρεσή του χωρίζει τον γράφο σε δύο συνεκτικές συνιστώσες.

Σε καθεμία από αυτές τις δύο συνιστώσες, όλες οι κορυφές έχουν άρτιο βαθμό 100, εκτός από την κορυφή που ήταν άκρο του αφαιρεμένου δρόμου, η οποία τώρα έχει βαθμό 99. Άρα καθεμία από τις δύο συνιστώσες έχει ακριβώς μία περιττή κορυφή.

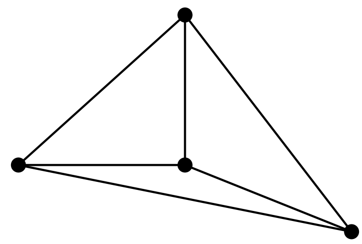
Αυτό είναι αδύνατο, διότι σε κάθε γράφο ο αριθμός των περιττών κορυφών είναι άρτιος. Η αντίφαση δείχνει ότι ο γράφος παραμένει συνεκτικός. □

5 Γράφοι Euler

Παράδειγμα 5.1 (Διάσχιση ακμών χωρίς επανάληψη). Μπορεί να σχεδιάσει κανείς τον γράφο του Σχήματος 19 και τον γράφο του Σχήματος 20 χωρίς να σηκώσει το μολύβι από το χαρτί και διατρέχοντας κάθε ακμή ακριβώς μία φορά;



Σχήμα 19: Το σχήμα του ερωτήματος (α)



Σχήμα 20: Το σχήμα του ερωτήματος (β)

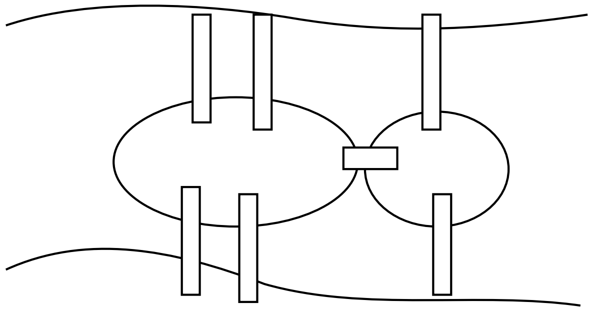
Απόδειξη. **(α)** Ναι. Ένας τρόπος είναι να αρχίσουμε από την κορυφή που βρίσκεται στο άκρο αριστερά και να τελειώσουμε στην κεντρική κορυφή.

(β) Όχι. Αν μπορούμε να διατρέξουμε τον γράφο όπως ζητείται, τότε σε κάθε ενδιάμεση κορυφή θα φτάνουμε τόσες φορές όσες και θα φεύγουμε από αυτήν. Άρα ο βαθμός κάθε κορυφής, εκτός ίσως από δύο, πρέπει να είναι άρτιος.

Στον γράφο του Σχήματος 20 αυτό δεν συμβαίνει, αφού όλες οι κορυφές έχουν περιττό βαθμό. Άρα ο γράφος αυτός δεν μπορεί να διασχιστεί με τον ζητούμενο τρόπο. □

Πρόταση 5.2. *Ένας γράφος που μπορεί να διασχιστεί χωρίς να σηκώσουμε το μολύβι από το χαρτί, διατρέχοντας κάθε ακμή ακριβώς μία φορά, δεν μπορεί να έχει περισσότερες από δύο περιττές κορυφές.*

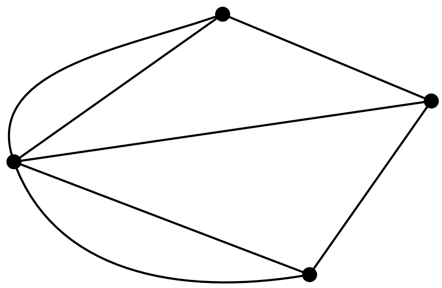
Παράδειγμα 5.3 (Οι γέφυρες του Königsberg). Δίνεται στο Σχήμα 21 ένας χάρτης της πόλης του Königsberg. Η πόλη βρίσκεται στις δύο όχθες ενός ποταμού, και μέσα στον ποταμό υπάρχουν δύο νησιά. Υπάρχουν επτά γέφυρες που συνδέουν τα διάφορα μέρη της πόλης. Μπορεί κανείς να κάνει έναν περίπατο στην πόλη, διασχίζοντας καθεμία από τις γέφυρες ακριβώς μία φορά;



Σχήμα 21: Χάρτης του Königsberg με τις επτά γέφυρες

Απόδειξη. Η απάντηση είναι αρνητική.

Παριστάνουμε με κορυφές τα τέσσερα κομμάτια γης, δηλαδή τις δύο όχθες και τα δύο νησιά, και με ακμές τις γέφυρες που τα συνδέουν. Έτσι προκύπτει ο γράφος του Σχήματος 22.



Σχήμα 22: Ο γράφος που αντιστοιχεί στις γέφυρες του Königsberg

Υπολογίζουμε τους βαθμούς:

$$\deg(A) = 5, \qquad \deg(B) = 3, \qquad \deg(C) = 3, \qquad \deg(D) = 3.$$

Άρα και οι τέσσερις κορυφές έχουν περιττό βαθμό.

Όμως, από την προηγούμενη πρόταση, ένας γράφος που μπορεί να διασχιστεί περνώντας από κάθε ακμή ακριβώς μία φορά δεν μπορεί να έχει περισσότερες από δύο περιττές κορυφές. Εδώ έχουμε τέσσερις. Άρα τέτοιος περίπατος δεν είναι δυνατόν να υπάρξει. □

Ορισμός 5.4 (Περίπατος/Κλειστός Περίπατος Euler). Έστω $G = (V, E)$ ένα πεπερασμένο γράφημα.

Ένας *περίπατος Euler* του G είναι ένας περίπατος που διατρέχει κάθε ακμή του G ακριβώς μία φορά.

Ένας *κλειστός περίπατος Euler* του G είναι ένας περίπατος Euler που είναι κλειστός, δηλαδή αρχίζει και τελειώνει στην ίδια κορυφή.

Θεώρημα 5.5 (Κριτήριο ύπαρξης κλειστού περιπάτου Euler). *Ένα πεπερασμένο συνεκτικό γράφημα G έχει κλειστό περίπατο Euler αν και μόνο αν κάθε κορυφή του έχει άρτιο βαθμό.*

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε πρώτα το αναγκαίο της συνθήκης και έπειτα το ικανό.

Αναγκαίο της συνθήκης. Υποθέτουμε ότι το G έχει κλειστό περίπατο Euler. Έστω

$$W = v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_m, v_m$$

ένας κλειστός περίπατος Euler του G, άρα $v_0 = v_m$.

Για κάθε κορυφή $x \neq v_0$, κάθε εμφάνιση της x στον περίπατο αντιστοιχεί σε μία είσοδο μέσω κάποιας ακμής και σε μία έξοδο μέσω της επόμενης ακμής. Επομένως οι ακμές που προσπίπτουν στην x έρχονται σε ζεύγη, άρα $\deg(x)$ είναι άρτιος.

Από το θεώρημα χειραψίας, το άθροισμα των βαθμών όλων των κορυφών του G είναι άρτιος αριθμός. Αφού όλοι οι βαθμοί εκτός ίσως από τον $\deg(v_0)$ είναι άρτιοι, συμπεραίνουμε ότι και $\deg(v_0)$ είναι άρτιος.

Άρα κάθε κορυφή του G έχει άρτιο βαθμό.

Άρα οι ακμές που προσπίπτουν σε κάθε κορυφή χρησιμοποιούνται κατά ζεύγη: μία για είσοδο και μία για έξοδο. Επομένως ο βαθμός κάθε κορυφής είναι άρτιος.

Η συνθήκη είναι ικανή. Υποθέτουμε τώρα ότι το G είναι συνεκτικό και ότι κάθε κορυφή του έχει άρτιο βαθμό. Θα αποδείξουμε ότι το G έχει κλειστό περίπατο Euler.

Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή ως προς τον αριθμό $m = |E(G)|$ των ακμών του G.

Βάση της επαγωγής. Αν $m = 0$, τότε το γράφημα είναι συνεκτικό μόνον αν έχει μία κορυφή και καμία ακμή. Ο τετριμμένος περίπατος αυτής της κορυφής είναι κλειστός περίπατος Euler.

Επαγωγική υπόθεση. Υποθέτουμε ότι κάθε πεπερασμένο συνεκτικό πολυγράφημα χωρίς θηλιές, με λιγότερες από m ακμές και με όλες τις κορυφές άρτιου βαθμού, έχει κλειστό περίπατο Euler.

Επαγωγικό βήμα. Έστω τώρα G συνεκτικό πολυγράφημα χωρίς θηλιές, με $m \geq 1$ ακμές, και υποθέτουμε ότι όλες οι κορυφές του έχουν άρτιο βαθμό.

1ο βήμα: Το G περιέχει κύκλο.

Αν $m = 0$, τότε βρισκόμαστε ήδη στη βάση της επαγωγής. Άρα στο επαγωγικό βήμα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $m \geq 1$.

Επειδή το G είναι συνεκτικό και δεν έχει θηλιές, κάθε κορυφή έχει βαθμό τουλάχιστον 1. Αφού όμως όλες οι κορυφές έχουν άρτιο βαθμό, στην πραγματικότητα κάθε κορυφή έχει βαθμό τουλάχιστον 2. Άρα

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) \geq 2|V(G)|,$$

όπου $V(G)$ είναι το σύνολο των κορυφών του G. Από το θεώρημα χειραψίας έχουμε

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2|E(G)|.$$

Επομένως

$$2|E(G)| \geq 2|V(G)|,$$

και άρα

$$|E(G)| \geq |V(G)|.$$

Από το προηγούμενο θεώρημα, κάθε γράφημα με V κορυφές και τουλάχιστον V ακμές περιέχει κύκλο. Άρα το G περιέχει έναν κύκλο C.

2ο βήμα: Αν ο C περιέχει όλες τις ακμές του G, τελειώσαμε.

Αν ο C διατρέχει ήδη όλες τις ακμές του G, τότε είναι κλειστός περίπατος Euler και η απόδειξη τελείωσε.

Υποθέτουμε λοιπόν από εδώ και πέρα ότι ο C δεν περιέχει όλες τις ακμές του G.

3ο βήμα: Αφαιρούμε τις ακμές του C.

Θεωρούμε το πολυγράφημα

$$H = G - E(C),$$

δηλαδή κρατούμε όλες τις κορυφές του G και αφαιρούμε όλες τις ακμές που ανήκουν στον C.

Θα δείξουμε ότι κάθε κορυφή του H έχει άρτιο βαθμό.

Πράγματι, σε κάθε κορυφή v, ο κλειστός περίπατος C χρησιμοποιεί άρτιο πλήθος προσπιπτουσών ακμών: κάθε φορά που ο C φτάνει στην v, αργότερα φεύγει από την v, και επειδή ο C είναι κλειστός, το ίδιο ισχύει και για την αρχική κορυφή του. Άρα το πλήθος των ακμών του C που προσπίπτουν στην v είναι άρτιο.

Επομένως

$$\deg_H(v) = \deg_G(v) - (\text{άρτιος αριθμός}),$$

άρα και $\deg_H(v)$ είναι άρτιος.

Έστω τώρα

$$H_1, \ldots, H_t$$

οι συνεκτικές συνιστώσες του H που έχουν τουλάχιστον μία ακμή. Καθεμία από αυτές είναι συνεκτικό πολυγράφημα χωρίς θηλιές, έχει όλες τις κορυφές άρτιου βαθμού, και έχει λιγότερες ακμές από το G. Άρα, από την επαγωγική υπόθεση, καθεμία H_i έχει κλειστό περίπατο Euler.

4ο βήμα: Κάθε H_i έχει κοινή κορυφή με τον C.

Θα δείξουμε ότι για κάθε i ισχύει

$$V(H_i) \cap V(C) \neq \varnothing.$$

Έστω προς απόδειξη μία συνιστώσα H_i και μια κορυφή $u \in V(H_i)$. Επειδή το G είναι συνεκτικό, υπάρχει μονοπάτι στο G από την u προς κάποια κορυφή του C. Πάνω σε ένα τέτοιο μονοπάτι, θεωρούμε το πρώτο σημείο y που ανήκει στον C. Έστω x η προηγούμενη κορυφή του μονοπατιού.

Τότε $x \notin V(C)$. Άρα η ακμή xy δεν μπορεί να είναι ακμή του C, οπότε η ακμή xy παραμένει στο H. Επομένως οι κορυφές u και y ανήκουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του H, δηλαδή στην H_i. Άρα $y \in V(H_i) \cap V(C)$, όπως θέλαμε.

Για κάθε i, διαλέγουμε μία κορυφή

$$v_i \in V(H_i) \cap V(C).$$

Και έστω W_i ένας κλειστός περίπατος Euler της H_i, που αρχίζει και τελειώνει στην v_i.

5ο βήμα: «Ράβουμε» τους περιπάτους W_i πάνω στον C.

Διατρέχουμε τον κύκλο C. Κάθε φορά που φτάνουμε σε μια κορυφή v του C, πριν συνεχίσουμε στην επόμενη ακμή του C, διατρέχουμε όλους τους περιπάτους W_i για τους οποίους $v_i = v$ και δεν έχουν ακόμη χρησιμοποιηθεί. Επειδή κάθε W_i είναι κλειστός και αρχίζει και τελειώνει στο v, μετά την ολοκλήρωσή του βρισκόμαστε πάλι στην ίδια κορυφή v, οπότε μπορούμε να συνεχίσουμε πάνω στον C.

Με αυτή τη διαδικασία προκύπτει ένας κλειστός περίπατος στο G.

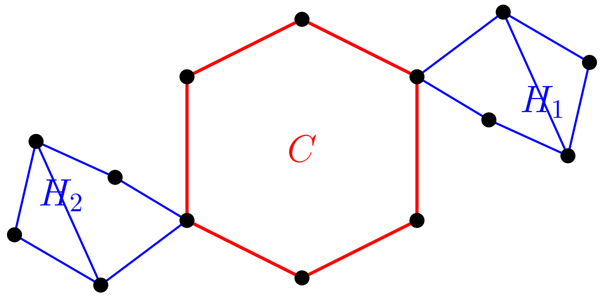
Απομένει να ελέγξουμε ότι κάθε ακμή του G χρησιμοποιείται ακριβώς μία φορά. Πράγματι:

- κάθε ακμή του C χρησιμοποιείται ακριβώς μία φορά κατά τη διάσχιση του C,
- κάθε ακμή μιας συνιστώσας H_i χρησιμοποιείται ακριβώς μία φορά μέσα στον W_i,
- οι ακμές των διαφορετικών H_i είναι ξένες μεταξύ τους,
- και καμία ακμή ενός H_i δεν ανήκει στον C, αφού οι ακμές του C έχουν αφαιρεθεί.

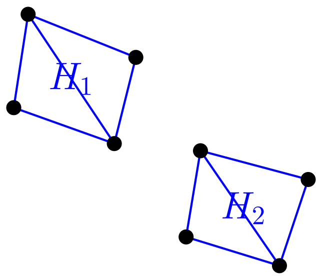
Άρα ο τελικός κλειστός περίπατος διατρέχει κάθε ακμή του G ακριβώς μία φορά. Επομένως είναι κλειστός περίπατος Euler του G.

Η επαγωγή ολοκληρώθηκε, και μαζί της η απόδειξη του θεωρήματος. □

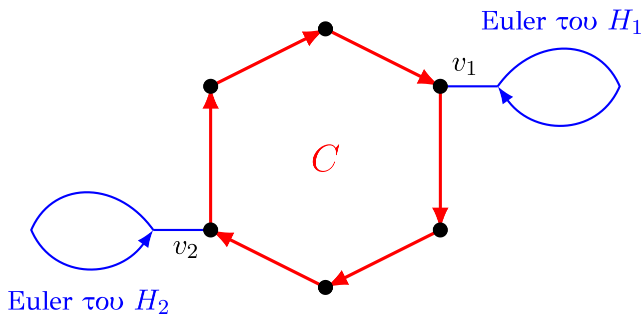
Πόρισμα 5.6. *Έστω G πεπερασμένο συνεκτικό πολυγράφημα χωρίς θηλιές, και έστω S, T δύο διαφορετικές κορυφές του G. Τότε το G έχει περίπατο Euler που αρχίζει στην S και τελειώνει στην T αν και μόνο αν οι κορυφές S και T έχουν περιττό βαθμό, ενώ όλες οι άλλες κορυφές του G έχουν άρτιο βαθμό.*



(α) Ο γράφος G και ένας κύκλος C



(β) Αφαιρούμε τις ακμές του C: προκύπτει το $H = G - E(C)$



Σχήμα 23: Η βασική ιδέα της απόδειξης για την ύπαρξη κλειστού περιπάτου Euler.

Απόδειξη. Προσθέτουμε στο G μία νέα ακμή που ενώνει τις κορυφές S και T, και ονομάζουμε H το νέο πολυγράφημα. Αυτό επιτρέπεται, επειδή εργαζόμαστε με πολυγραφήματα.

Τότε το H έχει κλειστό περίπατο Euler αν και μόνο αν το G έχει περίπατο Euler που αρχίζει στην S και τελειώνει στην T. Πράγματι:

- αν το G έχει περίπατο Euler από την S στην T, τότε προσθέτοντας στο τέλος τη νέα ακμή TS παίρνουμε κλειστό περίπατο Euler του H,

- αντιστρόφως, αν το H έχει κλειστό περίπατο Euler, τότε η νέα ακμή ST χρησιμοποιείται σε αυτόν ακριβώς μία φορά. Διαγράφοντας αυτήν την ακμή από τον κλειστό περίπατο, παίρνουμε περίπατο Euler του G που αρχίζει στο ένα από τα S, T και τελειώνει στο άλλο. Επειδή η ακμή που αφαιρέσαμε είχε άκρα S, T, ο περίπατος αυτός αρχίζει στην S και τελειώνει στην T, ή αντιστρόφως. Αν θέλουμε ακριβώς τη φορά από S προς T, αρκεί να διατρέξουμε τον περίπατο αντίστροφα, αν χρειαστεί.

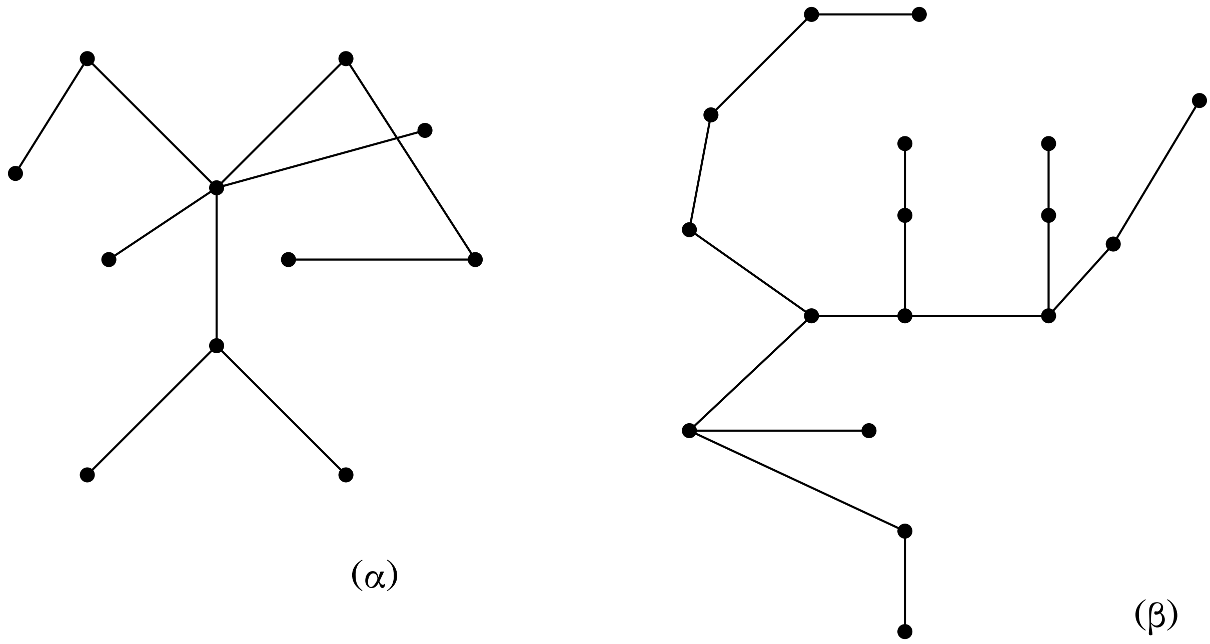
Τώρα, στο H, οι βαθμοί των S και T έχουν αυξηθεί κατά 1, ενώ οι βαθμοί όλων των άλλων κορυφών παρέμειναν αμετάβλητοι. Άρα όλες οι κορυφές του H έχουν άρτιο βαθμό αν και μόνο αν στο G οι S και T έχουν περιττό βαθμό και όλες οι υπόλοιπες κορυφές έχουν άρτιο βαθμό.

Επομένως, από το προηγούμενο θεώρημα, το H έχει κλειστό περίπατο Euler αν και μόνο αν στο G ισχύει ακριβώς η συνθήκη του πορίσματος. Άρα και το G έχει περίπατο Euler από S σε T αν και μόνο αν οι S, T είναι περιττού βαθμού και όλες οι άλλες κορυφές είναι άρτιου βαθμού. $\square$

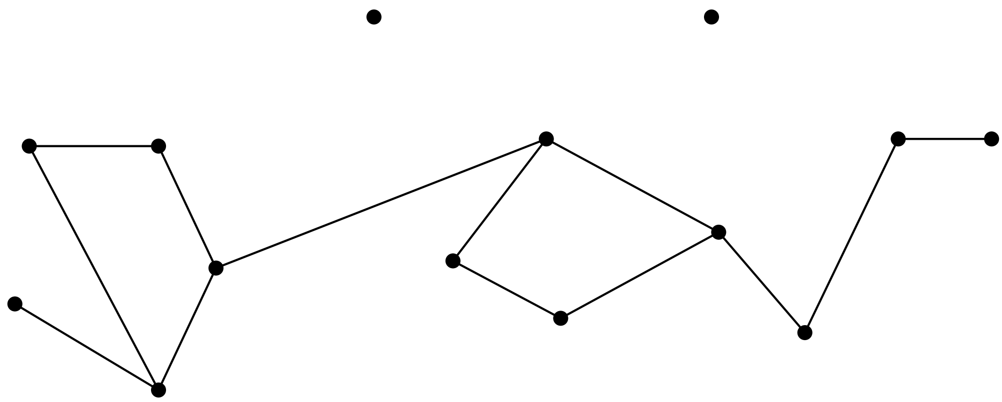
6 Δέντρα

Ορισμός 6.1 (Δέντρο)**.** Ένα *δέντρο* είναι ένας συνεκτικός γράφος χωρίς κύκλους.

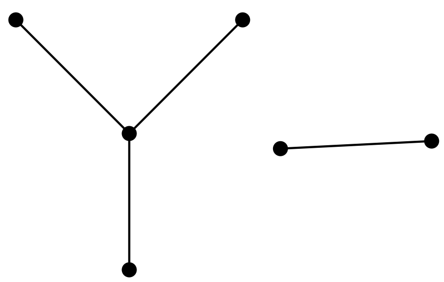
Παρατήρηση 6.2. Μερικά τέτοια σχήματα πράγματι μοιάζουν με δέντρα, γι' αυτό και πήραν αυτό το όνομα.



Σχήμα 24: Παραδείγματα δέντρων



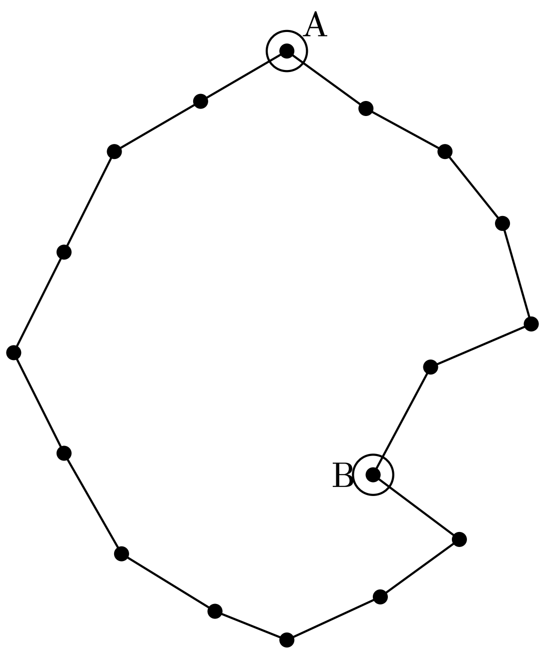
Σχήμα 25: Γράφος που δεν είναι δέντρο



Σχήμα 26: Άλλος γράφος που δεν είναι δέντρο

Παρατήρηση 6.3. Από τον ορισμό προκύπτει ότι ένα δέντρο δεν έχει θηλιές ούτε παράλληλες ακμές, διότι μια θηλιά είναι 1-κύκλος και δύο παράλληλες ακμές σχηματίζουν 2-κύκλο. Άρα κάθε δέντρο είναι απλό γράφημα.

Πρόταση 6.4. *Ένας γράφος στον οποίο οποιεσδήποτε δύο κορυφές ενώνονται με ένα και μόνο μονοπάτι είναι δέντρο.*



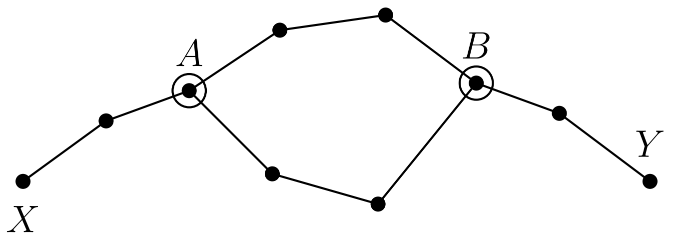
Σχήμα 27: Σε έναν κύκλο, δύο κορυφές ενώνονται με δύο διαφορετικές απλές διαδρομές

Απόδειξη. Ένας τέτοιος γράφος είναι φανερά συνεκτικός, αφού από την υπόθεση οποιεσδήποτε δύο κορυφές του ενώνονται με ένα μονοπάτι.

Μένει να αποδείξουμε ότι δεν έχει κύκλους. Υποθέτουμε, προς άτοπο, ότι έχει έναν κύκλο. Διαλέγουμε δύο διαφορετικές κορυφές A και B πάνω σε αυτόν τον κύκλο, όπως στο Σχήμα 27. Τότε, κατά μήκος του κύκλου, μπορούμε να πάμε από το A στο B με δύο διαφορετικούς τρόπους: από τη μία πλευρά ή από την άλλη.

Οι δύο αυτές διαδρομές είναι διαφορετικά μονοπάτια. Άρα βρήκαμε δύο διαφορετικά μονοπάτια που ενώνουν τις ίδιες κορυφές A και B, πράγμα που αντιφάσκει με την υπόθεση. Επομένως ο γράφος δεν έχει κύκλους. Άρα είναι δέντρο. □

Πρόταση 6.5. *Σε κάθε δέντρο οποιεσδήποτε δύο κορυφές ενώνονται με ένα και μόνο μονοπάτι.*



Σχήμα 28: Δύο διαφορετικές απλές διαδρομές από το X στο Y

Απόδειξη. Αφού ο γράφος είναι δέντρο, είναι από τον ορισμό του συνεκτικός. Άρα οποιεσδήποτε δύο κορυφές ενώνονται με τουλάχιστον ένα μονοπάτι. Πρέπει να αποδείξουμε ότι αυτό είναι μοναδικό.

Υποθέτουμε, προς άτοπο, ότι υπάρχουν δύο κορυφές X και Y που ενώνονται με δύο διαφορετικά μονοπάτια.

Ξεκινώντας από το X, ακολουθούμε τις δύο διαδρομές όσο αυτές συμπίπτουν. Έστω A η πρώτη κορυφή στην οποία χωρίζουν, όπως στο Σχήμα 28.

Στη συνέχεια, προχωρούμε πάνω στο πρώτο μονοπάτι μετά το A και θεωρούμε την πρώτη κορυφή B που συναντούμε και η οποία ανήκει επίσης στο δεύτερο μονοπάτι. Μια τέτοια κορυφή υπάρχει οπωσδήποτε, αφού και οι δύο διαδρομές καταλήγουν στο Y.

Τότε το τμήμα της πρώτης διαδρομής από το A έως το B και το αντίστοιχο τμήμα της δεύτερης διαδρομής από το A έως το B δεν έχουν κοινές εσωτερικές κορυφές. Επομένως, όταν τα ενώσουμε, σχηματίζουν κύκλο.

Αυτό όμως είναι αδύνατο, διότι ο γράφος είναι δέντρο και άρα δεν έχει κύκλους. Η αντίφαση δείχνει ότι δεν μπορούν να υπάρχουν δύο διαφορετικές απλές διαδρομές που να ενώνουν τις ίδιες δύο κορυφές. □

Παράδειγμα 6.6. Να αποδείξετε ότι αν όλες οι κορυφές ενός πεπερασμένου γραφήματος έχουν βαθμό 3, τότε το γράφημα δεν είναι δέντρο.

Απόδειξη. Έστω ότι το γράφημα έχει n κορυφές και m ακμές.

Εφόσον κάθε κορυφή έχει βαθμό 3, το άθροισμα των βαθμών όλων των κορυφών είναι $3n$. Από το γνωστό θεώρημα για το άθροισμα των βαθμών, κάθε ακμή μετριέται δύο φορές, άρα

$$2m = 3n.$$

Επομένως

$$m = \frac{3n}{2}.$$

Αφού $n \geq 1$, έχουμε

$$\frac{3n}{2} \geq n,$$

δηλαδή $m \geq n$.

Άρα το γράφημα έχει n κορυφές και τουλάχιστον n ακμές. Από το θεώρημα που λέει ότι κάθε γράφημα με n κορυφές και τουλάχιστον n ακμές περιέχει κύκλο, συμπεραίνουμε ότι το γράφημα περιέχει κύκλο. □

Παράδειγμα 6.7. Να αποδείξετε ότι αν από ένα δέντρο διαγράψουμε μία ακμή (χωρίς να διαγράψουμε τα άκρα της), τότε το γράφημα που προκύπτει δεν είναι συνεκτικό.

Απόδειξη. Έστω ότι T είναι ένα δέντρο και $e = \{u, v\}$ μία ακμή του.

Επειδή το T είναι δέντρο, κάθε δύο κορυφές του ενώνονται με ένα και μόνο μονοπάτι. Ειδικότερα, αυτό ισχύει για τις κορυφές u και v. Αλλά η ακμή e είναι ήδη από μόνη της μια απλή διαδρομή από το u στο v. Άρα αυτή είναι η μοναδική απλή διαδρομή που τις ενώνει.

Αν τώρα αφαιρέσουμε την ακμή e, τότε δεν απομένει καμία διαδρομή από το u στο v, διότι αν υπήρχε κάποια διαδρομή από το u στο v στο νέο γράφημα, τότε αυτή θα ήταν και στο αρχικό δέντρο T, και θα ήταν διαφορετική από την ακμή e, πράγμα άτοπο.

Άρα μετά τη διαγραφή της ακμής e, οι κορυφές u και v δεν συνδέονται πλέον με διαδρομή. Επομένως το γράφημα που προκύπτει δεν είναι συνεκτικό. □

Λήμμα 6.8. *Κάθε πεπερασμένο δέντρο με τουλάχιστον 2 κορυφές έχει τουλάχιστον μία κορυφή βαθμού 1.*

Απόδειξη. Παίρνουμε ένα μονοπάτι μέγιστου δυνατού μήκους,

$$v_0, v_1, \ldots, v_k.$$

Ισχυριζόμαστε ότι η κορυφή v_0 έχει βαθμό 1. Πράγματι, αν είχε βαθμό τουλάχιστον 2, τότε θα υπήρχε γειτονική κορυφή $u \neq v_1$.

Αν η u δεν ανήκε στο μονοπάτι $v_0, v_1, \ldots, v_k$, τότε η ακολουθία

$$u, v_0, v_1, \ldots, v_k$$

θα ήταν επίσης μονοπάτι: κάθε δύο διαδοχικές κορυφές θα ήταν γειτονικές, και όλες οι κορυφές θα ήταν διαφορετικές, αφού η u δεν ανήκει στο αρχικό μονοπάτι. Αυτό όμως θα έδινε μονοπάτι μεγαλύτερου μήκους, άτοπο.

Αν, αντίθετα, η u ανήκε ήδη στο μονοπάτι, τότε οι ακμές του μονοπατιού από την u ως την v_0, μαζί με την ακμή uv_0, θα σχημάτιζαν κύκλο, πράγμα αδύνατο επειδή το γράφημα είναι δέντρο.

Άρα δεν υπάρχει τέτοια κορυφή u, και επομένως $\deg(v_0) = 1$. □

Παρατήρηση 6.9. Στην πραγματικότητα η παραπάνω απόδειξη δίνει ότι υπάρχουν τουλάχιστον δύο κορυφές με βαθμό 1.

Θεώρημα 6.10. *Να αποδείξετε ότι σε κάθε δέντρο με n κορυφές, το πλήθος των ακμών είναι $n-1$.*

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το παραπάνω Λήμμα επανειλημμένα.

Αφαιρούμε από το δέντρο μία κορυφή βαθμού 1 μαζί με τη μοναδική ακμή που προσπίπτει σε αυτήν. Το γράφημα που απομένει είναι πάλι δέντρο: παραμένει συνεκτικό, επειδή η αφαιρεθείσα κορυφή ήταν άκρο μόνο μίας ακμής, και δεν δημιουργούνται κύκλοι, αφού το αρχικό γράφημα δεν είχε κύκλους.

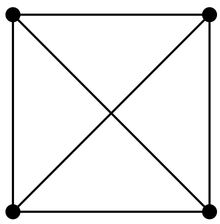
Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία. Κάθε φορά αφαιρούμε ακριβώς μία ακμή. Μετά από $n-1$ τέτοια βήματα θα απομείνει ένα δέντρο με μία μόνο κορυφή, και άρα χωρίς ακμές.

Εφόσον αφαιρέσαμε μία ακμή σε καθένα από τα $n-1$ βήματα, συμπεραίνουμε ότι το αρχικό δέντρο είχε ακριβώς $n-1$ ακμές. □

Επίπεδα γραφήματα

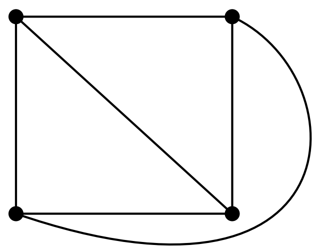
Ορισμός 6.11 (Επίπεδο γράφημα). Ένας γράφος λέγεται *επίπεδος* αν μπορεί να σχεδιαστεί στο επίπεδο με τέτοιον τρόπο, ώστε οι ακμές του να μην τέμνονται μεταξύ τους, εκτός ίσως στα κοινά άκρα τους.

Για παράδειγμα, ο γράφος του Σχήματος 29 είναι επίπεδος, παρόλο που στο συγκεκριμένο σχήμα δύο ακμές τέμνονται. Πράγματι, ένας ισόμορφος γράφος παριστάνεται στο Σχήμα 30 χωρίς καμία εσωτερική τομή ακμών.



Σχήμα 29: Ένας επίπεδος γράφος σε μη ορθή σχεδίαση

Θα λέμε ότι ένα επίπεδο γράφημα *παριστάνεται ορθά* από ένα σχήμα, αν οι ακμές του, όπως εμφανίζονται στο σχήμα, δεν τέμνονται σε εσωτερικά σημεία τους.



Σχήμα 30: Ο ίδιος γράφος σε ορθή επίπεδη σχεδίαση

Αν ένα γράφημα παριστάνεται ορθά, τότε χωρίζει το επίπεδο σε περιοχές που λέγονται *έδρες*. Θα συμβολίζουμε:

$V =$ τον αριθμό των κορυφών, $\quad E =$ τον αριθμό των ακμών, $\quad F =$ τον αριθμό των εδρών.

Για τον γράφο του Σχήματος 30 έχουμε

$$V = 4, \qquad E = 6, \qquad F = 4,$$

διότι υπάρχουν τρεις πεπερασμένες έδρες και μία εξωτερική, μη φραγμένη έδρα. Η εξωτερική περιοχή του επιπέδου μετριέται επίσης ως έδρα.

Θεώρημα 6.12 (Θεώρημα του Euler). *Για κάθε συνεκτικό επίπεδο γράφημα που έχει σχεδιαστεί ορθά στο επίπεδο ισχύει*

$$V - E + F = 2.$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι η ποσότητα $V - E + F$ δεν αλλάζει αν αφαιρούμε κατάλληλες ακμές, μέχρι να καταλήξουμε σε δέντρο.

Αν το γράφημα είναι ήδη δέντρο, τότε γνωρίζουμε ότι

$$E = V - 1.$$

Επιπλέον, ένα δέντρο που έχει σχεδιαστεί στο επίπεδο έχει ακριβώς μία έδρα, την εξωτερική. Άρα $F = 1$, και επομένως

$$V - E + F = V - (V - 1) + 1 = 2.$$

Άρα στην περίπτωση του δέντρου ο τύπος ισχύει.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το γράφημα δεν είναι δέντρο. Τότε, επειδή είναι συνεκτικό, περιέχει κύκλο. Διαλέγουμε μία ακμή e που ανήκει σε κάποιον κύκλο και τη διαγράφουμε.

1. Το νέο γράφημα παραμένει συνεκτικό.

Πράγματι, επειδή η ακμή e ανήκει σε κύκλο, τα δύο άκρα της ενώνονται και μέσω της υπόλοιπης διαδρομής του κύκλου. Άρα, ακόμη και αν αφαιρεθεί η e, εξακολουθεί να υπάρχει διαδρομή ανάμεσα στα άκρα της. Συνεπώς η αφαίρεση της e δεν αποσυνδέει το γράφημα.

2. Ο αριθμός των κορυφών δεν αλλάζει.

Δεν αφαιρούμε κορυφές, άρα το V παραμένει σταθερό.

3. Ο αριθμός των ακμών μειώνεται κατά 1.

Αφαιρούμε ακριβώς μία ακμή, άρα το E μειώνεται κατά 1.

4. Ο αριθμός των εδρών μειώνεται επίσης κατά 1.

Η ακμή e, επειδή ανήκει σε κύκλο, βρίσκεται στο κοινό σύνορο δύο διαφορετικών εδρών. Όταν τη διαγράψουμε, αυτές οι δύο έδρες συγχωνεύονται σε μία. Έτσι ο αριθμός των εδρών μειώνεται κατά 1. Αυτό φαίνεται σχηματικά στο Σχήμα 31, όπου η διακεκομμένη ακμή είναι εκείνη που διαγράφεται.

Άρα, με αυτή την πράξη, το V μένει ίδιο, ενώ τα E και F μειώνονται και τα δύο κατά 1. Επομένως η ποσότητα

$$V - E + F$$

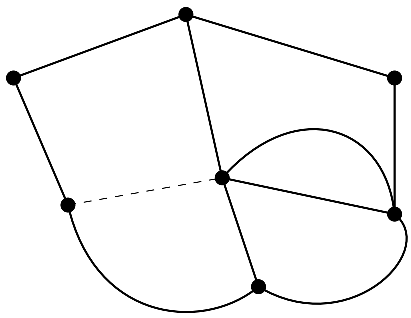
παραμένει αμετάβλητη.

Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία όσο το γράφημα περιέχει κύκλο. Επειδή σε κάθε βήμα ο αριθμός των ακμών μειώνεται, μετά από πεπερασμένα βήματα θα καταλήξουμε σε έναν συνεκτικό γράφο χωρίς κύκλους, δηλαδή σε δέντρο.

Για το τελικό δέντρο έχουμε ήδη δείξει ότι $V - E + F = 2$. Εφόσον η ποσότητα αυτή παρέμεινε αμετάβλητη σε όλα τα προηγούμενα βήματα, παίρνει την ίδια τιμή και στο αρχικό γράφημα. Άρα

$$V - E + F = 2.$$

Η ισότητα αυτή λέγεται και *τύπος του Euler*. □



Σχήμα 31: Η διαγραφή μιας ακμής που ανήκει σε κύκλο συγχωνεύει δύο έδρες σε μία

Παράδειγμα 6.13. Σε μια περιοχή υπάρχουν 7 λίμνες, που συνδέονται μεταξύ τους με 10 διώρυγες, κατά τέτοιον τρόπο ώστε να μπορεί κανείς να περάσει κολυμπώντας, μέσω των διωρύγων, από οποιαδήποτε λίμνη σε οποιαδήποτε άλλη. Πόσα νησιά υπάρχουν στην περιοχή;

Απόδειξη. Θεωρούμε το εξής επίπεδο γράφημα:

- κάθε λίμνη αντιστοιχεί σε μία κορυφή, - κάθε διώρυγα αντιστοιχεί σε μία ακμή που ενώνει τις δύο λίμνες που συνδέει.

Από την υπόθεση μπορούμε να περάσουμε από οποιαδήποτε λίμνη σε οποιαδήποτε άλλη, άρα ο γράφος είναι συνεκτικός.

Έχουμε λοιπόν

$$V = 7, \qquad E = 10.$$

Από τον τύπο του Euler,

$$V - E + F = 2,$$

παίρνουμε

$$7 - 10 + F = 2,$$

οπότε

$$F = 5.$$

Οι 5 έδρες είναι οι περιοχές γης που προκύπτουν από το δίκτυο των διωρύγων, μαζί με την εξωτερική περιοχή. Η εξωτερική περιοχή δεν είναι νησί. Επομένως ο αριθμός των νησιών είναι

$$F - 1 = 5 - 1 = 4.$$

Άρα στην περιοχή υπάρχουν $\boxed{4}$ νησιά. □

Παράδειγμα 6.14. Μέσα σε ένα τετράγωνο βρίσκονται 20 εσωτερικά σημεία. Τα σημεία αυτά ενώνονται μεταξύ τους και με τις κορυφές του τετραγώνου με μη τεμνόμενα ευθύγραμμα τμήματα, έτσι ώστε το τετράγωνο να χωρίζεται σε τρίγωνα. Πόσα τρίγωνα προκύπτουν;

Απόδειξη. Θεωρούμε ως κορυφές ενός επιπέδου γραφήματος τα 20 εσωτερικά σημεία μαζί με τις 4 κορυφές του τετραγώνου. Άρα

$$V = 20 + 4 = 24.$$

Οι ακμές του γραφήματος είναι όλα τα ευθύγραμμα τμήματα που έχουν σχεδιαστεί, μαζί με τις 4 πλευρές του τετραγώνου. Έστω E ο αριθμός των ακμών και F ο αριθμός των εδρών. Θα διπλομετρήσουμε το σύνολο

$$\mathcal{I} = \{(e, f) : \text{ η ακμή } e \text{ ανήκει στο σύνορο της έδρας } f\}.$$

Από τη μία πλευρά, κάθε μία από τις $F - 1$ εσωτερικές έδρες είναι τρίγωνο, άρα συμβάλλει 3 τέτοια ζεύγη, ενώ η εξωτερική έδρα συμβάλλει 4. Επομένως

$$|\mathcal{I}| = 3(F - 1) + 4.$$

Από την άλλη πλευρά, κάθε ακμή ανήκει στο σύνορο ακριβώς δύο εδρών, άρα συμβάλλει 2 τέτοια ζεύγη. Επομένως

$$|\mathcal{I}| = 2E.$$

Άρα

$$3(F - 1) + 4 = 2E.$$

Αναπτύσσοντας παίρνουμε

$$3F + 1 = 2E.$$

Τώρα εφαρμόζουμε τον τύπο του Euler:

$$V - E + F = 2.$$

Επειδή $V = 24$, έχουμε

$$24 - E + F = 2.$$

Αντικαθιστούμε το E από τη σχέση

$$E = \frac{3F + 1}{2}$$

και παίρνουμε

$$24 - \frac{3F + 1}{2} + F = 2.$$

Έπεται ότι $F = 43$.

Από αυτές τις 43 έδρες, η μία είναι η εξωτερική. Επομένως ο αριθμός των τριγώνων είναι

$$F - 1 = 43 - 1 = 42.$$

Άρα το τετράγωνο χωρίζεται σε $\boxed{42}$ τρίγωνα. □

Πρόταση 6.15. Για κάθε συνεκτικό απλό επίπεδο γράφημα με $V \geq 3$ ισχύει

$$2E \geq 3F.$$

Απόδειξη. Έστω G ένα συνεκτικό επίπεδο γράφημα, σχεδιασμένο στο επίπεδο χωρίς τομές ακμών. Θα μετρήσουμε το συνολικό πλήθος των ακμών που εμφανίζονται στα σύνορα όλων των εδρών.

Κάθε έδρα περιβάλλεται από τουλάχιστον 3 ακμές. Πράγματι, αν κάποια έδρα περιβαλλόταν από μόνο 1 ακμή, τότε θα υπήρχε θηλιά, ενώ αν περιβαλλόταν από μόνο 2 ακμές, τότε θα υπήρχαν δύο παράλληλες ακμές. Στο πλαίσιο των απλών επίπεδων γραφημάτων αυτές οι περιπτώσεις αποκλείονται. Επομένως το συνολικό πλήθος των ακμών που εμφανίζονται στα σύνορα όλων των εδρών είναι τουλάχιστον

$$3F.$$

Από την άλλη πλευρά, κάθε ακμή του γραφήματος ανήκει στο σύνορο ακριβώς δύο εδρών (ενδεχομένως της ίδιας έδρας δύο φορές μόνο σε ειδικές εκφυλισμένες περιπτώσεις, που εδώ δεν εμφανίζονται). Άρα, αν αθροίσουμε τα μήκη των συνόρων όλων των εδρών, μετράμε κάθε ακμή ακριβώς δύο φορές. Επομένως το ίδιο συνολικό πλήθος είναι ίσο με

$$2E.$$

Συνεπώς

$$2E \geq 3F,$$

όπως θέλαμε. □

Πρόταση 6.16. Να αποδείξετε ότι για κάθε συνεκτικό επίπεδο γράφημα ισχύει

$$E \leq 3V - 6.$$

Απόδειξη. Από την προηγούμενη άσκηση έχουμε

$$2E \geq 3F.$$

Άρα

$$F \leq \frac{2E}{3}.$$

Εφαρμόζουμε τώρα τον τύπο του Euler

$$V - E + F = 2.$$

Αντικαθιστώντας το F με το άνω φράγμα $\frac{2E}{3}$, παίρνουμε

$$V - E + \frac{2E}{3} \geq 2.$$

Άρα

$$V - \frac{E}{3} \geq 2,$$

και επομένως

$$\frac{E}{3} \leq V - 2.$$

Πολλαπλασιάζοντας με 3, βρίσκουμε

$$E \leq 3V - 6.$$

Άρα κάθε συνεκτικό επίπεδο γράφημα ικανοποιεί την ανισότητα

$$E \leq 3V - 6.$$

□

Παράδειγμα 6.17. Να αποδείξετε ότι ο πλήρης γράφος με 5 κορυφές, δηλαδή ο K_5, δεν είναι επίπεδος.

Απόδειξη. Ο πλήρης γράφος K_5 έχει

$$V = 5 \qquad \text{και} \qquad E = \binom{5}{2} = 10.$$

Αν ο K_5 ήταν επίπεδος, τότε, επειδή είναι συνεκτικός, θα ίσχυε η ανισότητα

$$E \leq 3V - 6.$$

Όμως εδώ

$$3V - 6 = 3 \cdot 5 - 6 = 9,$$

ενώ

$$E = 10.$$

Άρα

$$10 \leq 9,$$

πράγμα αδύνατο.

Η αντίφαση δείχνει ότι ο K_5 δεν είναι επίπεδος. □

Θεώρημα 6.18. *Υπάρχουν ακριβώς 5 κυρτά κανονικά πολύεδρα: το τετράεδρο, ο κύβος, το οκτάεδρο, το δωδεκάεδρο και το εικοσάεδρο.*

Απόδειξη. Έστω P ένα κυρτό κανονικό πολύεδρο.

Επειδή το P είναι κανονικό, όλες οι έδρες του είναι ίσα κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών. Έστω λοιπόν ότι κάθε έδρα είναι κανονικό q-γωνο, όπου $q \geq 3$. Επίσης, σε κάθε κορυφή του P συναντώνται ακριβώς p έδρες, όπου $p \geq 3$.

1. Διπλομέτρηση κορυφών–εδρών. Μετράμε το σύνολο των ζευγών

$$(\text{κορυφή}, \text{έδρα}),$$

όπου η κορυφή ανήκει στην έδρα.

Από τη μία πλευρά, σε κάθε κορυφή συναντώνται ακριβώς p έδρες, άρα το πλήθος των ζευγών είναι pV. Από την άλλη πλευρά, κάθε έδρα έχει q κορυφές, άρα το ίδιο πλήθος είναι qF. Επομένως

$$pV = qF.$$

2. Διπλομέτρηση ακμών–εδρών. Μετράμε το σύνολο των ζευγών

$$(\text{ακμή}, \text{έδρα}),$$

όπου η ακμή ανήκει στην έδρα.

Από τη μία πλευρά, κάθε έδρα έχει q ακμές, άρα παίρνουμε qF. Από την άλλη πλευρά, κάθε ακμή ανήκει σε ακριβώς δύο έδρες, άρα παίρνουμε $2E$. Άρα

$$qF = 2E.$$

Από τις δύο σχέσεις προκύπτει ότι

$$pV = 2E \qquad \text{και} \qquad qF = 2E,$$

οπότε

$$V = \frac{2E}{p}, \qquad F = \frac{2E}{q}. \tag{3}$$

3. Εφαρμογή του τύπου του Euler. Για κάθε κυρτό πολύεδρο ισχύει ο τύπος του Euler

$$V - E + F = 2.$$

Αντικαθιστώντας από τη (3), παίρνουμε

$$\frac{2E}{p} - E + \frac{2E}{q} = 2.$$

Διαίρεση με $E > 0$ δίνει

$$\frac{2}{p} - 1 + \frac{2}{q} = \frac{2}{E} > 0,$$

άρα

$$\frac{2}{p} + \frac{2}{q} > 1.$$

Ισοδύναμα,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}. \tag{11}$$

4. Εύρεση όλων των δυνατών ζευγών (p, q). Επειδή $p, q \geq 3$, εξετάζουμε τις δυνατές περιπτώσεις.

Αν $p \geq 6$, τότε

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2},$$

που αντιφάσκει με την (11). Άρα

$$p \leq 5.$$

Με τον ίδιο τρόπο παίρνουμε και

$$q \leq 5.$$

Άρα αρκεί να εξετάσουμε τις περιπτώσεις $p, q \in \{3, 4, 5\}$.

Αν $p = 3$, τότε από τη (4)

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2} \iff \frac{1}{q} > \frac{1}{6} \iff q < 6,$$

οπότε

$$q = 3, 4, 5.$$

Αν $p = 4$, τότε

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2} \iff \frac{1}{q} > \frac{1}{4} \iff q < 4,$$

οπότε

$$q = 3.$$

Αν $p = 5$, τότε

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2} \iff \frac{1}{q} > \frac{3}{10} \iff q < \frac{10}{3},$$

οπότε

$$q = 3.$$

Συνεπώς, τα μόνα δυνατά ζεύγη είναι

$$(p, q) = (3, 3),\ (3, 4),\ (4, 3),\ (3, 5),\ (5, 3). \tag{5}$$

5. Υπολογισμός των V, E, F και αναγνώριση των πολυέδρων. Από

$$\frac{2}{p} - 1 + \frac{2}{q} = \frac{2}{E}$$

παίρνουμε

$$E = \frac{2}{\frac{2}{p} + \frac{2}{q} - 1}.$$

Έπειτα

$$V = \frac{2E}{p}, \qquad F = \frac{2E}{q}.$$

<u>Περίπτωση $(p,q) = (3,3)$.</u> Έχουμε

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{3} - 1 = \frac{1}{3}, \qquad E = \frac{2}{1/3} = 6,$$

και άρα

$$V = \frac{2E}{p} = \frac{12}{3} = 4, \qquad F = \frac{2E}{q} = \frac{12}{3} = 4.$$

Πρόκειται για το *τετράεδρο*.
<u>Περίπτωση $(p,q) = (3,4)$.</u> Έχουμε

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{4} - 1 = \frac{1}{6}, \qquad E = \frac{2}{1/6} = 12,$$

και άρα

$$V = \frac{24}{3} = 8, \qquad F = \frac{24}{4} = 6.$$

Πρόκειται για τον *κύβο*.
<u>Περίπτωση $(p,q) = (4,3)$.</u> Έχουμε πάλι

$$E = 12, \qquad V = \frac{24}{4} = 6, \qquad F = \frac{24}{3} = 8.$$

Πρόκειται για το *οκτάεδρο*.
<u>Περίπτωση $(p,q) = (3,5)$.</u> Έχουμε

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{5} - 1 = \frac{1}{15}, \qquad E = \frac{2}{1/15} = 30,$$

και άρα

$$V = \frac{60}{3} = 20, \qquad F = \frac{60}{5} = 12.$$

Πρόκειται για το *δωδεκάεδρο*.
<u>Περίπτωση $(p,q) = (5,3)$.</u> Έχουμε πάλι

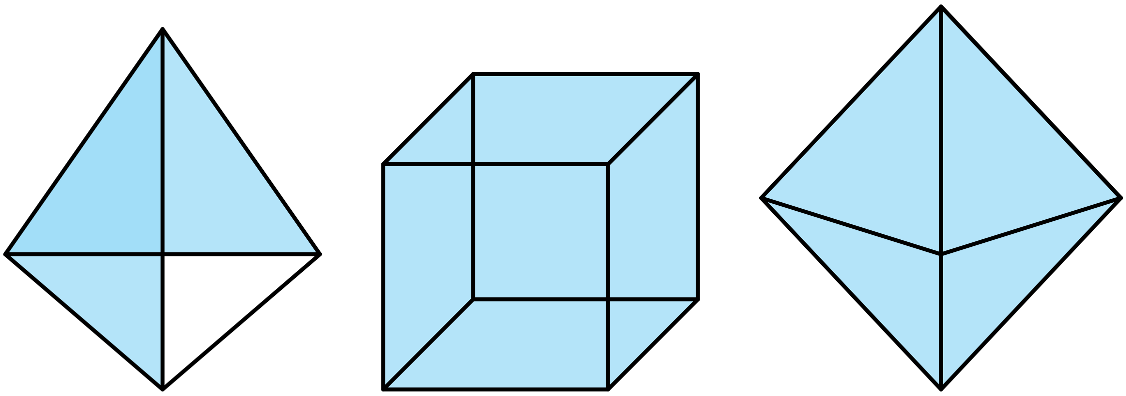
$$E = 30, \qquad V = \frac{60}{5} = 12, \qquad F = \frac{60}{3} = 20.$$

Πρόκειται για το *εικοσάεδρο*.

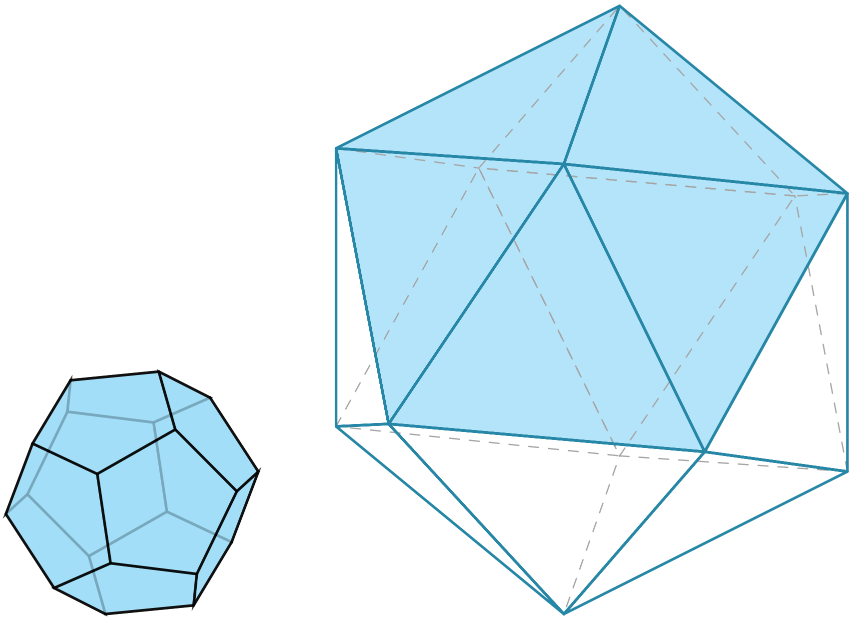
Επομένως τα μόνα κυρτά κανονικά πολύεδρα είναι:

$$\boxed{\text{τετράεδρο, κύβος, οκτάεδρο, δωδεκάεδρο, εικοσάεδρο.}}$$

Άρα υπάρχουν ακριβώς 5 κυρτά κανονικά πολύεδρα. □



Τετράεδρο Κύβος Οκτάεδρο



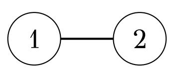
Δωδεκάεδρο Εικοσάεδρο

Παράδειγμα 6.19 (Πλήθος επισημασμένων δέντρων)**.** Πόσα επισημασμένα δέντρα υπάρχουν πάνω σε n κορυφές;

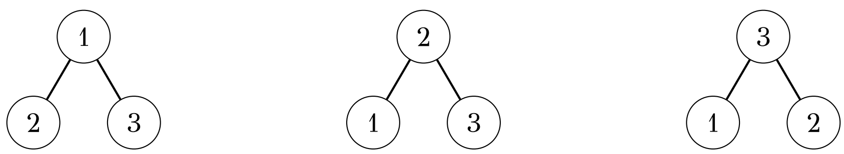
Ας ξαναδούμε πρώτα τις μικρές τιμές του n.

Για $n = 1$, υπάρχει μόνο 1 επισημασμένο δέντρο:

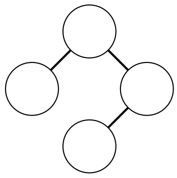
Για $n = 2$, πάλι υπάρχει μόνο 1 επισημασμένο δέντρο:



Για $n = 3$, υπάρχει μόνο ένα μη επισημασμένο δέντρο, αλλά 3 επισημασμένα δέντρα, ανάλογα με το ποια κορυφή παίρνει την κεντρική ετικέτα:

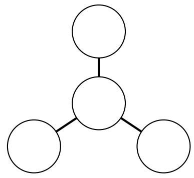


Για $n = 4$, είναι πιο πρακτικό να μετρήσουμε χωριστά τα επισημασμένα δέντρα που προέρχονται από καθεμία από τις δύο μορφές μη επισημασμένου δέντρου.



Υπάρχουν 4! τρόποι να βάλουμε τις ετικέτες $1, 2, 3, 4$ στις κορυφές. Όμως μετράμε κάθε τέτοιο επισημασμένο δέντρο δύο φορές, λόγω της κατοπτρικής συμμετρίας του μονοπατιού.

Σύνολο: $\dfrac{4!}{2} = 12.$



Μόλις διαλέξουμε ποια ετικέτα θα μπει στο κέντρο, οι υπόλοιπες τρεις τοποθετήσεις δεν διακρίνονται μεταξύ τους, αφού μπορούμε να περιστρέψουμε το σχήμα.

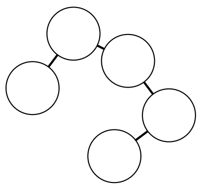
Σύνολο: $\dfrac{4!}{3!} = 4.$

Άρα για $n = 4$ παίρνουμε συνολικά

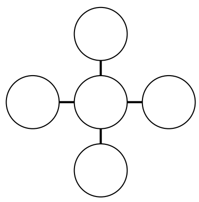
$$12 + 4 = 16$$

επισημασμένα δέντρα.

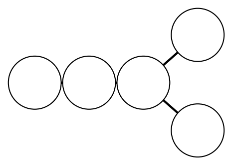
Για $n = 5$, με την ίδια λογική, υπάρχουν 125 επισημασμένα δέντρα. Οι τρεις δυνατές μορφές μη επισημασμένου δέντρου και τα αντίστοιχα πλήθη είναι:



$\dfrac{5!}{2} = 60$



$\dfrac{5!}{4!} = 5$



$\dfrac{5!}{2!} = 60$

Πράγματι,

$$60 + 5 + 60 = 125.$$

Θεώρημα 6.20 (Θεώρημα του Cayley). *Ο αριθμός των επισημασμένων δέντρων πάνω σε n κορυφές είναι*

$$n^{n-2}.$$

Παρατήρηση 6.21 (Η περίπτωση $n = 1$). Ο τύπος του Cayley λειτουργεί και για $n = 1$, αφού

$$1^{1-2} = 1^{-1} = 1.$$

Αυτό είναι περισσότερο μια ευχάριστη σύμπτωση παρά κάτι βαθύτερο.

Πριν περάσουμε στην απόδειξη του θεωρήματος, ας αποκτήσουμε μια αίσθηση του πόσο καλό είναι το φράγμα n^{n-2}.

Ένας πολύ αδρός άνω φραγμός είναι ο εξής: ο αριθμός όλων των επισημασμένων γραφημάτων πάνω σε n κορυφές είναι

$$2^{\binom{n}{2}},$$

αφού για κάθε ένα από τα $\binom{n}{2}$ δυνατά ζεύγη κορυφών αποφασίζουμε ανεξάρτητα αν θα υπάρχει ή όχι ακμή. Άρα βέβαια

$$\#\{\text{επισημασμένα δέντρα σε } n \text{ κορυφές}\} \le 2^{\binom{n}{2}}.$$

Για σύγκριση,

$$2^{\binom{n}{2}} \approx 2^{n^2/2}, \qquad n^{n-2} = (2^{\log_2 n})^{n-2} \approx 2^{n \log_2 n},$$

οπότε ο τύπος του Cayley είναι μια πολύ ουσιαστική βελτίωση.

Ορισμός 6.22 (Κωδικοποίηση). Μια *κωδικοποίηση* ενός συνόλου αντικειμένων X είναι μια 1-1 απεικόνιση

$$\mathrm{Enc} : X \hookrightarrow \mathcal{E},$$

όπου $\mathcal{E}$ είναι ένα σύνολο από "κωδικούς", δηλαδή από απλούστερες αναπαραστάσεις των αντικειμένων του X.

Παρατήρηση 6.23 (Χρήση κωδικοποιήσεων για άνω φράγματα). Αφού μια κωδικοποίηση είναι 1-1, έχουμε πάντοτε

$$|X| \le |\mathcal{E}|.$$

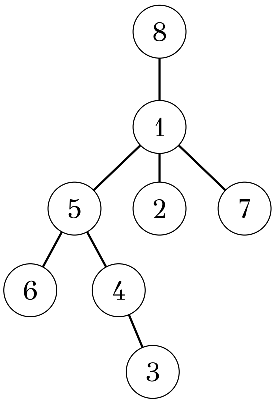
Άρα, αν το σύνολο $\mathcal{E}$ μετριέται εύκολα, μπορούμε να πάρουμε ένα άνω φράγμα για το $|X|$.

Αν, μάλιστα, η κωδικοποίηση αποδειχθεί τελικά και επί, δηλαδή αμφιμονοσήμαντη, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε ακριβώς το $|X|$.

Επιστρέφοντας στα επισημασμένα δέντρα, ας ξεκινήσουμε με μια πρώτη, σπάταλη, κωδικοποίηση.

Σε ένα δέντρο T με n κορυφές και $n-1$ ακμές, μπορούμε να καταγράψουμε τις ακμές του σε έναν πίνακα $2 \times (n-1)$, βάζοντας σε κάθε στήλη τα δύο άκρα μιας ακμής.

Για παράδειγμα, για το παρακάτω επισημασμένο δέντρο:



$$\underbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 5&1&1&2&6&4&5\\\hline 4&7&8&1&5&3&1\\\hline\end{array}}_{|V|-1 \text{ στήλες}}$$

Αυτή η αντιστοίχιση είναι βέβαια 1-1: δύο διαφορετικά δέντρα διαφέρουν τουλάχιστον σε μία ακμή, άρα δεν μπορούν να δώσουν τον ίδιο πίνακα.

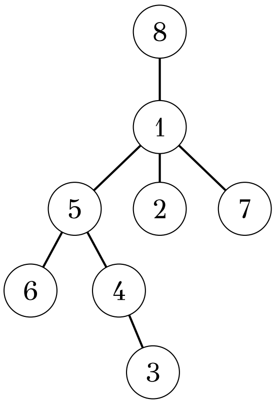
Άρα, αν $\mathcal{T}_n$ είναι το σύνολο των επισημασμένων δέντρων σε n κορυφές, παίρνουμε χονδρικά το άνω φράγμα

$$|\mathcal{T}_n| \le \binom{n}{2}^{n-1} \lesssim n^{2n-2}.$$

Όμως αυτή η κωδικοποίηση είναι πολύ σπάταλη, αφού πάρα πολλοί διαφορετικοί πίνακες δεν αντιστοιχούν σε δέντρα, και ακόμη περισσότεροι διαφορετικοί πίνακες αντιστοιχούν στο ίδιο δέντρο.

Μπορούμε να κάνουμε κάτι καλύτερο ως εξής. Ριζώνουμε το δέντρο στη μεγαλύτερη ετικέτα, δηλαδή στην κορυφή n. Για κάθε κορυφή $1, 2, \ldots, n-1$, καταγράφουμε τον γονέα της.

Για το ίδιο δέντρο, αν ριζώσουμε στην κορυφή 8, παίρνουμε:



κορυφή	1	2	3	4	5	6	7
γονέας	8	1	4	5	1	5	1

$|V|-1$ στήλες

Η επάνω σειρά δεν περιέχει πια καμία ουσιαστική πληροφορία, αφού είναι πάντα

$$1, 2, \ldots, n-1.$$

Άρα μπορούμε να κωδικοποιήσουμε το δέντρο απλώς με τη λέξη

$$8,\ 1,\ 4,\ 5,\ 1,\ 5,\ 1,$$

δηλαδή με τη λίστα των γονέων των κορυφών $1, \ldots, n-1$, αν θεωρούμε δεδομένο ότι η ρίζα είναι η μέγιστη κορυφή.

Από εδώ προκύπτει το άνω φράγμα

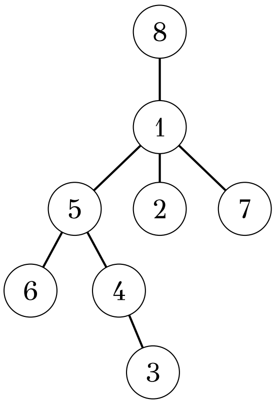
$$|\mathcal{T}_n| \leq n^{n-1},$$

αφού έχουμε ακολουθία μήκους $n-1$ και κάθε θέση μπορεί να πάρει μία από τις n δυνατές ετικέτες.

Αυτό είναι πολύ πιο κοντά στο επιθυμητό n^{n-2}, αλλά εξακολουθεί να μην είναι το ακριβές αποτέλεσμα. Για να φτάσουμε στον ακριβή τύπο, χρειαζόμαστε μια πιο λεπτή κωδικοποίηση: τον κώδικα Prüfer.

Ορισμός 6.24 (Εκτεταμένος κώδικας Prüfer)**.** Ο *εκτεταμένος κώδικας Prüfer* ενός επισημασμένου δέντρου είναι η ακολουθία ζευγών που προκύπτει αν διαγράφουμε επανειλημμένα το φύλλο με τη μικρότερη ετικέτα και, κάθε φορά, καταγράφουμε το φύλλο που διαγράφηκε και την ετικέτα του γονέα του.

Για το δέντρο του παραδείγματός μας, ο εκτεταμένος κώδικας Prüfer είναι ο εξής:



ελάχιστο φύλλο	2	3	4	6	5	7	1
γονέας	1	4	5	5	1	1	8

$|V|-1$ στήλες

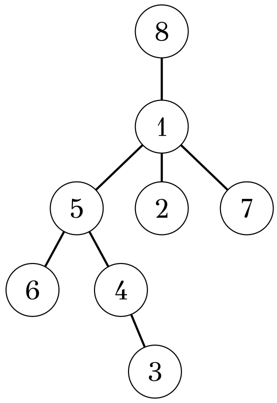
Σε πρώτη ματιά, αυτό δεν μοιάζει καλύτερο από την προηγούμενη κωδικοποίηση. Εξακολουθούμε να έχουμε δύο σειρές αριθμών. Το κρίσιμο όμως σημείο είναι ότι τώρα η επάνω σειρά είναι πλήρως προσδιορισμένη από το ίδιο το δέντρο και από τον κανόνα “κάθε φορά διαγράφουμε το φύλλο με τη μικρότερη ετικέτα”.

Παρατήρηση 6.25. Η παραπάνω διαδικασία είναι καλά ορισμένη, διότι κάθε πεπερασμένο δέντρο έχει τουλάχιστον ένα φύλλο, και αν αφαιρέσουμε ένα φύλλο από ένα δέντρο, ο γράφος που απομένει είναι πάλι δέντρο.

Ορισμός 6.26 (Κώδικας Prüfer). Ο *κώδικας Prüfer* ενός επισημασμένου δέντρου είναι η ακολουθία των πρώτων $n-2$ αριθμών της δεύτερης σειράς του εκτεταμένου κώδικα Prüfer, δηλαδή η ακολουθία των γονέων που καταγράφονται πριν απομείνουν μόνο δύο κορυφές.

Για το παραπάνω δέντρο, ο κώδικας Prüfer είναι

$$1,\ 4,\ 5,\ 5,\ 1,\ 1.$$



1 4 5 5 1 1

Η μεγάλη δύναμη του κώδικα Prüfer είναι ότι κάθε επισημασμένο δέντρο σε κορυφές $\{1, 2, \ldots, n\}$ αντιστοιχεί σε μία ακολουθία μήκους $n-2$ με όρους από το $\{1, 2, \ldots, n\}$, και αντιστρόφως. Πράγματι, για το αντίστροφο εργαζόμαστε ως εξής.

Παράδειγμα 6.27 (Παράδειγμα αποκωδικοποίησης Prüfer για $n = 8$). Θα κατασκευάσουμε το επισημασμένο δέντρο που αντιστοιχεί στην ακολουθία Prüfer

$$(1, 4, 5, 5, 1, 1).$$

Ξεκινάμε με το σύνολο κορυφών

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}.$$

Ο κανόνας είναι ο εξής: σε κάθε βήμα βρίσκουμε τη *μικρότερη* ετικέτα που δεν εμφανίζεται στην τρέχουσα ακολουθία, και την ενώνουμε με την *πρώτη* ετικέτα της ακολουθίας. Ύστερα διαγράφουμε αυτή τη μικρότερη ετικέτα από το σύνολο κορυφών και αφαιρούμε το πρώτο στοιχείο της ακολουθίας.

Εφαρμόζουμε τη διαδικασία βήμα προς βήμα:

τρέχουσα ακολουθία	μικρότερη ετικέτα που δεν εμφανίζεται	νέα ακμή	νέα ακολουθία
$(1, 4, 5, 5, 1, 1)$	2	$\{2, 1\}$	$(4, 5, 5, 1, 1)$
$(4, 5, 5, 1, 1)$	3	$\{3, 4\}$	$(5, 5, 1, 1)$
$(5, 5, 1, 1)$	4	$\{4, 5\}$	$(5, 1, 1)$
$(5, 1, 1)$	6	$\{6, 5\}$	$(1, 1)$
$(1, 1)$	5	$\{5, 1\}$	(1)
(1)	7	$\{7, 1\}$	$\varnothing$

Αφού αδειάσει η ακολουθία, απομένουν δύο κορυφές, οι 1 και 8, τις οποίες ενώνουμε με την τελευταία ακμή $\{1, 8\}$.

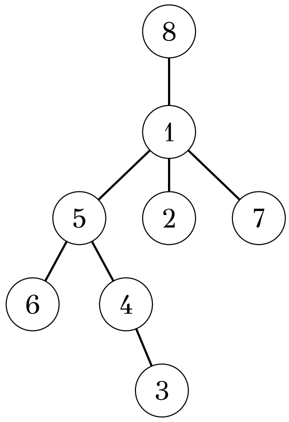
Άρα το δέντρο που αντιστοιχεί στην ακολουθία

$$(1, 4, 5, 5, 1, 1)$$

έχει ακμές

$$\{2, 1\},\ \{3, 4\},\ \{4, 5\},\ \{6, 5\},\ \{5, 1\},\ \{7, 1\},\ \{1, 8\}.$$

Δηλαδή το τελικό δέντρο είναι το εξής:



Από αυτή τη 1-1 αντιστοιχία προκύπτει τελικά ο τύπος του Cayley:

$$n^{n-2}.$$

Θεώρημα 6.28 (Θεώρημα του Cayley). *Ο αριθμός των επισημασμένων δέντρων με σύνολο κορυφών* $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ *είναι*

$$n^{n-2}.$$

Απόδειξη. Θα ορίσουμε δύο απεικονίσεις

$$f : \mathcal{T}_n \longrightarrow [n]^{n-2} \qquad \text{και} \qquad g : [n]^{n-2} \longrightarrow \mathcal{T}_n,$$

όπου $\mathcal{T}_n$ είναι το σύνολο των επισημασμένων δέντρων με κορυφές το $[n]$, και θα δείξουμε ότι είναι αντίστροφες μεταξύ τους.

Ορισμός της f**.** Για $T \in \mathcal{T}_n$, ο *κώδικας Prüfer* $f(T)$ ορίζεται ως εξής: διαγράφουμε επανειλημμένα το φύλλο με τη μικρότερη ετικέτα και κάθε φορά καταγράφουμε την ετικέτα του μοναδικού γείτονά του. Μετά από $n-2$ βήματα απομένουν δύο κορυφές, οπότε παίρνουμε μια ακολουθία μήκους $n-2$ με όρους από το $[n]$.

Ορισμός της g**.** Έστω

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}) \in [n]^{n-2}.$$

Θα κατασκευάσουμε από την $\mathbf{a}$ ένα επισημασμένο δέντρο $g(\mathbf{a})$.

Θέτουμε αρχικά

$$S_1 = [n].$$

Για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n-2$, ορίζουμε b_i να είναι η *μικρότερη* ετικέτα του S_i που δεν εμφανίζεται στην ουρά

$$(a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{n-2}).$$

Έπειτα προσθέτουμε την ακμή

$$\{b_i, a_i\}$$

και θέτουμε

$$S_{i+1} = S_i \setminus \{b_i\}.$$

Στο τέλος απομένουν δύο ετικέτες, έστω u, v, και προσθέτουμε την τελευταία ακμή

$$\{u, v\}.$$

Ο γράφος που προκύπτει τον συμβολίζουμε με $g(\mathbf{a})$.

Η διαδικασία αυτή είναι καλά ορισμένη, διότι σε κάθε βήμα το πλήθος των διαθέσιμων ετικετών είναι μεγαλύτερο από το μήκος της εναπομένουσας ακολουθίας, άρα υπάρχει τουλάχιστον μία ετικέτα που δεν εμφανίζεται σε αυτήν.

Επιπλέον, με επαγωγή ως προς n βλέπουμε ότι το $g(\mathbf{a})$ είναι πράγματι δέντρο: για $n = 2$ είναι προφανές, ενώ για $n \geq 3$, αν αφαιρέσουμε την κορυφή b_1, μένει ακριβώς το δέντρο που αντιστοιχεί στην ακολουθία $(a_2, \ldots, a_{n-2})$, και το b_1 προστίθεται ως νέο φύλλο συνδεδεμένο με την a_1.

Λήμμα. Αν $T \in \mathcal{T}_n$ και $v \in [n]$, τότε η ετικέτα v εμφανίζεται στον κώδικα Prüfer του T ακριβώς

$$\deg_T(v) - 1$$

φορές.

Απόδειξη. Κάθε φορά που διαγράφεται ένα φύλλο γειτονικό με την v, καταγράφεται η ετικέτα v. Αυτό συμβαίνει μία φορά για καθεμία από τις ακμές που προσπίπτουν στην v, εκτός από μία.

Πράγματι, όσο η κορυφή v παραμένει στο δέντρο και έχει βαθμό τουλάχιστον 2, οι γειτονικές της κορυφές μπορούν να διαγράφονται η μία μετά την άλλη, και κάθε τέτοια διαγραφή καταγράφει την v. Όταν μείνει μόνο μία προσπίπτουσα ακμή στην v, τότε η v γίνεται φύλλο. Από εκεί και πέρα, είτε διαγράφεται η ίδια σε μεταγενέστερο βήμα, είτε είναι μία από τις δύο τελευταίες κορυφές που απομένουν. Σε καμία από αυτές τις δύο περιπτώσεις η τελευταία προσπίπτουσα ακμή της v δεν προκαλεί νέα εμφάνιση της ετικέτας v στον κώδικα.

Άρα η v καταγράφεται ακριβώς μία φορά για καθεμία από τις $\deg_T(v) - 1$ πρώτες προσπίπτουσες ακμές της, και συνεπώς εμφανίζεται ακριβώς $\deg_T(v) - 1$ φορές στον κώδικα Prüfer. $\square$

Από το λήμμα προκύπτει αμέσως ότι μια κορυφή είναι φύλλο αν και μόνο αν η ετικέτα της δεν εμφανίζεται στον κώδικα Prüfer.

Ισχυρισμός 1. Για κάθε $\mathbf{a} \in [n]^{n-2}$ ισχύει

$$f(g(\mathbf{a})) = \mathbf{a}.$$

Απόδειξη. Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή ως προς n.

Για $n = 2$ η πρόταση είναι προφανής.

Έστω τώρα $n \geq 3$ και

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}).$$

Έστω b_1 η μικρότερη ετικέτα που δεν εμφανίζεται στην πλήρη ακολουθία $\mathbf{a}$. Από τον ορισμό της g, στο δέντρο $g(\mathbf{a})$ η κορυφή b_1 έχει προσαρτηθεί στην κορυφή a_1 ως νέο φύλλο.

Θα δείξουμε ότι το b_1 είναι το *μικρότερο* φύλλο του $g(\mathbf{a})$. Πράγματι, κάθε ετικέτα $c < b_1$ εμφανίζεται τουλάχιστον μία φορά στην $\mathbf{a}$, οπότε δεν μπορεί να είναι φύλλο στο πρώτο βήμα της αποκωδικοποίησης. Αντίθετα, η b_1 δεν εμφανίζεται καθόλου στην $\mathbf{a}$, άρα είναι φύλλο.

Επομένως, το πρώτο βήμα του αλγορίθμου Prüfer για το δέντρο $g(\mathbf{a})$ διαγράφει ακριβώς την κορυφή b_1 και καταγράφει την ετικέτα a_1.

Το δέντρο που απομένει μετά τη διαγραφή της b_1 είναι ακριβώς το

$$g(a_2, \ldots, a_{n-2}).$$

Άρα, από την επαγωγική υπόθεση, ο υπόλοιπος κώδικας Prüfer είναι

$$(a_2, \ldots, a_{n-2}).$$

Συνεπώς

$$f(g(\mathbf{a})) = (a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}) = \mathbf{a}.$$

$\square$

Ισχυρισμός 2. Για κάθε $T \in \mathcal{T}_n$ ισχύει

$$g(f(T)) = T.$$

Απόδειξη. Η απόδειξη γίνεται πάλι με επαγωγή ως προς n.

Για $n = 2$ δεν υπάρχει τίποτε να αποδείξουμε.

Έστω τώρα $n \geq 3$, και έστω

$$f(T) = (a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}).$$

Έστω b το μικρότερο φύλλο του T. Από τον ορισμό του κώδικα Prüfer, το πρώτο βήμα διαγράφει την κορυφή b και καταγράφει την ετικέτα του μοναδικού γείτονά της, που είναι η a_1.

Θα δείξουμε ότι η b είναι ακριβώς η μικρότερη ετικέτα που δεν εμφανίζεται στην ακολουθία $(a_1, \ldots, a_{n-2})$.

Πράγματι, επειδή η b είναι φύλλο, από το λήμμα εμφανίζεται

$$\deg_T(b) - 1 = 1 - 1 = 0$$

φορές στον κώδικα Prüfer. Άρα η b δεν εμφανίζεται καθόλου στην ακολουθία. Αν υπήρχε μικρότερη ετικέτα $c < b$ που επίσης δεν εμφανιζόταν στην ακολουθία, τότε, πάλι από το λήμμα, θα είχαμε

$$\deg_T(c) - 1 = 0,$$

δηλαδή $\deg_T(c) = 1$, οπότε και η c θα ήταν φύλλο. Αυτό όμως αντιφάσκει με το ότι η b είναι το μικρότερο φύλλο του T.

Άρα η b είναι πράγματι η μικρότερη ετικέτα που δεν εμφανίζεται στον κώδικα.

Από τον ορισμό της g, το πρώτο βήμα της αποκωδικοποίησης προσθέτει ακριβώς την ακμή

$$\{b, a_1\}.$$

Αφαιρώντας τώρα την κορυφή b από το T, παίρνουμε δέντρο $T - b$ με κώδικα Prüfer

$$(a_2, \ldots, a_{n-2}).$$

Άρα, από την επαγωγική υπόθεση,

$$g(a_2, \ldots, a_{n-2}) = T - b.$$

Προσθέτοντας ξανά την κορυφή b ενωμένη με την a_1, ανακτούμε ακριβώς το δέντρο T. Άρα

$$g(f(T)) = T.$$

$\square$

Οι δύο ισχυρισμοί δείχνουν ότι οι f και g είναι αντίστροφες μεταξύ τους. Επομένως η f είναι αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση ανάμεσα στο $\mathcal{T}_n$ και στο $[n]^{n-2}$.

Άρα

$$|\mathcal{T}_n| = \left|[n]^{n-2}\right| = n^{n-2}.$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του θεωρήματος του Cayley. $\square$

Κύκλοι και μονοπάτια Hamilton

Στο εξής εργαζόμαστε με *απλά πεπερασμένα γραφήματα.*

Ορισμός 6.29. Ένας *κύκλος Hamilton* σε έναν γράφο G είναι ένας κύκλος του G που περνά από όλες τις κορυφές του G.

Ένα *μονοπάτι Hamilton* σε έναν γράφο G είναι ένα μονοπάτι του G που περνά από όλες τις κορυφές του G.

Η ορολογία αυτή είναι φυσική: ένας κύκλος Hamilton χρησιμοποιεί κάθε κορυφή *ακριβώς μία φορά*, εκτός από την αρχική κορυφή, η οποία επανεμφανίζεται στο τέλος για να κλείσει ο κύκλος. Αν ο γράφος έχει n κορυφές, τότε ένας κύκλος Hamilton έχει μήκος n, ενώ ένα μονοπάτι Hamilton έχει μήκος $n-1$.

Ένα απλό πρακτικό πρόβλημα που οδηγεί φυσικά στην έννοια αυτή είναι το ακόλουθο. Έστω ότι πολλά άτομα καλούνται σε ένα δείπνο και θα καθίσουν γύρω από ένα στρογγυλό τραπέζι. Μπορούμε να τα τοποθετήσουμε έτσι ώστε κάθε καλεσμένος να γνωρίζει και τους δύο γειτόνους του; Αν παριστάνουμε τα άτομα με κορυφές και ενώνουμε δύο κορυφές με ακμή όταν τα αντίστοιχα άτομα γνωρίζονται, τότε μια τέτοια διάταξη υπάρχει ακριβώς όταν ο γράφος περιέχει κύκλο Hamilton.

Είναι φανερό ότι μερικές απλές αναγκαίες συνθήκες πρέπει να ισχύουν:

- αν υπάρχει απομονωμένη κορυφή, τότε κύκλος Hamilton δεν υπάρχει,
- αν ο γράφος δεν είναι συνεκτικός, τότε κύκλος Hamilton δεν υπάρχει,
- αν ο γράφος είναι πλήρης, τότε βέβαια υπάρχει κύκλος Hamilton.

Το βασικό ερώτημα είναι: *ποιες επαρκείς συνθήκες εγγυώνται την ύπαρξη κύκλου Hamilton;* Πριν δούμε ένα ισχυρό κριτήριο, αξίζει να παρατηρήσουμε ότι το να έχει ένας γράφος "πολλές ακμές" δεν αρκεί από μόνο του με προφανή τρόπο.

Παράδειγμα 6.30 (Πολλές ακμές δεν αρκούν)**.** Για κάθε $n \geq 3$, θεωρούμε τον γράφο που προκύπτει αν πάρουμε έναν πλήρη γράφο K_{n-1} και προσθέσουμε μία ακόμη κορυφή, την οποία ενώνουμε με *μία μόνο* από τις κορυφές του K_{n-1}.

Ο γράφος αυτός δεν έχει κύκλο Hamilton, διότι περιέχει κορυφή βαθμού 1, ενώ σε κάθε κύκλο κάθε κορυφή πρέπει να έχει τουλάχιστον δύο γειτονικές κορυφές πάνω στον κύκλο.

Παρόλα αυτά, ο αριθμός των ακμών του είναι

$$\binom{n-1}{2} + 1.$$

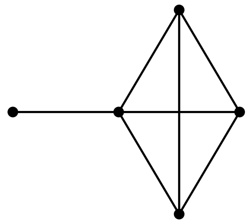
Άρα το ποσοστό των ακμών του σε σχέση με το πλήθος $\binom{n}{2}$ όλων των δυνατών ακμών είναι

$$\frac{\binom{n-1}{2}+1}{\binom{n}{2}} = \frac{\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1}{\frac{n(n-1)}{2}} = 1 - \frac{2}{n} + \frac{2}{n(n-1)}.$$

Ειδικότερα,

$$\frac{\binom{n-1}{2}+1}{\binom{n}{2}} \longrightarrow 1 \qquad \text{όταν } n \to \infty.$$

Δηλαδή, ακόμη και ένας γράφος με "σχεδόν όλες" τις δυνατές ακμές μπορεί να μην έχει κύκλο Hamilton.



Παράδειγμα της κατασκευής για $n = 5$: ένας K_4 και μία επιπλέον κορυφή βαθμού 1.

Το προηγούμενο παράδειγμα δείχνει ότι ένα αδρό κάτω φράγμα για το πλήθος των ακμών δεν είναι το κατάλληλο εργαλείο. Αντίθετα, μια *τοπική* συνθήκη πάνω στους βαθμούς των κορυφών αποδεικνύεται πολύ αποτελεσματική.

Θεώρημα 6.31 (Dirac). *Έστω $n \geq 3$, και έστω G απλός γράφος με n κορυφές. Αν κάθε κορυφή του G έχει βαθμό τουλάχιστον $n/2$, τότε ο G έχει κύκλο Hamilton.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε πρώτα ότι ο G είναι συνεκτικός. Πράγματι, αν ο G είχε περισσότερες από μία συνεκτικές συνιστώσες, τότε μία από αυτές θα είχε το πολύ $n/2$ κορυφές. Κάθε κορυφή αυτής της συνιστώσας θα είχε τότε βαθμό το πολύ $n/2 - 1$, πράγμα που αντιφάσκει με την υπόθεση.

Υποθέτουμε τώρα, προς άτοπο, ότι ο G *δεν* έχει κύκλο Hamilton. Προσθέτουμε στον G όσες ακμές μπορούμε, χωρίς να δημιουργήσουμε κύκλο Hamilton. Με αυτόν τον τρόπο παίρνουμε έναν απλό γράφο G' με τις εξής ιδιότητες:

- ο G' περιέχει τον G,
- κάθε κορυφή του G' έχει ακόμη βαθμό τουλάχιστον $n/2$,
- ο G' δεν έχει κύκλο Hamilton,
- αν προσθέσουμε οποιαδήποτε ελλείπουσα ακμή στον G', τότε ο νέος γράφος αποκτά κύκλο Hamilton.

Εφόσον ο G' δεν έχει κύκλο Hamilton, δεν μπορεί να είναι πλήρης. Άρα υπάρχουν δύο μη γειτονικές κορυφές x, y του G'.

Από τη μεγιστότητα του G', ο γράφος $G' + xy$ έχει κύκλο Hamilton. Επειδή όμως ο G' δεν έχει κύκλο Hamilton, ο κύκλος αυτός πρέπει να χρησιμοποιεί τη νέα ακμή xy. Αν αφαιρέσουμε από αυτόν την ακμή xy, μένει ένα μονοπάτι Hamilton του G' με άκρα τα x και y.

Έστω λοιπόν

$$x = z_1, z_2, \ldots, z_n = y$$

οι κορυφές αυτού του μονοπατιού, με τη σειρά που εμφανίζονται από το x προς το y.

Θεωρούμε τα σύνολα δεικτών

$$A = \{\, i \in \{2, 3, \ldots, n\} : xz_i \in E(G') \,\}$$

και

$$B = \{\, i \in \{2, 3, \ldots, n\} : z_{i-1}y \in E(G') \,\}.$$

Έχουμε

$$|A| = \deg_{G'}(x), \qquad |B| = \deg_{G'}(y).$$

Άρα

$$|A| + |B| = \deg_{G'}(x) + \deg_{G'}(y) \geq \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n.$$

Όμως και τα δύο σύνολα A, B είναι υποσύνολα του συνόλου

$$\{2, 3, \ldots, n\},$$

το οποίο έχει μόνο $n-1$ στοιχεία. Επομένως, από την αρχή του περιστερώνα, τα σύνολα A και B δεν μπορούν να είναι ξένα· άρα υπάρχει δείκτης i με

$$2 \leq i \leq n$$

τέτοιος ώστε

$$i \in A \cap B.$$

Δηλαδή

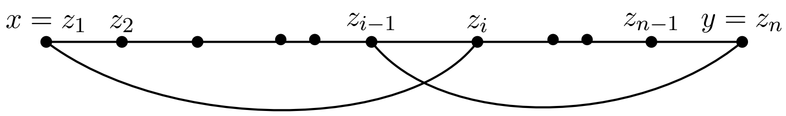
$$xz_i \in E(G') \qquad \text{και} \qquad z_{i-1}y \in E(G').$$

Αλλά τότε μπορούμε να σχηματίσουμε τον κύκλο

$$x = z_1, z_2, \ldots, z_{i-1}, y = z_n, z_{n-1}, \ldots, z_i, x.$$

Ο κύκλος αυτός περνά από όλες τις κορυφές $z_1, \ldots, z_n$ ακριβώς μία φορά, άρα είναι κύκλος Hamilton του G', πράγμα άτοπο.

Η αντίφαση δείχνει ότι ο G' έχει κύκλο Hamilton, και συνεπώς και ο αρχικός γράφος G έχει κύκλο Hamilton. □



Η ύπαρξη των ακμών xz_i και $z_{i-1}y$ επιτρέπει να "κλείσουμε" το μονοπάτι Hamilton σε κύκλο Hamilton.

Το θεώρημα του Dirac είναι ένα από τα πιο όμορφα και χρηστικά κριτήρια ύπαρξης κύκλου Hamilton: δεν βασίζεται στο συνολικό πλήθος των ακμών, αλλά επιβάλλει μια ισχυρή, ομοιόμορφη συνθήκη σε κάθε κορυφή χωριστά.

Παρατήρηση 6.32 (Βέλτιστο του φράγματος του Dirac). Το φράγμα του Θεωρήματος του Dirac είναι βέλτιστο. Πιο συγκεκριμένα:

- αν $n = 2m$ είναι άρτιος, τότε η υπόθεση

  $$\delta(G) \geq \frac{n}{2}$$

  δεν μπορεί να αντικατασταθεί από την ασθενέστερη

  $$\delta(G) \geq \frac{n}{2} - 1;$$

- αν $n = 2m + 1$ είναι περιττός, τότε η υπόθεση

  $$\delta(G) \geq \frac{n}{2}$$

  ισοδυναμεί με

  $$\delta(G) \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil,$$

  και ούτε αυτή μπορεί να αντικατασταθεί από την ασθενέστερη

  $$\delta(G) \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Απόδειξη. Θα δώσουμε αντιπαραδείγματα.

1. Η περίπτωση του άρτιου n. Έστω $n = 2m$ με $m \geq 2$, και θεωρούμε το πλήρες διμερές γράφημα

$$G = K_{m-1,m+1}.$$

Κάθε κορυφή του μέρους με $m - 1$ κορυφές έχει βαθμό $m + 1$, ενώ κάθε κορυφή του μέρους με $m + 1$ κορυφές έχει βαθμό $m - 1$. Άρα

$$\delta(G) = m - 1 = \frac{n}{2} - 1.$$

Ισχυριζόμαστε ότι το G δεν είναι Hamiltonian. Πράγματι, σε κάθε διμερές γράφημα κάθε κύκλος εναλλάσσει κορυφές από τα δύο μέρη, άρα έχει τον ίδιο αριθμό κορυφών από κάθε μέρος. Ένας Hamiltonian κύκλος θα έπρεπε λοιπόν να περιέχει ίσο αριθμό κορυφών από τα δύο μέρη. Αυτό όμως είναι αδύνατο, αφού τα δύο μέρη έχουν πληθικότητες $m - 1$ και $m + 1$.

Άρα υπάρχει γράφημα με

$$\delta(G) = \frac{n}{2} - 1$$

το οποίο δεν είναι Hamiltonian. Επομένως, για άρτιο n, το $\frac{n}{2}$ του Dirac είναι βέλτιστο.

2. Η περίπτωση του περιττού n. Έστω τώρα $n = 2m + 1$ με $m \geq 1$, και θεωρούμε το πλήρες διμερές γράφημα

$$G = K_{m,m+1}.$$

Τότε

$$\delta(G) = m = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Και πάλι το G δεν είναι Hamiltonian. Πράγματι, κάθε κύκλος σε διμερές γράφημα έχει άρτιο μήκος, επειδή οι κορυφές του εναλλάσσονται ανάμεσα στα δύο μέρη. Όμως ένας Hamiltonian κύκλος στο G θα είχε μήκος

$$n = 2m + 1,$$

δηλαδή περιττό, πράγμα αδύνατο.

Άρα υπάρχει γράφημα με

$$\delta(G) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

το οποίο δεν είναι Hamiltonian. Επομένως, και για περιττό n, το φράγμα του Dirac είναι βέλτιστο.

□

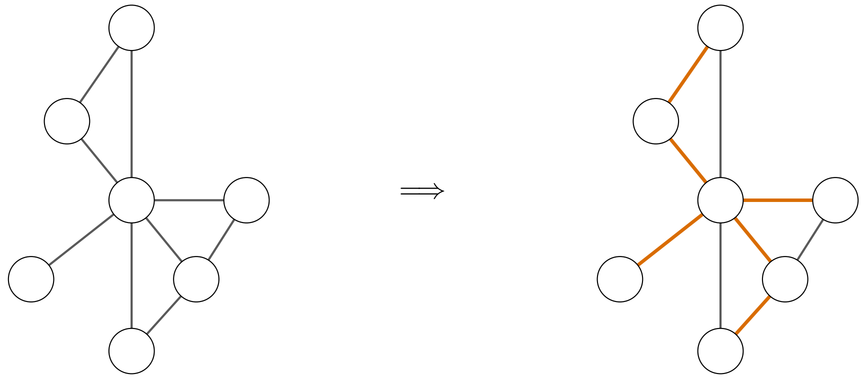
7 Παραγόμενα δέντρα και παραγόμενα δέντρα ελάχιστου βάρους

Ορισμός 7.1 (παραγόμενο δέντρο). Ένα *παραγόμενο δέντρο* ενός γραφήματος G είναι υπογράφημα του G το οποίο περιέχει όλες τις κορυφές του G και είναι δέντρο. Ισοδύναμα, είναι ένα συνεκτικό και άκυκλο υπογράφημα του G με το ίδιο σύνολο κορυφών.

Παράδειγμα 7.2. Στο αριστερό σχήμα φαίνεται ένα συνεκτικό γράφημα, ενώ στο δεξί ένα συνδετικό δέντρο του.

Πρόταση 7.3 (Ύπαρξη παραγόμενου δέντρου). *Κάθε συνεκτικό γράφημα έχει παραγόμενο δέντρο.*

Απόδειξη. Ξεκινάμε από το αρχικό γράφημα G και εφαρμόζουμε τον εξής απλό αλγόριθμο:



Σχήμα 32: Από ένα συνεκτικό γράφημα σε ένα συνδετικό δέντρο του.

Αλγόριθμος εύρεσης παραγόμενου δέντρου

1. Όσο το γράφημα περιέχει κύκλο, διαγράφουμε μία ακμή του κύκλου.
2. Όταν δεν απομένει κανένας κύκλος, σταματάμε.

Η διαδικασία τερματίζει, επειδή το γράφημα έχει πεπερασμένο πλήθος ακμών. Επιπλέον, η διαγραφή μιας ακμής που ανήκει σε κύκλο δεν καταστρέφει τη συνεκτικότητα: τα δύο άκρα της ακμής εξακολουθούν να ενώνονται μέσω των υπόλοιπων ακμών του ίδιου κύκλου. Άρα σε κάθε βήμα το γράφημα παραμένει συνεκτικό.

Στο τέλος δεν υπάρχει κανένας κύκλος, άρα το τελικό γράφημα είναι άκυκλο. Εφόσον παραμένει και συνεκτικό και έχει τις ίδιες κορυφές με το αρχικό γράφημα, είναι συνδετικό δέντρο του G. □

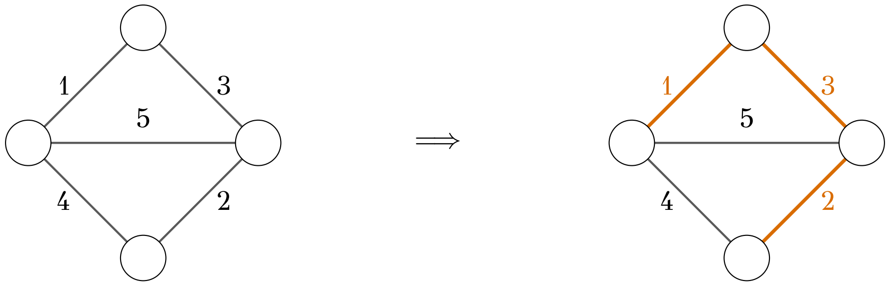
Παρατήρηση 7.4 (Ερμηνεία των βαρών). Σε πολλές εφαρμογές αναθέτουμε σε κάθε ακμή ένα βάρος. Αυτό μπορεί να εκφράζει απόσταση, χρόνο, κόστος, κατανάλωση καυσίμου ή γενικότερα οποιαδήποτε «τιμή» θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε.

Ορισμός 7.5 (Ελάχιστο παραγόμενο δέντρο). Έστω συνεκτικό βεβαρημένο γράφημα $G = (V, E, w)$, όπου $w : E \to \mathbb{R}_{>0}$. Ένα *παραγόμενο δέντρο ελάχιστου βάρους* του G είναι ένα παραγόμενο δέντρο T του G για το οποίο το άθροισμα

$$w(T) := \sum_{e \in E(T)} w(e)$$

είναι ελάχιστο μεταξύ όλων των παραγόμενων δέντρων του G.

Παράδειγμα 7.6. Στο παρακάτω παράδειγμα, στα αριστερά φαίνεται ένα γράφημα με βάρη και στα δεξιά ένα ελάχιστο παραγόμενο δέντρο του.



Παρατήρηση 7.7 (Το πρόβλημα στο πλήρες γράφημα K_n). Μερικές φορές το πρόβλημα διατυπώνεται για το πλήρες γράφημα: επιτρέπουμε δηλαδή κατ' αρχήν σύνδεση μεταξύ κάθε δύο κορυφών. Αυτό είναι ουσιαστικά ισοδύναμο με τη γενική περίπτωση, αφού οι ακμές που λείπουν από το αρχικό γράφημα μπορούν να θεωρηθούν ως ακμές βάρους $+\infty$.

Ο αλγόριθμος του Prim

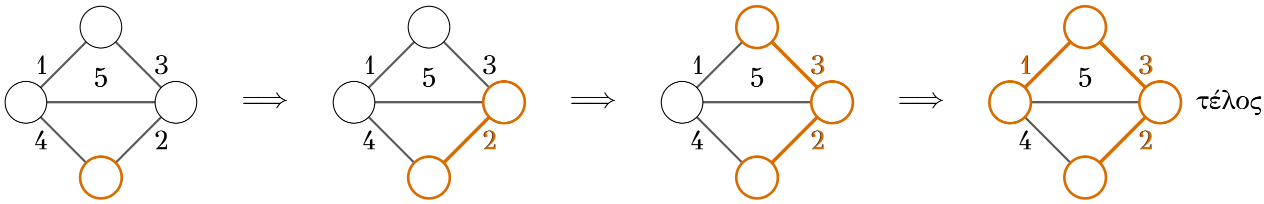
Ο Prim κατασκευάζει το δέντρο «μεγαλώνοντάς» το βήμα προς βήμα.

Έστω συνεκτικό βεβαρημένο γράφημα $G = (V, E, w)$.

Αλγόριθμος Prim

1. Ξεκινάμε από μία οποιαδήποτε κορυφή v.
2. Σε κάθε βήμα προσθέτουμε την ακμή μικρότερου βάρους που έχει ακριβώς το ένα άκρο της στο ήδη κατασκευασμένο δέντρο και το άλλο σε νέα κορυφή.
3. Σταματάμε όταν προστεθούν $|V| - 1$ ακμές.

Στο επόμενο σχήμα ο αλγόριθμος ξεκινά από την κάτω κορυφή.



Σχήμα 33: Τα διαδοχικά βήματα του αλγορίθμου του Prim.

Πρόταση 7.8. *Ο αλγόριθμος του Prim παράγει ελάχιστο παραγόμενο δέντρο.*

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε με επαγωγή το παρακάτω:

Μετά από κάθε βήμα, οι ακμές που έχουν επιλεγεί περιέχονται σε κάποιο παραγόμενο δέντρο ελάχιστου βάρους.

Αρχικά δεν έχει επιλεγεί καμία ακμή, άρα η ιδιότητα είναι προφανής. Υποθέτουμε τώρα ότι, σε κάποιο βήμα, το σύνολο F των ακμών που έχουμε ήδη επιλέξει περιέχεται σε ένα ελάχιστο παραγόμενο δέντρο T. Έστω $S \subseteq V$ το σύνολο των κορυφών του τρέχοντος μερικού δέντρου που έχει κατασκευάσει ο αλγόριθμος Prim. Η επόμενη ακμή e που επιλέγει ο αλγόριθμος είναι, από τον ορισμό του, η ακμή ελάχιστου βάρους που ενώνει τα σύνολα $(S, V \setminus S)$.

Αν $e \in E(T)$, δεν υπάρχει τίποτε να δείξουμε. Έστω λοιπόν ότι $e \notin E(T)$. Τότε το γράφημα $T \cup \{e\}$ περιέχει ακριβώς έναν κύκλο. Στον κύκλο αυτό υπάρχει κάποια άλλη ακμή e' που επίσης ενώνει τα σύνολα $(S, V \setminus S)$, γιατί η ακμή e περνά από το S στο $V \setminus S$ και, για να επιστρέψει ο κύκλος στο S, πρέπει να ξαναπεράσει από το $V \setminus S$ στο S.

Επειδή ο αλγόριθμος επέλεξε την ακμή με το μικρότερο βάρος που ενώνει τα σύνολα, έχουμε

$$w(e) \leq w(e').$$

Αν αφαιρέσουμε από το $T \cup \{e\}$ την ακμή e', παίρνουμε ξανά συνδετικό δέντρο

$$T' := T - e' + e.$$

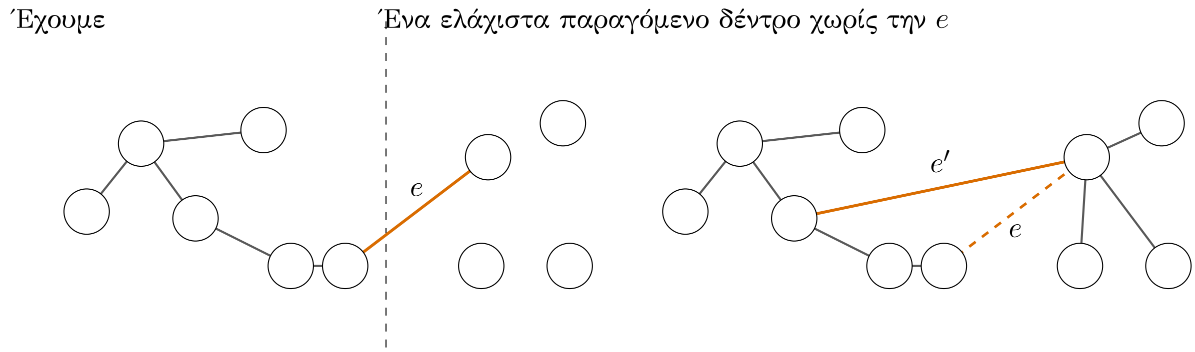
Επιπλέον,

$$w(T') = w(T) - w(e') + w(e) \leq w(T).$$

Εφόσον το T ήταν ήδη ελάχιστο, το T' είναι επίσης ελάχιστα παραγόμενο δέντρο. Και βέβαια το T' περιέχει όλες τις ακμές του F καθώς και τη νέα ακμή e. Άρα η αμετάβλητη ιδιότητα διατηρείται.

Σε κάθε βήμα προστίθεται μία νέα κορυφή με μία μόνο ακμή, άρα το υπογράφημα που κατασκευάζεται παραμένει δέντρο. Μετά από $|V|-1$ βήματα περιέχει όλες τις κορυφές, άρα είναι παραγόμενο δέντρο.

Από την αμετάβλητη ιδιότητα αυτό το δέντρο περιέχεται σε κάποιο ελάχιστα παραγόμενο δέντρο· αφού όμως έχει ήδη $|V|-1$ ακμές, συμπίπτει με αυτό. Επομένως είναι ελάχιστα παραγόμενο και αυτό. $\square$



Σχήμα 34: Το βήμα ανταλλαγής στην απόδειξη του Prim.

Παρατήρηση 7.9. Η προηγούμενη απόδειξη δίνει αμέσως και την ακόλουθη θεμελιώδη ιδιότητα: Για κάθε ζεύγος $(S, V \setminus S)$, κάθε ακμή ελάχιστου βάρους που ενώνει τα δύο σύνολα ανήκει σε κάποιο ελάχιστα παραγόμενο δέντρο.

Αν μάλιστα η ακμή με το μικρότερο βάρος που ενώνει τα σύνολα είναι μοναδική, τότε ανήκει σε *κάθε* ελάχιστα παραγόμενο δέντρο.

Το πρόβλημα του περιοδεύοντος πωλητή

Ορισμός 7.10 (Πρόβλημα του περιοδεύοντος πωλητή). Έστω πλήρες γράφημα $G = (V, E, c)$, όπου

$$E = \binom{V}{2}$$

και $c : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ είναι συνάρτηση κόστους. Το *πρόβλημα του περιοδεύοντος πωλητή* (*TSP*) ζητά να βρεθεί ένας κύκλος Hamilton του G με ελάχιστο δυνατό συνολικό κόστος.

Ορισμός 7.11 (Metric TSP). Το *metric TSP* είναι η ειδική περίπτωση του TSP στην οποία η συνάρτηση κόστους ικανοποιεί, για κάθε $u, v, w \in V$, τις ιδιότητες

$$c(u,v) = c(v,u), \qquad c(u,v) \geq 0,$$

και την ανισότητα τριγώνου

$$c(u,w) \leq c(u,v) + c(v,w).$$

Ισοδύναμα, το κόστος $c(u,v)$ ορίζει μια μετρική πάνω στο V. Στόχος παραμένει η εύρεση ενός κύκλου Hamilton ελάχιστου κόστους.

Ορισμός 7.12 (α-προσεγγιστικός αλγόριθμος)**.** Έστω πρόβλημα ελαχιστοποίησης. Λέμε ότι ένας αλγόριθμος είναι *α-προσεγγιστικός*, όπου $\alpha \geq 1$, αν για κάθε είσοδο I παράγει εφικτή λύση $A(I)$ τέτοια ώστε

$$\mathrm{cost}(A(I)) \leq \alpha \ \mathrm{OPT}(I),$$

όπου $\mathrm{OPT}(I)$ είναι το βέλτιστο δυνατό κόστος για την είσοδο I.

Θεώρημα 7.13 (Υπάρχει 2-προσεγγιστικός αλγόριθμος για το metric TSP)**.** *Για κάθε είσοδο του metric TSP υπάρχει αλγόριθμος που παράγει κύκλο Hamilton κόστους το πολύ* 2 OPT.

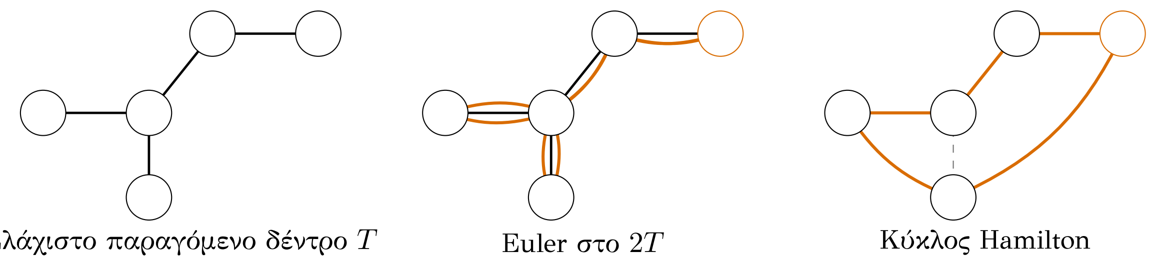
Απόδειξη. Ο αλγόριθμος είναι ο εξής.

Έστω πλήρες γράφημα $G = (V, E, c)$ που ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα.

METRIC-TSP-APPROX

1. Βρίσκουμε ένα ελάχιστο παραγόμενο δέντρο T του G.
2. Διπλασιάζουμε κάθε ακμή του T, ώστε να πάρουμε το πολυγράφημα $2T$.
3. Βρίσκουμε έναν κύκλο Euler W στο $2T$.
4. Διατρέχουμε τον W και κάθε φορά που πρόκειται να ξαναεπισκεφθούμε κορυφή που έχει ήδη εμφανιστεί, την παραλείπουμε και πηγαίνουμε κατευθείαν στην επόμενη μη επισκεψάμενη κορυφή.
5. Στο τέλος επιστρέφουμε στην αρχική κορυφή.

Για οπτική καθαρότητα, στα επόμενα σχήματα δεν σχεδιάζουμε όλες τις ακμές του πλήρους γραφήματος, αλλά μόνο όσες χρησιμοποιούνται στο επιχείρημα.



Σχήμα 35: Η ιδέα της 2-προσέγγισης για το metric TSP.

Ας δικαιολογήσουμε τώρα την ορθότητα και το κόστος του αλγορίθμου.

1. Το βήμα (3) είναι πάντοτε δυνατό. Αν T είναι δέντρο, τότε για κάθε κορυφή v ο βαθμός της στο $2T$ είναι

$$d_{2T}(v) = 2d_T(v),$$

άρα είναι άρτιος. Επομένως όλες οι κορυφές του $2T$ έχουν άρτιο βαθμό, και επειδή το $2T$ είναι συνεκτικό, το $2T$ έχει κύκλο Euler. Άρα ο κύκλος W του βήματος (3) υπάρχει.

2. Το κόστος του κύκλου Euler είναι ακριβώς $2\,c(T)$**.** Κάθε ακμή του T εμφανίζεται ακριβώς δύο φορές στο $2T$, άρα

$$\mathrm{cost}(W) = 2 \ \mathrm{cost}(T).$$

3. Μετά τις συντομεύσεις παίρνουμε πράγματι κύκλο Hamilton. Θεωρούμε έναν κύκλο Euler W του πολυγραφήματος $2T$, ξεκινώντας από κάποια κορυφή v_0. Καθώς διατρέχουμε τον W, κάθε φορά που μια ακμή θα μας οδηγούσε σε κορυφή που έχει ήδη επισκεφθεί, δεν περνάμε από αυτήν, αλλά την παραλείπουμε και πηγαίνουμε απευθείας στην επόμενη κορυφή του W που δεν έχει ακόμη εμφανιστεί. Τέλος, όταν έχουν εμφανιστεί όλες οι κορυφές, επιστρέφουμε στην αρχική κορυφή v_0.

Με αυτόν τον τρόπο κάθε κορυφή εμφανίζεται ακριβώς μία φορά πριν από την τελική επιστροφή στο v_0: εμφανίζεται τουλάχιστον μία φορά, επειδή ο W είναι κύκλος Euler σε συνεκτικό γράφημα που περιέχει όλες τις κορυφές του T, και δεν εμφανίζεται δεύτερη φορά, επειδή κάθε επανάληψη παραλείπεται από τη διαδικασία των συντομεύσεων. Άρα η τελική κλειστή διαδρομή περνά από όλες τις κορυφές ακριβώς μία φορά, και επομένως είναι κύκλος Hamilton.

Επιπλέον, οι ακμές που χρησιμοποιούμε μετά από κάθε συντόμευση υπάρχουν πράγματι στο γράφημα, διότι εργαζόμαστε στο πλήρες γράφημα G.

4. Οι συντομεύσεις δεν αυξάνουν το κόστος. Ας υποθέσουμε ότι σε κάποιο στάδιο του W παραλείπουμε μια διαδοχή κορυφών

$$x = x_0, x_1, \ldots, x_r = y,$$

όπου οι ενδιάμεσες κορυφές $x_1, \ldots, x_{r-1}$ έχουν ήδη εμφανιστεί. Τότε αντικαθιστούμε το τμήμα αυτό της διαδρομής από την άμεση ακμή xy. Από την ανισότητα τριγώνου,

$$c(x, y) \leq c(x_0, x_1) + c(x_1, x_2) + \cdots + c(x_{r-1}, x_r).$$

Άρα κάθε τέτοια συντόμευση δεν αυξάνει το κόστος. Εφαρμόζοντας διαδοχικά αυτό το επιχείρημα σε όλες τις επαναλήψεις κορυφών, παίρνουμε

$$\text{cost}(H) \leq \text{cost}(W) = 2\ \text{cost}(T),$$

όπου H είναι ο τελικός Χαμιλτονιανός κύκλος.

5. Το κόστος του ελάχιστου παραγόμενου δέντρου δεν ξεπερνά το βέλτιστο κόστος TSP. Έστω C^* ένας βέλτιστος Χαμιλτονιανός κύκλος, οπότε

$$\text{cost}(C^*) = \text{OPT}\,.$$

Αν αφαιρέσουμε μία οποιαδήποτε ακμή του C^*, απομένει ένα παραγόμενο δέντρο T^*. Άρα, από την ελαχιστικότητα του T,

$$\text{cost}(T) \leq \text{cost}(T^*) \leq \text{cost}(C^*) = \text{OPT}\,.$$

Συνδυάζοντας τις προηγούμενες ανισότητες, παίρνουμε

$$\text{cost}(H) \leq 2\ \text{cost}(T) \leq 2\ \text{OPT}\,.$$

Επομένως ο αλγόριθμος είναι 2-προσεγγιστικός για το metric TSP. □

8 Χρωματικός Αριθμός και Διμερή Γραφήματα

Ορισμός 8.1 (k-χρωματίσιμο γράφημα, χρωματικός αριθμός). Ένα γράφημα G λέγεται k-*χρωματίσιμο*, αν μπορούμε να αντιστοιχίσουμε σε κάθε κορυφή του ένα από k χρώματα, έτσι ώστε οποιεσδήποτε δύο γειτονικές κορυφές να έχουν διαφορετικό χρώμα.

Ο *χρωματικός αριθμός* του G, που συμβολίζεται με $\chi(G)$, είναι ο μικρότερος ακέραιος k για τον οποίο το G είναι k-χρωματίσιμο.

Όταν χρωματίζουμε ένα γράφημα, είναι συχνά χρήσιμο να σκεφτόμαστε τις ακμές ως *συγκρούσεις*: δύο κορυφές που ενώνονται με ακμή δεν επιτρέπεται να πάρουν το ίδιο χρώμα. Αυτό μπορεί να μοντελοποιεί, για παράδειγμα, γειτονικές χώρες σε έναν χάρτη ή δραστηριότητες που γίνονται την ίδια χρονική στιγμή.

Παρατήρηση 8.2 (Τι σημαίνει 1-χρωματίσιμο;). Ένα γράφημα είναι 1-χρωματίσιμο αν και μόνο αν δεν έχει καμία ακμή.

Πράγματι, αν υπάρχει έστω μία ακμή, τότε τα δύο άκρα της είναι γειτονικές κορυφές, άρα δεν μπορούν να έχουν το ίδιο χρώμα. Επομένως ένα μόνο χρώμα δεν αρκεί.

Αντίστροφα, αν δεν υπάρχει καμία ακμή, τότε μπορούμε να βάψουμε όλες τις κορυφές με το ίδιο χρώμα.

Παρατήρηση 8.3 (Αύξηση του k). Αν ένα γράφημα είναι k-χρωματίσιμο, τότε είναι και $(k+1)$-χρωματίσιμο, και γενικότερα ℓ-χρωματίσιμο για κάθε $\ell \geq k$.

Με άλλα λόγια, όσο αυξάνεται ο αριθμός των διαθέσιμων χρωμάτων, τόσο ευκολότερο γίνεται το πρόβλημα του χρωματισμού.

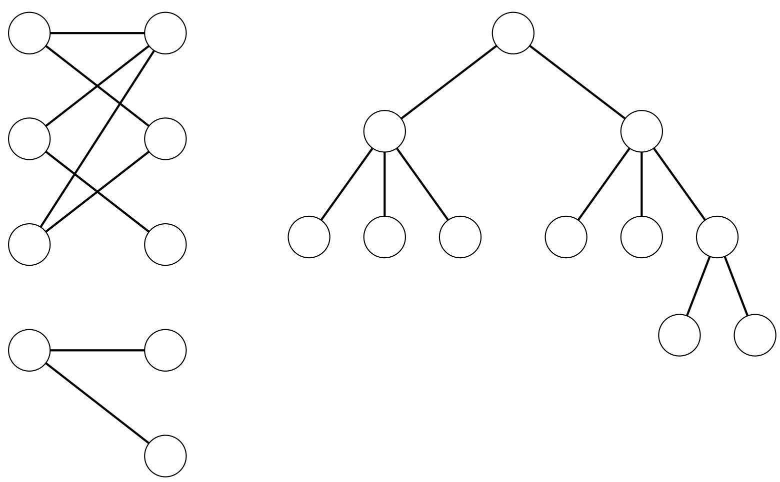
Ορισμός 8.4 (Διμερές γράφημα). Ένα γράφημα $G = (V, E)$ λέγεται *διμερές*, αν υπάρχει διάσπαση

$$V = X \sqcup Y$$

σε δύο ξένα σύνολα, έτσι ώστε κάθε ακμή του G να έχει το ένα άκρο της στο X και το άλλο στο Y. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε συχνά

$$G = (X, Y, E)$$

για να τονίσουμε τη διάσπαση των κορυφών.



Ένα διμερές γράφημα — Κάθε δέντρο είναι διμερές

Σχήμα 36: Παραδείγματα διμερών γραφημάτων.

Θεώρημα 8.5. *Κάθε δέντρο είναι διμερές γράφημα.*

Απόδειξη. Θα κάνουμε επαγωγή ως προς το πλήθος των κορυφών του δέντρου.

Αν $|V(T)| = 1$, τότε το T αποτελείται από μία μόνο κορυφή και καμία ακμή. Άρα είναι διμερές: αρκεί να πάρουμε

$$A = V(T), \qquad B = \varnothing.$$

Έστω τώρα ότι η πρόταση ισχύει για όλα τα δέντρα με το πολύ $n-1$ κορυφές, και θεωρούμε ένα δέντρο T με n κορυφές.

Γνωρίζουμε ότι κάθε δέντρο με τουλάχιστον δύο κορυφές έχει ένα φύλλο, δηλαδή μια κορυφή βαθμού 1. Έστω u ένα φύλλο του T, και v ο μοναδικός γείτονάς του. Αφαιρούμε την κορυφή u και την ακμή uv, και θεωρούμε το γράφημα

$$T' = T - u.$$

Το T' είναι και πάλι δέντρο με $n-1$ κορυφές. Πράγματι, παραμένει συνεκτικό και δεν αποκτά κύκλους.

Από την επαγωγική υπόθεση, το T' είναι διμερές. Άρα υπάρχει διάσπαση

$$V(T') = A' \sqcup B'$$

τέτοια ώστε κάθε ακμή του T' να έχει το ένα άκρο της στο A' και το άλλο στο B'.

Η κορυφή v ανήκει σε ένα από τα δύο σύνολα, έστω χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι

$$v \in A'.$$

Θέτουμε τώρα

$$A = A', \qquad B = B' \cup \{u\}.$$

Τότε

$$V(T) = A \sqcup B.$$

Μένει να ελέγξουμε ότι κάθε ακμή του T ενώνει μία κορυφή του A με μία κορυφή του B. Αυτό ισχύει ήδη για όλες τις ακμές του T', αφού το T' είναι διμερές. Η μόνη νέα ακμή είναι η uv, και πράγματι έχει το ένα άκρο της στο $u \in B$ και το άλλο στο $v \in A$.

Άρα το T είναι διμερές.

Επομένως, από την αρχή της επαγωγής, κάθε δέντρο είναι διμερές γράφημα. □

Θεώρημα 8.6 (Χαρακτηρισμός των 2-χρωματίσιμων γραφημάτων). *Για κάθε πεπερασμένο γράφημα G, χωρίς βρόχους, οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

1. *Το G είναι 2-χρωματίσιμο.*
2. *Το G είναι διμερές.*
3. *Το G δεν περιέχει περιττό κύκλο.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι (1) ⇔ (2) και (1) ⇔ (3).

(1) ⇒ (2). Αν το G είναι 2-χρωματίσιμο, ας χρωματίσουμε τις κορυφές του με δύο χρώματα, π.χ. μπλε και κόκκινο. Θέτουμε

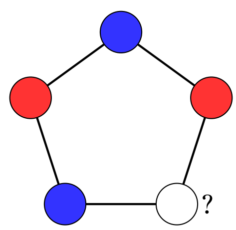
$$X = \{\text{οι μπλε κορυφές}\}, \qquad Y = \{\text{οι κόκκινες κορυφές}\}.$$

Επειδή γειτονικές κορυφές έχουν διαφορετικό χρώμα, κάθε ακμή έχει το ένα άκρο της στο X και το άλλο στο Y. Άρα το G είναι διμερές.

(2) ⇒ (1). Αν το G είναι διμερές με διάσπαση $V = X \sqcup Y$, χρωματίζουμε όλες τις κορυφές του X με μπλε και όλες τις κορυφές του Y με κόκκινο. Τότε κάθε ακμή ενώνει μια μπλε με μια κόκκινη κορυφή, άρα αυτός είναι ένας νόμιμος 2-χρωματισμός. Επομένως το G είναι 2-χρωματίσιμο.

(1) ⇒ (3). Θα δείξουμε την αντιθετοαντίστροφη πρόταση. Αν το G περιέχει περιττό κύκλο, τότε το G δεν είναι 2-χρωματίσιμο.

Πράγματι, έστω ότι υπάρχει κύκλος περιττού μήκους. Αν αρχίσουμε να χρωματίζουμε διαδοχικά τις κορυφές του με εναλλασσόμενα χρώματα, τότε στην τελευταία κορυφή του κύκλου καταλήγουμε σε αδυναμία: όποιο από τα δύο χρώματα κι αν βάλουμε, θα παραβιαστεί ο κανόνας ότι γειτονικές κορυφές πρέπει να έχουν διαφορετικά χρώματα.



Άρα ένα 2-χρωματίσιμο γράφημα δεν μπορεί να περιέχει περιττό κύκλο.

(3) $\Rightarrow$ (1). Θα αποδείξουμε ότι, αν το G δεν περιέχει περιττό κύκλο, τότε είναι 2-χρωματίσιμο.

Αρκεί να 2-χρωματίσουμε κάθε συνεκτική συνιστώσα χωριστά. Έστω λοιπόν C μια συνεκτική συνιστώσα του G, και ας επιλέξουμε μια κορυφή $r \in V(C)$. Για κάθε $k \geq 0$, θέτουμε

$$L_k = \{v \in V(C) : d(r,v) = k\},$$

όπου $d(r,v)$ είναι η απόσταση της κορυφής v από τη ρίζα r. Έτσι, οι κορυφές του C χωρίζονται σε επίπεδα

$$L_0, L_1, L_2, \ldots$$

Θα χρωματίσουμε τις κορυφές των επιπέδων άρτιας απόστασης με μπλε και των επιπέδων περιττής απόστασης με κόκκινο. Για να δούμε ότι αυτός ο χρωματισμός είναι νόμιμος, αρκεί να δείξουμε ότι δεν υπάρχει ακμή με τα δύο άκρα της στο ίδιο επίπεδο.

Πρώτα παρατηρούμε ότι, αν $u \in L_i$ και $v \in L_j$ είναι γειτονικές κορυφές, τότε

$$|i - j| \leq 1.$$

Πράγματι, από μια συντομότερη διαδρομή από το r στο u, ακολουθούμε την ακμή uv και παίρνουμε μια διαδρομή από το r στο v μήκους $i+1$, άρα $j \leq i+1$. Αντιστρόφως, $i \leq j+1$. Επομένως $|i-j| \leq 1$.

Άρα μια ακμή είτε ενώνει διαδοχικά επίπεδα είτε ενώνει δύο κορυφές του ίδιου επιπέδου. Θα αποκλείσουμε τη δεύτερη περίπτωση.

Έστω προς άτοπο ότι υπάρχει ακμή uv με

$$u, v \in L_k$$

για κάποιο k. Θεωρούμε δύο συντομότερα μονοπάτια από το r προς το u και προς το v, και έστω z η τελευταία κοινή κορυφή αυτών των δύο μονοπατιών. Αν $d(r,z) = s$, τότε από το z μέχρι το u και από το z μέχρι το v έχουμε δύο εσωτερικά ξένα μονοπάτια μήκους $k - s$, ενώ μαζί με την ακμή uv σχηματίζεται κύκλος μήκους

$$(k-s) + (k-s) + 1 = 2(k-s) + 1,$$

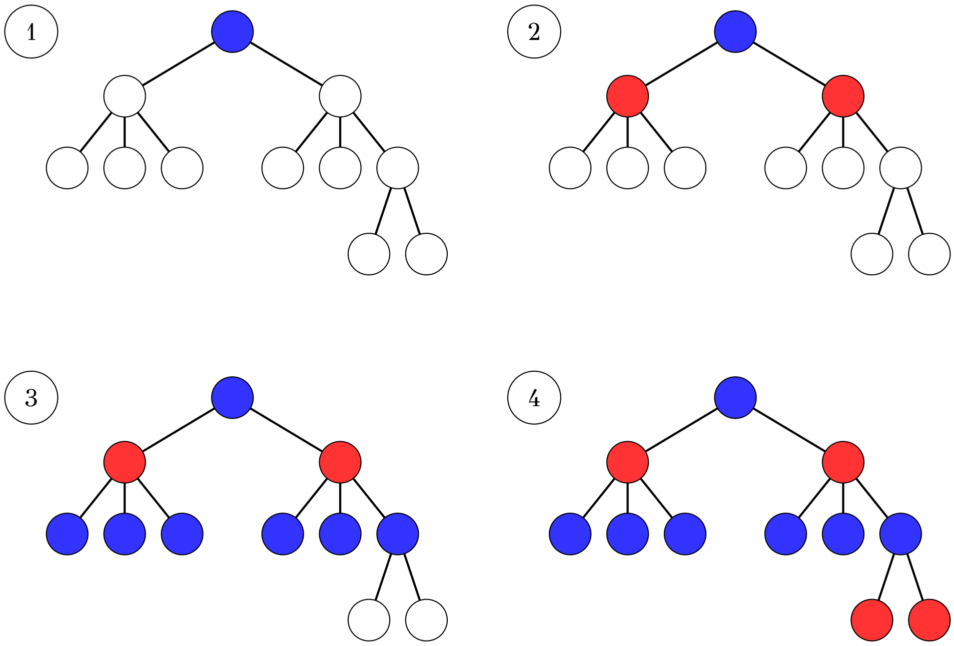
δηλαδή περιττού μήκους. Αυτό όμως είναι αδύνατο από την υπόθεση.

Άρα δεν υπάρχει ακμή ανάμεσα σε δύο κορυφές του ίδιου επιπέδου. Συνεπώς κάθε ακμή ενώνει μία κορυφή από άρτιο επίπεδο με μία κορυφή από περιττό επίπεδο. Ο χρωματισμός κατά παρατικότητα της απόστασης είναι λοιπόν έγκυρος 2-χρωματισμός της συνιστώσας C.

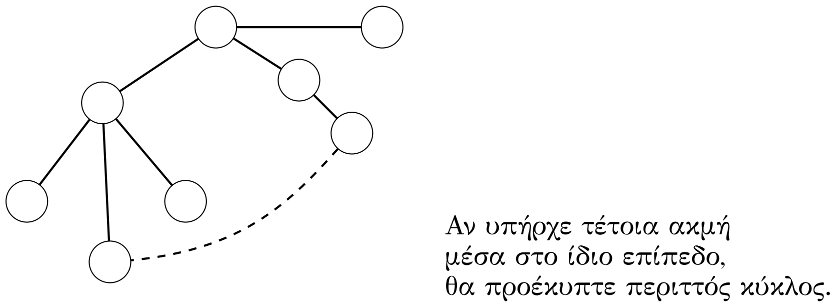
Χρωματίζοντας με τον ίδιο τρόπο κάθε συνεκτική συνιστώσα, παίρνουμε 2-χρωματισμό όλου του γραφήματος G. Άρα το G είναι 2-χρωματίσιμο. □

Χρωματισμός κατά πλάτος.

1. Σε κάθε συνεκτική συνιστώσα επιλέγουμε μία κορυφή r.
2. Χωρίζουμε τις κορυφές σε επίπεδα $L_k = \{v : d(r,v) = k\}$.
3. Χρωματίζουμε με μπλε όλες τις κορυφές των επιπέδων $L_0, L_2, L_4, \ldots$.
4. Χρωματίζουμε με κόκκινο όλες τις κορυφές των επιπέδων $L_1, L_3, L_5, \ldots$.



Σχήμα 37: Χρωματισμός ενός δέντρου κατά επίπεδα.



Σχήμα 38: Η απαγορευμένη περίπτωση: ακμή μέσα στο ίδιο επίπεδο.

Θεώρημα 8.7 (Άνω φράγμα για τον χρωματικό αριθμό). *Αν G είναι γράφημα με μέγιστο βαθμό Δ, τότε το G είναι $(\Delta+1)$-χρωματίσιμο.*

Απόδειξη. Θα κάνουμε επαγωγή ως προς το πλήθος των κορυφών του γραφήματος.

Αν $|V(G)| = 1$, τότε το G έχει μία μόνο κορυφή, άρα είναι 1-χρωματίσιμο. Επομένως είναι και $(\Delta+1)$-χρωματίσιμο.

Έστω τώρα $|V(G)| = n \geq 2$, και υποθέτουμε ότι κάθε γράφημα με $n-1$ κορυφές και μέγιστο βαθμό το πολύ Δ είναι $(\Delta+1)$-χρωματίσιμο.

Θεωρούμε ένα γράφημα G με n κορυφές και μέγιστο βαθμό το πολύ Δ, και αφαιρούμε μία αυθαίρετη κορυφή v. Έστω

$$G' = G - v$$

το γράφημα που προκύπτει.

Το G' έχει $n-1$ κορυφές, και ο μέγιστος βαθμός του είναι επίσης το πολύ Δ, αφού με την αφαίρεση μιας κορυφής οι βαθμοί δεν αυξάνονται. Άρα, από την επαγωγική υπόθεση, το G' είναι $(\Delta+1)$-χρωματίσιμο.

Τώρα ξαναβάζουμε την κορυφή v. Η κορυφή v έχει το πολύ Δ γείτονες στο G, άρα το πολύ Δ χρώματα μπορεί να εμφανίζονται στους γείτονές της. Εφόσον διαθέτουμε συνολικά $\Delta+1$ χρώματα, υπάρχει τουλάχιστον ένα χρώμα που δεν χρησιμοποιείται από κανέναν γείτονα του v. Δίνουμε αυτό το χρώμα στην κορυφή v.

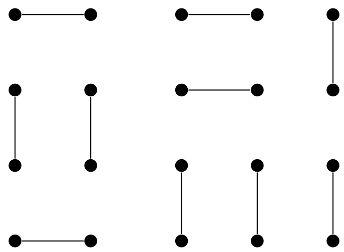
Έτσι ο χρωματισμός του G' επεκτείνεται σε νόμιμο $(\Delta + 1)$-χρωματισμό όλου του G.

Άρα, από την αρχή της επαγωγής, κάθε γράφημα με μέγιστο βαθμό Δ είναι $(\Delta+1)$-χρωματίσιμο. □

8.1 Το Θεώρημα του Γάμου

Έστω απλό γράφημα $G = (V, E)$.

Ορισμός 8.8. Ένα υποσύνολο F του συνόλου των ακμών του G λέγεται *ταίριασμα* (ή *ζεύγωμα*) αν κάθε κορυφή του G είναι άκρο το πολύ μίας ακμής που ανήκει στο F. Το F λέγεται *τέλειο ταίριασμα* (ή *τέλειο ζεύγωμα*) αν κάθε κορυφή του G είναι άκρο ακριβώς μίας ακμής που ανήκει στο F.

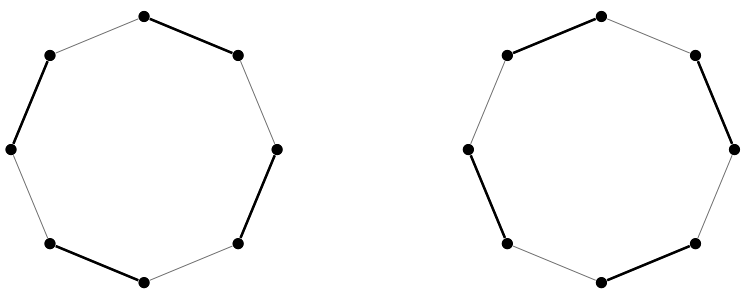


Σχήμα 39: Ένα τέλειο ταίριασμα του γραφήματος.

Παράδειγμα 8.9.

1. Ένα τέλειο ταίριασμα του 5×4 γραφήματος Μανχάταν απεικονίζεται στο Σχήμα 39.

2. Κάθε κύκλος άρτιου μήκους έχει ακριβώς δύο τέλεια ταιριάσματα (ο κύκλος μήκους 8 και τα τέλεια ταιριάσματά του απεικονίζονται στο Σχήμα 40). Κάθε κύκλος μήκους $2n+1$ έχει ακριβώς $2n + 1$ ταιριάσματα με n στοιχεία και κανένα τέλειο ταίριασμα.



Σχήμα 40: Τα τέλεια ταιριάσματα του κύκλου μήκους 8.

Πότε έχει ένα γράφημα τέλειο ταίριασμα; Θα απαντήσουμε το ερώτημα αυτό για διμερή γραφήματα. Έστω ότι το απλό γράφημα $G = (V, E)$ είναι διμερές, με αντίστοιχη διαμέριση $\{A, B\}$ του συνόλου V. Ας εξετάσουμε πρώτα το εξής ερώτημα: Πότε έχει το G ταίριασμα F, τέτοιο ώστε κάθε στοιχείο του A να είναι άκρο ακμής που ανήκει στο F;

Μια προφανής αναγκαία συνθήκη είναι ότι για κάθε υποσύνολο S του A, έστω με r στοιχεία, θα πρέπει να υπάρχουν τουλάχιστον r κορυφές του B η καθεμία από τις οποίες να συνδέεται με ακμή του G με μία τουλάχιστον κορυφή του S. Πράγματι, αν υπάρχει τέτοιο ταίριασμα F, τότε οι κορυφές του S είναι άκρα r διαφορετικών ακμών του F, οι οποίες καταλήγουν σε r διαφορετικές κορυφές του B. Άρα $\#N(S) \geq r = \#S$. όπου με $N(S)$ συμβολίζουμε το σύνολο των κορυφών του G οι οποίες συνδέονται με ακμή στο G με μία τουλάχιστον κορυφή του S, δηλαδή τους όλους τους άμεσους γείτονες του συνόλου S. Έπεται ότι

$$\#N(S) \geq \#S$$

για κάθε $S \subseteq A$. Η αναγκαία αυτή συνθήκη είναι και ικανή, όπως δηλώνει το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 8.10 (Θεώρημα του Hall). *Έστω G απλό διμερές γράφημα με διαμέριση $\{A, B\}$ του συνόλου των κορυφών, τέτοια ώστε κάθε ακμή του G συνδέει ένα στοιχείο του A με ένα στοιχείο του B. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Υπάρχει ταίριασμα F του G, τέτοιο ώστε κάθε στοιχείο του A είναι άκρο ακμής που ανήκει στο F.*
2. *Ισχύει*
$$\#N(S) \geq \#S$$
για κάθε $S \subseteq A$.

Απόδειξη. Έχουμε ήδη αναφερθεί στη συνεπαγωγή $(i) \Rightarrow (ii)$. Θα δείξουμε ότι $(ii) \Rightarrow (i)$ χρησιμοποιώντας επαγωγή στο πλήθος των στοιχείων του A. Το ζητούμενο είναι φανερό αν το A έχει ένα μόνο στοιχείο. Υποθέτουμε ότι $\#A \geq 2$ και διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

(α) Έστω ότι ισχύει

$$\#N(S) \geq \#S + 1$$

για κάθε μη κενό, γνήσιο υποσύνολο S του A. Επιλέγουμε οποιαδήποτε ακμή $\{a, b\}$ του G, όπου $a \in A$ και $b \in B$, και συμβολίζουμε με H το επαγόμενο υπογράφημα του G στο σύνολο κορυφών $V - \{a, b\}$. Προφανώς το H είναι απλό διμερές γράφημα, με αντίστοιχη διαμέριση του $V - \{a, b\}$ στα σύνολα $A \setminus \{a\}$ και $B \setminus \{b\}$. Από την υπόθεσή μας, γνωρίζουμε ότι για κάθε υποσύνολο S του $A \setminus \{a\}$, με r στοιχεία, ισχύει

$$\#N_H(S) \geq r,$$

διότι στο γράφημα G είχαμε $\#N_G(S) \geq r + 1$, και αφαιρώντας το πολύ την κορυφή b ο αριθμός των γειτόνων ελαττώνεται το πολύ κατά 1. Κατά συνέπεια, η συνθήκη (ii) του θεωρήματος ισχύει για το H και το $A \setminus \{a\}$. Από την υπόθεση της επαγωγής συμπεραίνουμε ότι υπάρχει ταίριασμα F_0 του H για το οποίο κάθε στοιχείο του $A \setminus \{a\}$ είναι άκρο ακμής που ανήκει στο F_0. Και τότε το

$$F_0 \cup \{\{a, b\}\}$$

είναι ταίριασμα του G με την επιθυμητή ιδιότητα.

(β) Έστω ότι υπάρχει γνήσιο υποσύνολο S του A, τέτοιο ώστε

$$\#N(S) = \#S.$$

Θέτουμε

$$A_1 = S, \qquad B_1 = N(S), \qquad A_2 = A \setminus S, \qquad B_2 = B \setminus N(S),$$

και συμβολίζουμε με H_i το επαγόμενο υπογράφημα του G στο σύνολο κορυφών $A_i \cup B_i$, για $i = 1, 2$.

Προφανώς το H_1 είναι διμερές γράφημα, με αντίστοιχη διαμέριση του συνόλου των κορυφών $\{A_1, B_1\}$. Είναι επίσης φανερό ότι η συνθήκη (ii) του θεωρήματος ισχύει για το H_1 και το A_1. Θα δείξουμε ότι ισχύει επίσης για το H_2 και το A_2.

Έστω ένα οποιοδήποτε υποσύνολο $T \subseteq A_2 = A \setminus S$. Υπολογίζουμε

$$\#N_G(S \cup T) \geq \#(S \cup T) = \#S + \#T.$$

Επειδή κάθε γείτονας των στοιχείων του S ανήκει στο $N(S) = B_1$, από την παραπάνω σχέση και την υπόθεση $\#N(S) = \#S$ προκύπτει ότι υπάρχουν τουλάχιστον $\#T$ στοιχεία του B_2, καθένα από τα οποία συνδέεται με ακμή με μία τουλάχιστον κορυφή του συνόλου T. Άρα

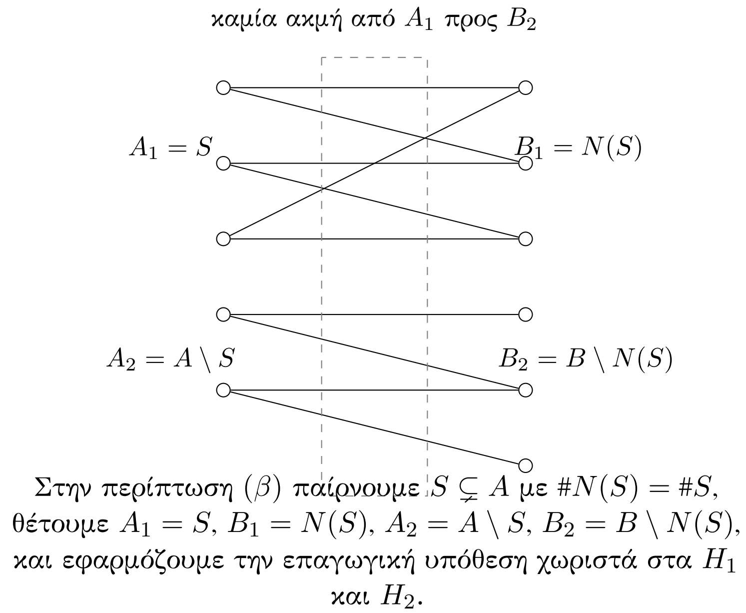
$$\#N_{H_2}(T) \geq \#T.$$

Επομένως η συνθήκη (ii) ισχύει και για το H_2 και τα A_2.

Από την υπόθεση της επαγωγής συμπεραίνουμε ότι για $i = 1, 2$ υπάρχει ταίριασμα F_i του H_i για το οποίο κάθε στοιχείο του A_i είναι άκρο ακμής που ανήκει στο F_i. Αφού τα σύνολα κορυφών των H_1 και H_2 είναι ξένα, το σύνολο

$$F = F_1 \cup F_2$$

είναι ταίριασμα του G και κάθε στοιχείο του A είναι άκρο ακμής που ανήκει στο F. Το γεγονός αυτό ολοκληρώνει την επαγωγή και την απόδειξη του θεωρήματος.



Σχήμα 41: Σχηματική απεικόνιση της περίπτωσης (β) στην απόδειξη του Θεωρήματος του Hall.

$\square$

Πόρισμα 8.11 (Θεώρημα του Γάμου). *Έστω G απλό διμερές γράφημα με διαμέριση $\{A, B\}$ του συνόλου των κορυφών, τέτοια ώστε κάθε ακμή του G συνδέει ένα στοιχείο του A με ένα στοιχείο του B. Τότε υπάρχει τέλειο ταίριασμα του G, αν και μόνον αν*

$$\#A = \#B$$

και ισχύει

$$\#N(S) \geq \#S$$

για κάθε $S \subseteq A$.

Εφαρμογές του Θεωρήματος του Hall

Πρόταση 8.12 (Ταιριάσματα σε κανονικά γραφήματα). *Κάθε d-κανονικό διμερές γράφημα έχει τέλειο ταίριασμα και από αριστερά προς τα δεξιά και από δεξιά προς τα αριστερά.*

Υπενθύμιση. Ένα γράφημα λέγεται d-κανονικό αν κάθε κορυφή του έχει ακριβώς βαθμό d.

Απόδειξη. Το Θεώρημα του Hall μας επιτρέπει να ελέγξουμε απλώς τη συνθήκη του Hall. Έστω S ένα οποιοδήποτε υποσύνολο της αριστερής πλευράς. Προφανώς ισχύει ότι

$$\#\{\text{ακμές που εξέρχονται από το } S\} \leq \#\{\text{ακμές που εισέρχονται στο } N(S)\}.$$

Όμως, επειδή το γράφημα είναι d-κανονικό, παίρνουμε

$$d|S| = \#\{\text{ακμές που εξέρχονται από το } S\} \leq \#\{\text{ακμές που εισέρχονται στο } N(S)\} = d|N(S)|.$$

Άρα

$$|S| \leq |N(S)|.$$

Επομένως, η συνθήκη του Hall ισχύει και έτσι το γράφημα έχει τέλειο ταίριασμα από αριστερά προς τα δεξιά.

Αυτή η απόδειξη έχει και μια ωραία διαισθητική ερμηνεία. Μπορούμε να σκεφτούμε ότι κάθε κορυφή του S πετάει ακριβώς d μπάλες προς τις κορυφές της δεξιάς πλευράς. Αν κάθε κορυφή μπορεί να πιάσει μόνο d μπάλες, τότε χρειάζονται τουλάχιστον τόσες κορυφές στη δεξιά πλευρά όσες και στην αριστερή. Άρα και πάλι

$$|S| \leq |N(S)|.$$

Παρατηρούμε τώρα ότι δεν υπάρχει τίποτε το ιδιαίτερο στην αριστερή ή στη δεξιά πλευρά. Μπορούμε να ανταλλάξουμε τους ρόλους τους και να επαναλάβουμε το ίδιο επιχείρημα. Επομένως υπάρχει και τέλειο ταίριασμα από δεξιά προς τα αριστερά. Αυτό, μάλιστα, συνεπάγεται ότι

$$|\text{Αριστερά}| = |\text{Δεξιά}|,$$

αφού κάθε κορυφή και στις δύο πλευρές συμμετέχει σε ακριβώς μία ακμή του ταιριάσματος. □

Πόρισμα 8.13 (Διάσπαση κανονικών διμερών γραφημάτων). *Κάθε d-κανονικό διμερές γράφημα μπορεί να διασπαστεί σε d τέλεια ταιριάσματα.*

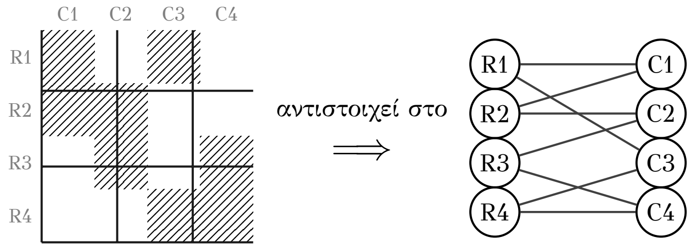
Απόδειξη. Με την προηγούμενη πρόταση βρίσκουμε πρώτα ένα τέλειο ταίριασμα. Το αφαιρούμε. Το γράφημα που απομένει είναι $(d-1)$-κανονικό και διμερές. Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία, παίρνουμε τελικά d τέλεια ταιριάσματα. □

Το Θεώρημα του Hall καταλήγει να είναι ένα από τα πιο χρήσιμα θεωρήματα της θεωρίας γραφημάτων. Εμφανίζεται συχνά με απροσδόκητους τρόπους σε άλλα προβλήματα και σε άλλα πεδία των μαθηματικών. Δίνουμε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 8.14. Σε ένα πλέγμα $n \times n$ είναι σκιασμένα μερικά τετράγωνα, έτσι ώστε κάθε γραμμή και κάθε στήλη να έχει ακριβώς $k \leq n$ σκιασμένα τετράγωνα. Να αποδειχθεί ότι είναι δυνατό να επιλεγούν n σκιασμένα τετράγωνα έτσι ώστε κανένα δύο να μην βρίσκονται στην ίδια γραμμή ή στην ίδια στήλη.

Εκ πρώτης όψεως δεν είναι προφανές πώς εφαρμόζεται η θεωρία γραφημάτων σε αυτό το ερώτημα. Παρ' όλα αυτά, το Θεώρημα του Hall ακριβώς αυτό κάνει. Η βασική ιδέα της κατασκευής είναι η εξής:

> Έχουμε δύο σύνολα, τις γραμμές και τις στήλες, και θέλουμε κατά κάποιον τρόπο να τα "ζευγαρώσουμε" (δηλαδή να επιλέξουμε κελιά, κάτι που ισοδυναμεί με την επιλογή ενός ζεύγους γραμμής–στήλης).



Σχήμα 42: Από ένα σκιασμένο πλέγμα σε ένα διμερές γράφημα.

Αυτό μοιάζει ήδη πολύ με το Θεώρημα του Hall.

Θα αναπαραστήσουμε το πλέγμα με ένα διμερές γράφημα. Η αριστερή πλευρά θα είναι οι γραμμές και η δεξιά πλευρά οι στήλες. Θα βάζουμε μια ακμή ανάμεσα σε μια γραμμή r και μια στήλη c αν και μόνον αν το κελί (r, c) είναι σκιασμένο.

Ένα παράδειγμα αυτής της κατασκευής φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.

Εφόσον υπάρχουν ακριβώς k σκιασμένα τετράγωνα σε κάθε γραμμή και σε κάθε στήλη, το γράφημα που προκύπτει είναι k-κανονικό, και άρα έχει τέλειο ταίριασμα.

Αν επιλέξουμε τα ζεύγη γραμμής–στήλης που ανήκουν σε αυτό το ταίριασμα, τότε επιλέγουμε ένα σκιασμένο τετράγωνο σε κάθε γραμμή και σε κάθε στήλη, δηλαδή ακριβώς αυτό που θέλαμε.

Εφαρμογή: Μαγικά τετράγωνα. Κλείνουμε την παράγραφο αυτή με μια από τις πολλές ενδιαφέρουσες εφαρμογές του Θεωρήματος του Γάμου. Ονομάζουμε *μαγικό τετράγωνο*, ή *μαγικό όρισμα*, έναν τετραγωνικό πίνακα με στοιχεία μη αρνητικούς ακεραίους, κάθε γραμμή και κάθε στήλη του οποίου έχει άθροισμα ίσο με k. Για παράδειγμα, ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

είναι ένα 3×3 μαγικό τετράγωνο με μαγικό άθροισμα $k = 4$.

Τα $n \times n$ μαγικά τετράγωνα με μαγικό άθροισμα $k = 1$ είναι ακριβώς οι $n \times n$ πίνακες–μεταθέσεων, δηλαδή οι $n \times n$ πίνακες κάθε γραμμή και κάθε στήλη των οποίων έχει ένα στοιχείο ίσο με 1 και τα υπόλοιπα ίσα με 0.

Παρατηρούμε ότι το άθροισμα δύο μαγικών τετραγώνων της ίδιας διάστασης είναι μαγικό όρισμα, αντιστοίχως, είναι επίσης μαγικό όρισμα με μαγικό άθροισμα $s+t$. Συνεπώς, το άθροισμα οποιωνδήποτε, έστω k το πλήθος, $n \times n$ πινάκων–μεταθέσεων είναι μαγικό όρισμα με μαγικό άθροισμα ίσο με k. Είναι κάθε μαγικό τετράγωνο ίσο με το άθροισμα πινάκων–μεταθέσεων; Για παράδειγμα, το τετράγωνο (3.2) γράφεται ως άθροισμα τεσσάρων πινάκων–μεταθέσεων ως εξής:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Η ακόλουθη πρόταση δίνει καταφατική απάντηση στο ερώτημά μας.

Πρόταση 8.15. *Κάθε μαγικό τετράγωνο μπορεί να γραφεί ως άθροισμα πινάκων–μεταθέσεων.*

Απόδειξη. Έστω A ένα $n \times n$ μαγικό τετράγωνο με άθροισμα k. Ισχυριζόμαστε ότι αν $k \geq 1$, τότε ο πίνακας A είναι ίσος με το άθροισμα ενός $n \times n$ πίνακα–μετάθεσης και ενός μαγικού τετραγώνου με άθροισμα $k - 1$. Το ζητούμενο προκύπτει από τον ισχυρισμό αυτό με επαγωγή στο k.

Συμβολίζουμε με a_{ij} το στοιχείο του A στη γραμμή i και στη στήλη j. Θέτουμε

$$V = [n]' \cup [n]'',$$

και σχηματίζουμε το διμερές γράφημα G_A με σύνολο κορυφών V και ακμές τα σύνολα $\{i', j''\}$ για τα οποία $a_{ij} \geq 1$.

Θα δείξουμε ότι για το G_A και το σύνολο $[n]'$ ισχύει η συνθήκη (ii) του Θεωρήματος Hall. Έστω $S \subseteq [n]'$ με $\#S = r$. Το άθροισμα των στοιχείων των γραμμών του A με δείκτες στο S είναι ίσο με rk. Αφού κάθε στήλη του A έχει άθροισμα ίσο με k, τουλάχιστον r στήλες του A έχουν μη μηδενικό στοιχείο σε κάποια από τις γραμμές με δείκτη στο S. Αυτό σημαίνει ότι ισχύει

$$\#N(S) \geq r$$

στο G_A. Από το Θεώρημα του Γάμου συμπεραίνουμε ότι το G_A έχει τέλειο ταίριασμα.

Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει αναδιάταξη $(\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n))$ του $[n]$ για την οποία ισχύει

$$a_{i,\sigma(i)} \geq 1 \qquad \text{για } 1 \leq i \leq n.$$

Επομένως μπορούμε να γράψουμε

$$A = P + B,$$

όπου P είναι ο $n \times n$ πίνακας–μετάθεσης με μη μηδενικά στοιχεία στις θέσεις $(i, \sigma(i))$, για $1 \leq i \leq n$, και B είναι ο $n \times n$ πίνακας με μη αρνητικά ακέραια στοιχεία. Είναι φανερό ότι ο

$$B = A - P$$

είναι μαγικό τετράγωνο με μαγικό άθροισμα $k - 1$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του ισχυρισμού μας, άρα και της πρότασης. $\square$

9 Βασικές έννοιες από την Πιθανότητα

Στη θεωρία πιθανοτήτων συχνά μας ενδιαφέρει το σύνολο όλων των δυνατών εκβάσεων ενός πειράματος. Το σύνολο αυτό το συμβολίζουμε με Ω και το ονομάζουμε *δειγματικό χώρο*.

Παράδειγμα 9.1. Αν ρίξουμε ένα νόμισμα, τότε μπορούμε να πάρουμε

$$\Omega = \{H, T\},$$

όπου H δηλώνει το ενδεχόμενο "Heads" και T το ενδεχόμενο "Tails". Αν ρίξουμε ένα ζάρι, τότε μπορούμε να πάρουμε

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Ένα *ενδεχόμενο* είναι οποιοδήποτε υποσύνολο του δειγματικού χώρου.

Παράδειγμα 9.2. Αν ρίξουμε ένα ζάρι, τότε το ενδεχόμενο να φέρουμε πρώτο αριθμό είναι το υποσύνολο

$$\{2, 3, 5\}$$

του δειγματικού χώρου

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Σκεφτόμαστε μια τυχαία μεταβλητή ως κάτι που αντιστοιχίζει τιμές σε τυχαία ενδεχόμενα. Ο τυπικός ορισμός μιας τυχαίας μεταβλητής είναι ότι είναι μια συνάρτηση

$$f : \Omega \to \mathbb{R}.$$

Συνήθως χρησιμοποιούμε κεφαλαία γράμματα για να δηλώνουμε τυχαίες μεταβλητές. (Μπορεί κανείς να ορίσει τυχαία μεταβλητή σε πολύ γενικότερο πλαίσιο, αλλά για τις παρούσες σημειώσεις θα αρκεστούμε στον παραπάνω ορισμό.)

Παράδειγμα 9.3. Αν ρίξουμε δύο φορές ένα νόμισμα, τότε μπορούμε να πάρουμε

$$\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$$

ως δειγματικό χώρο. Ο αριθμός των "Heads" που εμφανίζονται είναι μια τυχαία μεταβλητή X, η οποία παίρνει την τιμή 2 αν συμβεί το HH, την τιμή 1 αν συμβεί το HT ή το TH, και την τιμή 0 αν συμβεί το TT.

Όταν το σύνολο τιμών της X είναι αριθμήσιμο (δηλαδή πεπερασμένο ή σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία με τους φυσικούς αριθμούς), τότε λέμε ότι η X είναι *διακριτή τυχαία μεταβλητή*.

Δοσμένης μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής X που παίρνει τιμές στο πεπερασμένο σύνολο

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\},$$

ορίζουμε την *αναμενόμενη τιμή* της με

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=1}^{n} x_k \, P(X = x_k).$$

Αυτό αντιστοιχεί στη διαισθητική έννοια της μέσης τιμής που μπορεί να πάρει η X.

Παράδειγμα 9.4. Αν ρίξουμε δύο φορές ένα νόμισμα, τότε ο αναμενόμενος αριθμός των "Heads" είναι

$$\mathbb{E}X = 0\,P(X=0) + 1\,P(X=1) + 2\,P(X=2) = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{2}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1.$$

Υπάρχει τρόπος να επεκταθεί η έννοια της αναμενόμενης τιμής σε τυχαίες μεταβλητές που παίρνουν άπειρες πολλές τιμές (είτε διακριτές είτε συνεχείς), αλλά εδώ δεν θα το κάνουμε.

Αποδείξεις ύπαρξης μέσω της αναμενόμενης τιμής

Είναι κοινή λογική ότι ο μέσος όρος ενός συνόλου αριθμών δεν είναι ποτέ μεγαλύτερος από τον μέγιστο από αυτούς τους αριθμούς. Αυτό ισχύει και για σταθμισμένους μέσους όρους, όπως δείχνει το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 9.5. *Έστω $X : \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή, τέτοια ώστε το σύνολο*

$$S = \{X(u)\}_{u \in \Omega}$$

να είναι πεπερασμένο, και έστω j το μεγαλύτερο στοιχείο του S. Τότε

$$j \geq \mathbb{E}(X).$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της $\mathbb{E}(X)$, έχουμε

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i \in S} i \cdot P(X = i) \leq j \sum_{i \in S} P(X = i) = j.$$

□

Παρουσιάζουμε δύο εφαρμογές αυτής της ιδέας. Η πρώτη δείχνει ότι ένα απλό γράφημα περιέχει πάντοτε ένα μεγάλο διμερές υπογράφημα.

Θεώρημα 9.6. *Έστω G απλό γράφημα με σύνολο κορυφών $[n]$, και έστω ότι το G έχει m ακμές. Τότε το G περιέχει ένα διμερές υπογράφημα με περισσότερες από $m/2$ ακμές.*

Απόδειξη. Ας χωρίσουμε τις κορυφές του G σε δύο ξένα μη κενά υποσύνολα A και B. Τότε τα A και B παράγουν ένα διμερές υπογράφημα H του G (αφαιρούμε τις ακμές μέσα στο A και μέσα στο B). Έστω Ω το σύνολο των $2^{n-1}-1$ διαφορετικών διμερών υπογραφημάτων που προκύπτουν με αυτόν τον τρόπο. Θέτουμε $X(H)$ να είναι ο αριθμός των ακμών του H.

Από την άλλη, ας αριθμήσουμε τις ακμές του G από 1 έως m, και για κάθε i θέτουμε

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{αν η ακμή } i \text{ έχει το ένα άκρο της στο } A \text{ και το άλλο στο } B, \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Τότε

$$X = X_1 + \cdots + X_m.$$

Ποια είναι η τιμή της $P(X_i = 1)$; Από τον ορισμό μας, μπορούμε να πάρουμε μια διάσπαση του $[n]$ που να οδηγεί στην $X_i = 1$ ως εξής: βάζουμε πρώτα τα δύο άκρα της ακμής i σε διαφορετικά υποσύνολα, και κατόπιν χωρίζουμε το υπόλοιπο σύνολο κορυφών των $n-2$ στοιχείων με οποιονδήποτε από 2^{n-2} τρόπους. Επομένως

$$P(X_i = 1) = \frac{2^{n-2}}{2^{n-1}-1}, \qquad P(X_i = 0) = \frac{2^{n-2}-1}{2^{n-1}-1}.$$

Άρα

$$\mathbb{E}(X_i) = 0 \cdot P(X_i = 0) + 1 \cdot P(X_i = 1) = \frac{2^{n-2}}{2^{n-1}-1} > \frac{1}{2}.$$

Επαναλαμβάνουμε το ίδιο για όλες τις ακμές. Τότε, από τη γραμμικότητα της αναμενόμενης τιμής,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{E}(X_i) = m \cdot \mathbb{E}(X_1) > \frac{m}{2}.$$

Αφού η αναμενόμενη τιμή του πλήθους των ακμών αυτών των διμερών υπογραφημάτων του G είναι μεγαλύτερη από $m/2$, έπεται από το Θεώρημα 9.5 ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα διμερές υπογράφημα του G με περισσότερες από $m/2$ ακμές. □

Ορισμός 9.7 (Ανεξάρτητο σύνολο). Ένα ανεξάρτητο σύνολο μεγέθους n, που συμβολίζεται με $\overline{K_n}$, είναι μια συλλογή από n κορυφές, τέτοια ώστε να μην υπάρχουν ακμές ανάμεσα σε κανένα δύο από αυτές τις κορυφές.

Ισχύει για παράδειγμα το εξής:

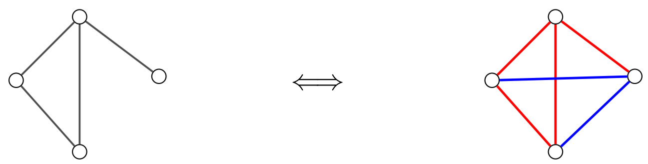
Κάθε γράφημα με 20 κορυφές περιέχει ένα K_4 ή ένα $\overline{K_4}$.

Στην πραγματικότητα, αν κοιτάξεις π.χ. στη Wikipedia, θα βρεις ότι αυτό μπορούμε να το πετύχουμε ήδη με μόλις 18 κορυφές — πράγμα που ακούγεται ακόμη πιο εντυπωσιακό. Ας γενικεύσουμε αυτή την ιδέα:

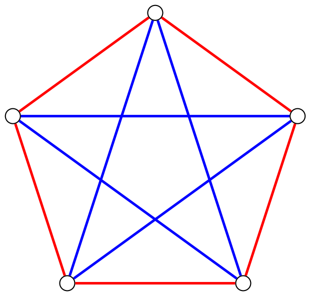
Ορισμός 9.8 (Αριθμός Ramsey). Ο n-οστός αριθμός Ramsey, που συμβολίζεται με $R(t,t)$, είναι ο ελάχιστος αριθμός n με την ιδιότητα ότι κάθε γράφημα με n κορυφές έχει ένα K_t ή ένα $\overline{K_t}$.

Ισοδύναμα, το $R(t,t)$ είναι ο ελάχιστος αριθμός n τέτοιος ώστε, αν χρωματίσουμε τις ακμές του K_n με δύο χρώματα (κόκκινο ή μπλε), τότε προκύπτει ένα μονοχρωματικό K_t.

Γιατί αυτές οι δύο διατυπώσεις είναι ίδιες; Απλώς θεώρησε την απουσία μιας ακμής ως ένα δεύτερο χρώμα.



Σχήμα 43: Η απουσία ακμής μπορεί να θεωρηθεί ως δεύτερο χρώμα. Έτσι, η μελέτη των γραφημάτων και των ανεξάρτητων συνόλων μεταφράζεται σε πρόβλημα δυχρωματισμού των ακμών ενός πλήρους γραφήματος.



Σχήμα 44: Ένας 2-χρωματισμός του K_5 χωρίς μονόχρωμο τρίγωνο. Άρα $R(3,3) > 5$.

Πρόταση 9.9 (Η τιμή του $R(3,3)$). *Ο τρίτος αριθμός Ramsey είναι*

$$R(3,3) = 6.$$

Απόδειξη. Πρώτα θα δείξουμε ένα γράφημα με 5 κορυφές το οποίο δεν έχει μονόχρωμο K_3.

Παρατηρούμε ότι, όποιες τρεις κορυφές κι αν διαλέξουμε, οι 2 από τις 3 ακμές τους έχουν το ένα χρώμα και η τρίτη το άλλο. Άρα

$$R(3,3) > 5.$$

Για το άνω φράγμα δες και την Εφαρμογή 6. Τώρα, έστω K_6, και χρωμάτισέ το αυθαίρετα με δύο χρώματα. Πάρε μια οποιαδήποτε κορυφή v. Εφόσον η v συνδέεται με 5 άλλες κορυφές, τουλάχιστον 3 από τις ακμές που ξεκινούν από αυτήν έχουν το ίδιο χρώμα. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, έστω ότι η v έχει 3 μπλε ακμές προς τρεις κορυφές. Τότε υπάρχουν δύο περιπτώσεις:

- Αν κάποια από τις ακμές ανάμεσα σε αυτές τις τρεις κορυφές είναι μπλε, τότε έχουμε βρει μπλε K_3.
- Αν όλες οι ακμές ανάμεσα σε αυτές τις τρεις κορυφές είναι κόκκινες, τότε αυτές οι τρεις κορυφές σχηματίζουν κόκκινο K_3.

Σε κάθε περίπτωση, βρήκαμε μονόχρωμο K_3. Άρα

$$R(3,3) \leq 6.$$

Μαζί με το προηγούμενο κάτω φράγμα, καταλήγουμε ότι

$$R(3,3) = 6.$$

□

Παρατήρηση 9.10 (Πώς αποδεικνύουμε την τιμή ενός αριθμού Ramsey). Για να δείξουμε ότι

$$R(t,t) = n,$$

πρέπει να κάνουμε δύο πράγματα:

- Να δείξουμε ότι υπάρχει ένα γράφημα με $n-1$ κορυφές, του οποίου οι ακμές μπορούν να χρωματιστούν με 2 χρώματα έτσι ώστε να μην υπάρχει μονόχρωμο K_t. Αυτό δείχνει ότι

$$R(t,t) > n-1.$$

- Να δείξουμε ότι οποιοσδήποτε χρωματισμός με 2 χρώματα των ακμών ενός γραφήματος με n κορυφές έχει ένα μονόχρωμο K_t. Αυτό δείχνει ότι

$$R(t,t) \leq n.$$

Μαζί, αυτά τα δύο γεγονότα δίνουν

$$R(t,t) = n.$$

Από εδώ και πέρα, ίσως μπεις στον πειρασμό να αρχίσεις να αποδεικνύεις την τιμή κάθε λογής αριθμών Ramsey. Μερικοί μάλιστα ίσως αρκετά γρήγορα φτάσετε μέχρι το $R(4,4) = 18$, αλλά αν δοκιμάσετε το $R(5,5)$, μάλλον θα κολλήσετε.

Και δεν θα είστε μόνοι: κανείς δεν γνωρίζει την τιμή του $R(5,5)$. Στην πραγματικότητα, αν την βρεις, μάλλον θα πάρεις αμέσως άριστα σε αυτό το μάθημα (και πιθανώς και διδακτορικό).

Τώρα θα βρούμε ένα κάτω φράγμα για το $R(k,k)$, αποδεικνύοντας ότι

$$R(k,k) > 2^{k/2}.$$

Ας δούμε πιο προσεκτικά τι σημαίνει αυτό που θέλουμε να αποδείξουμε. Η πρόταση αυτή λέει ότι αν G είναι πλήρες γράφημα με $2^{k/2}$ κορυφές, τότε είναι δυνατό να χρωματίσουμε τις ακμές του G με 2 χρώματα έτσι ώστε να μη σχηματίζεται κανένα μονοχρωματικό αντίγραφο του K_k.

Όταν αποδείξαμε παρόμοιες προτάσεις δείχνοντας ότι

$$R(3,3) > 5$$

το κάναμε κατασκευάζοντας ρητά έναν χρωματισμό του K_5 που πράγματι δεν περιέχει τα απαιτούμενα μονοχρωματικά αντίγραφα. Όμως αυτό ήταν περισσότερο από όσο πραγματικά χρειαζόμασταν. Για να αποδείξουμε ότι

$$R(k,k) > 2^{k/2},$$

αρκεί να αποδείξουμε ότι *είναι δυνατό* να χρωματίσουμε τις ακμές του G με 2 χρώματα έτσι ώστε να μη σχηματίζεται κανένα μονόχρωμο αντίγραφο του K_k· δεν είναι αναγκαίο να βρούμε πράγματι έναν τέτοιο χρωματισμό. Σε λίγο θα δούμε πόσο μεγάλη είναι αυτή η διαφορά.

Θεώρημα 9.11. *Για όλους τους θετικούς ακεραίους $k \geq 3$, ισχύει η ανισότητα*

$$R(k,k) > 2^{k/2}.$$

Απόδειξη. Θέτουμε $G = K_n$, και χρωματίζουμε κάθε ακμή του G κόκκινη ή μπλε ως εξής. Για κάθε ακμή, ρίχνουμε ένα νόμισμα. Αν έρθει κορώνα, τη χρωματίζουμε κόκκινη· διαφορετικά, τη χρωματίζουμε μπλε. Έτσι κάθε ακμή είναι κόκκινη με πιθανότητα $1/2$ και μπλε με πιθανότητα $1/2$.

Θα δείξουμε ότι η πιθανότητα p να μη δημιουργηθεί κανένα μονοχρωματικό υπογράφημα K_k με αυτόν τον τυχαίο χρωματισμό είναι θετική. Από την άλλη,

$$p = \frac{|F|}{|\Omega|},$$

όπου F είναι το σύνολο των ευνοϊκών εκβάσεων και Ω το σύνολο όλων των δυνατών 2-χρωματισμών των ακμών ενός πλήρους γραφήματος με n κορυφές. Άρα το $p > 0$ συνεπάγεται ότι υπάρχει τουλάχιστον μία ευνοϊκή έκβαση, δηλαδή τουλάχιστον ένα K_n με 2-χρωματισμένες ακμές που δεν περιέχει κανένα μονοχρωματικό K_k.

Αντί να αποδείξουμε ότι $p > 0$, θα αποδείξουμε ότι

$$1 - p < 1,$$

που είναι ισοδύναμο. Παρατηρούμε ότι το $1 - p$ είναι η πιθανότητα του συμπληρωματικού ενδεχομένου, δηλαδή να εμφανιστεί τουλάχιστον ένα μονοχρωματικό υπογράφημα στο τυχαία χρωματισμένο γράφημα $G = K_n$.

Το πλήθος των τρόπων να 2-χρωματίσουμε τις ακμές ενός δοσμένου υπογραφήματος K_k του K_n είναι προφανώς

$$2^{\binom{k}{2}},$$

αφού υπάρχουν δύο επιλογές για το χρώμα κάθε ακμής. Από όλους αυτούς τους χρωματισμούς, μόνο δύο είναι μονοχρωματικοί: ένας με όλες τις ακμές κόκκινες και ένας με όλες τις ακμές μπλε. Επομένως, η πιθανότητα ένα τυχαία επιλεγμένο υπογράφημα K_k να είναι μονοχρωματικό είναι

$$\frac{2}{2^{\binom{k}{2}}} = 2^{1-\binom{k}{2}}.$$

Το γράφημα K_n έχει

$$\binom{n}{k}$$

υπογραφήματα ισομορφικά με το K_k. Το καθένα από αυτά έχει την ίδια πιθανότητα να είναι μονοχρωματικό. Από την άλλη, η πιθανότητα να είναι *τουλάχιστον ένα* από αυτά μονοχρωματικό είναι το πολύ το άθροισμα αυτών των επιμέρους πιθανοτήτων. Με άλλα λόγια, αν A_S δηλώνει το ενδεχόμενο ότι το K_k-υπογράφημα S του G έχει μονόχρωμες ακμές, τότε

$$P\Big(\bigcup_S A_S\Big) \leq \sum_S P(A_S) = \binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}}, \tag{12}$$

όπου το S διατρέχει όλα τα K_k-υπογραφήματα του G.

Τώρα ας υποθέσουμε ότι

$$n \leq 2^{k/2}.$$

Τότε ο τελευταίος όρος του (12) μπορεί να φραχθεί ως εξής:

$$\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} < \frac{n^k}{k!}\, 2^{1-\binom{k}{2}} \leq \frac{2 \cdot 2^{k^2/2}}{k!\, 2^{\binom{k}{2}}} = \frac{2^{k/2}}{k!} < 1,$$

για κάθε $k \geq 3$. Η τελευταία ανισότητα είναι πολύ εύκολο να αποδειχθεί, για παράδειγμα με επαγωγή.

Άρα

$$P\Big(\bigcup_S A_S\Big) < 1,$$

οπότε $1 - p < 1$, δηλαδή $p > 0$. Συνεπώς υπάρχει ένας 2-χρωματισμός των ακμών του K_n χωρίς μονόχρωμο K_k. Αυτό αποδεικνύει ότι

$$R(k,k) > 2^{k/2}.$$

□

Θα αποδείξουμε και για αντίστροφη ανισότητα

$$R(k,k) \leq 4^k.$$

Το τελευταίο μας αποτέλεσμα δείχνει ότι

$$(\sqrt{2})^k < R(k,k).$$

Αυτά είναι ουσιαστικά τα καλύτερα γνωστά αποτελέσματα για το μέγεθος του $R(k,k)$, άρα υπάρχει ακόμη πολύς δρόμος στην πρόοδο της θεωρίας των αριθμών Ramsey.

Παράδειγμα 9.12. Έστω ότι ρίχνουμε ένα δίκαιο νόμισμα 100 φορές. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της αναμενόμενης τιμής, ο αναμενόμενος αριθμός κεφαλών είναι ίσος με

$$\sum_{k=0}^{100} k \binom{100}{k} \frac{1}{2^{100}}.$$

Πράγματι, η πιθανότητα να εμφανιστούν ακριβώς k κεφαλές σε 100 ρίψεις είναι

$$\binom{100}{k} \frac{1}{2^{100}},$$

αφού υπάρχουν $\binom{100}{k}$ τρόποι να επιλέξουμε σε ποιες από τις 100 ρίψεις θα εμφανιστεί κεφαλή, και κάθε τέτοια ακολουθία έχει πιθανότητα 2^{-100}. Άρα, από τον ορισμό της αναμενόμενης τιμής, αθροίζουμε την τιμή k επί την πιθανότητα να πάρει η τυχαία μεταβλητή αυτή την τιμή. Ωστόσο, όλοι "ξέρουμε" ότι η απάντηση είναι 50, χωρίς να υπολογίσουμε το παραπάνω άθροισμα.

Η απάντηση μπορεί να υπολογιστεί με τη γραμμικότητα της αναμενόμενης τιμής ως εξής: Έστω

$$X = X_1 + \cdots + X_{100},$$

όπου

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{αν η } i\text{-οστή ρίψη φέρει κεφαλή,} \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Τότε το X είναι ο συνολικός αριθμός των κεφαλών. Έχουμε

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}(X_1 + \cdots + X_{100}) = \mathbb{E}X_1 + \cdots + \mathbb{E}X_{100} = \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} = 50.$$

Στο παραπάνω παράδειγμα, οι τυχαίες μεταβλητές $X_1, \ldots, X_{100}$ ήταν ανεξάρτητες. Ωστόσο, η δύναμη της γραμμικότητας της αναμενόμενης τιμής προέρχεται από το γεγονός ότι αυτό *δεν είναι αναγκαίο*.

Παράδειγμα 9.13. Εκατό αφηρημένοι μαθηματικοί πηγαίνουν σε ένα πάρτι και κρεμούν τα παλτά τους στην είσοδο. Όταν φεύγουν, διαλέγουν τυχαία από ένα παλτό ο καθένας. Να βρεθεί ο αναμενόμενος αριθμός των μαθηματικών που θα πάρουν το σωστό παλτό.

Λύση. Θέτουμε

$$X = X_1 + \cdots + X_{100},$$

όπου

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{αν ο } i\text{-οστός μαθηματικός πάρει το σωστό παλτό,} \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Τότε το X είναι ο αριθμός των μαθηματικών που παίρνουν το σωστό παλτό. Έχουμε

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}(X_1 + \cdots + X_{100}) = \mathbb{E}X_1 + \cdots + \mathbb{E}X_{100} = \frac{1}{100} + \cdots + \frac{1}{100} = 1.$$

□

Παράδειγμα 9.14. Έστω G γράφημα με n κορυφές και $e \geq 4n$ ακμές. Τότε, όπως κι αν σχεδιάσουμε το γράφημα στο επίπεδο, θα υπάρχουν τουλάχιστον

$$\frac{e^3}{64n^2}$$

διασταυρώσεις, δηλαδή ζεύγη σχεδιασμένων ακμών που τέμνονται. (Αυτό ισχύει ακόμη και αν επιτρέψουμε οι ακμές να σχεδιάζονται ως καμπύλες και όχι ως ευθύγραμμα τμήματα. Δεν μετράμε τις τομές ακμών πάνω στις κορυφές.)

Λύση. Ξεκινάμε από το γνωστό αποτέλεσμα ότι κάθε επίπεδο γράφημα με n κορυφές έχει το πολύ

$$e \leq 3n - 6 < 3n$$

ακμές.

Πάρε μια σχεδίαση του G στο επίπεδο με c διασταυρώσεις. Αφαιρώντας κατάλληλα ακμές, μπορούμε να εξαλείψουμε όλες τις διασταυρώσεις αφαιρώντας το πολύ c ακμές: πράγματι, όσο υπάρχει μια διασταύρωση, αφαιρούμε μία από τις δύο ακμές που τη δημιουργούν. Στο τέλος παίρνουμε ένα επίπεδο υπογράφημα H με n κορυφές και τουλάχιστον

$$e - c$$

ακμές. Επειδή κάθε επίπεδο γράφημα με n κορυφές έχει το πολύ $3n - 6$ ακμές, παίρνουμε

$$e - c \leq 3n - 6.$$

Άρα

$$c \geq e - 3n + 6 > e - 3n.$$

Τώρα πάρε μια συγκεκριμένη σχεδίαση του G στο επίπεδο με c διασταυρώσεις. Κράτα κάθε κορυφή ανεξάρτητα με πιθανότητα p, και κράτα όλες τις ακμές ανάμεσα στις κορυφές που διατηρήθηκαν. Έτσι παίρνουμε ένα γράφημα H, του οποίου ο αναμενόμενος αριθμός κορυφών, ακμών και διασταυρώσεων είναι αντίστοιχα

$$np, \qquad ep^2, \qquad cp^4.$$

(Μια διασταύρωση παραμένει αν και μόνον αν παραμένουν και οι δύο ακμές που διασταυρώνονται, πράγμα που συμβαίνει αν και μόνον αν παραμείνουν και οι τέσσερις σχετικές κορυφές.)

Άρα

$$\mathbb{E}(e(H) - 3v(H)) \leq \mathbb{E}\,\mathrm{cr}(H),$$

και επομένως

$$ep^2 - 3np \leq cp^4.$$

Άρα

$$c \geq \frac{e}{p^2} - \frac{3n}{p^3}.$$

Το ζητούμενο έπεται αν θέσουμε

$$p = \frac{4n}{e} \leq 1.$$

Πράγματι, τότε

$$c \geq \frac{e}{(4n/e)^2} - \frac{3n}{(4n/e)^3} = \frac{e^3}{16n^2} - \frac{3e^3}{64n^2} = \frac{e^3}{64n^2}.$$

□

Παραπάνω χρησιμοποιήσαμε το εξής:

Λήμμα 9.15. *Έστω G ένα γράφημα σχεδιασμένο στο επίπεδο, με n κορυφές, e ακμές και c διασταυρώσεις. Κατασκευάζουμε τυχαίο υπογράφημα H κρατώντας κάθε κορυφή ανεξάρτητα με πιθανότητα p, και κατόπιν κρατώντας όλες τις ακμές του G των οποίων και τα δύο άκρα διατηρήθηκαν. Τότε ο αναμενόμενος αριθμός κορυφών, ακμών και διασταυρώσεων του H είναι αντίστοιχα*

$$np, \qquad ep^2, \qquad cp^4.$$

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε μεταβλητές δεικτών και τη γραμμικότητα της αναμενόμενης τιμής.

Κορυφές. Για κάθε κορυφή v του G, θέτουμε

$$X_v = \begin{cases} 1, & \text{αν η } v \text{ διατηρείται,} \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Αν $v(H)$ συμβολίζει το πλήθος των κορυφών του H, τότε

$$v(H) = \sum_{v \in V(G)} X_v.$$

Επειδή κάθε κορυφή διατηρείται με πιθανότητα p, έχουμε

$$\mathbb{E}(X_v) = p$$

για κάθε v. Άρα, από τη γραμμικότητα της αναμενόμενης τιμής,

$$\mathbb{E}(v(H)) = \sum_{v \in V(G)} \mathbb{E}(X_v) = np.$$

Ακμές. Για κάθε ακμή $e = \{u, v\}$ του G, θέτουμε

$$Y_e = \begin{cases} 1, & \text{αν η } e \text{ παραμένει στο } H, \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Τότε

$$e(H) = \sum_{e \in E(G)} Y_e.$$

Η ακμή $e = \{u, v\}$ παραμένει αν και μόνον αν διατηρηθούν και οι δύο κορυφές u, v. Επειδή οι επιλογές των κορυφών γίνονται ανεξάρτητα, παίρνουμε

$$\mathbb{E}(Y_e) = P(Y_e = 1) = p^2.$$

Άρα

$$\mathbb{E}(e(H)) = \sum_{e \in E(G)} \mathbb{E}(Y_e) = ep^2.$$

Διασταυρώσεις. Για κάθε διασταύρωση x της δοσμένης σχεδίασης του G, δηλαδή για κάθε ζεύγος ακμών που τέμνονται σε εσωτερικό σημείο, θέτουμε

$$Z_x = \begin{cases} 1, & \text{αν η διασταύρωση } x \text{ παραμένει στο } H, \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Αν $\mathrm{cr}(H)$ συμβολίζει το πλήθος των διασταυρώσεων του H, τότε

$$\mathrm{cr}(H) = \sum_x Z_x,$$

όπου το άθροισμα εκτείνεται σε όλες τις c διασταυρώσεις της αρχικής σχεδίασης.

Μια διασταύρωση παραμένει αν και μόνον αν παραμείνουν και οι δύο ακμές που τη σχηματίζουν. Αυτό συμβαίνει αν και μόνον αν παραμείνουν και οι τέσσερις σχετικές κορυφές. Επομένως, λόγω ανεξαρτησίας,

$$\mathbb{E}(Z_x) = P(Z_x = 1) = p^4.$$

Άρα
$$\mathbb{E}(\mathrm{cr}(H)) = \sum_x \mathbb{E}(Z_x) = cp^4.$$

Συνεπώς ο αναμενόμενος αριθμός κορυφών, ακμών και διασταυρώσεων του H είναι αντίστοιχα
$$np, \qquad ep^2, \qquad cp^4.$$

□

Παράδειγμα 9.16. Στη Δούμα υπάρχουν 1600 μέλη, τα οποία έχουν σχηματίσει 16000 επιτροπές των 80 ατόμων η καθεμία. Να αποδειχθεί ότι μπορούμε να βρούμε δύο επιτροπές που να έχουν τουλάχιστον 4 μέλη κοινά. (Ρωσία, 1996)

Λύση. Αυτή είναι μια τυπική περίπτωση όπου η αναμενόμενη τιμή είναι χρήσιμη. Αναζητούμε ζεύγη επιτροπών και κοινά μέλη. Αν καταφέρουμε να αποδείξουμε ότι η αντίστοιχη αναμενόμενη τιμή είναι μεγαλύτερη από 3, τότε θα έχουμε κερδίσει: θα υπάρχουν δύο επιτροπές με τουλάχιστον 4 κοινά μέλη.

Ας οργανώσουμε τα δεδομένα. Επιλέγουμε δύο επιτροπές τυχαία και ομοιόμορφα. Έστω X η τυχαία μεταβλητή που δίνει τον αριθμό των ανθρώπων που ανήκουν και στις δύο επιτροπές, και για κάθε $i = 1, \ldots, 1600$, έστω X_i η δεικτική μεταβλητή που παίρνει την τιμή 1 αν το i-οστό μέλος ανήκει και στις δύο επιτροπές, και 0 διαφορετικά.

Προφανώς
$$X = \sum_{i=1}^{1600} X_i,$$
και άρα, από τη γραμμικότητα της αναμενόμενης τιμής,
$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{1600} \mathbb{E}[X_i].$$

Τώρα το ουσιαστικό σημείο είναι ότι το $\mathbb{E}[X_i]$ υπολογίζεται εύκολα. Έστω n_i ο αριθμός των επιτροπών στις οποίες ανήκει το i-οστό μέλος. Τότε
$$\mathbb{E}[X_i] = \frac{\binom{n_i}{2}}{\binom{16000}{2}},$$
διότι η πιθανότητα το i-οστό μέλος να ανήκει και στις δύο τυχαία επιλεγμένες επιτροπές είναι ακριβώς ο λόγος των ζευγών επιτροπών που το περιέχουν προς όλα τα ζεύγη επιτροπών.

Επιπλέον,
$$\sum_{i=1}^{1600} n_i = 16000 \cdot 80,$$
αφού κάθε επιτροπή μετριέται 80 φορές, μία για κάθε μέλος της. Επομένως η μέση τιμή των n_i είναι
$$n = 800.$$

Το μόνο που απομένει είναι να χρησιμοποιήσουμε την κυρτότητα της συνάρτησης
$$x \mapsto \binom{x}{2} = \frac{x(x-1)}{2}.$$

Παίρνουμε λοιπόν
$$\sum_{i=1}^{1600} \mathbb{E}[X_i] = \frac{\sum_{i=1}^{1600} \binom{n_i}{2}}{\binom{16000}{2}} \geq 1600 \cdot \frac{\binom{800}{2}}{\binom{16000}{2}} = \frac{80 \cdot 799}{15999} > 3.9.$$

Άρα
$$\mathbb{E}[X] > 3.9.$$

Αυτό ολοκληρώνει το πρόβλημα, διότι από το $\mathbb{E}[X] > 3.9$ συμπεραίνουμε ότι υπάρχει κάποιο ζεύγος επιτροπών για το οποίο
$$X \geq 4.$$

$\square$

Παράδειγμα 9.17. Επιλέγονται αρκετές χορδές σε έναν μοναδιαίο κύκλο, με άθροισμα μηκών ίσο με 13. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει μία διάμετρος η οποία τέμνει τουλάχιστον 5 από αυτές τις χορδές.

Λύση. Αυτό είναι ένα ακόμη τυπικό παράδειγμα χρήσης πιθανοτήτων, αυτή τη φορά σε γεωμετρικό πλαίσιο. Θα χρειαστούμε πιθανότητες πάνω σε άπειρο δειγματικό χώρο.

Έστω $\mathcal{C}$ το σύνολο των χορδών και, για κάθε $c \in \mathcal{C}$, έστω $l(c)$ το μήκος της.

Ο δειγματικός μας χώρος θα είναι το σύνολο όλων των διαμέτρων του κύκλου. Ποιο είναι ένα μέτρο πιθανότητας εκεί; Παρατηρούμε ότι μία διάμετρος καθορίζεται μοναδικά από την γωνία $\theta \in [0, \pi)$ που σχηματίζει με τον άξονα των x (μετράμε την γωνία αντίστροφα προς την φορά των δεικτών του ρολογιού). Έστω X η τυχαία μεταβλητή που δίνει το πλήθος των χορδών που τέμνονται από μια τυχαία διάμετρο. Για κάθε $c \in \mathcal{C}$, έστω X_c η τυχαία μεταβλητή που είναι 1 αν η διάμετρος τέμνει τη χορδή c, και 0 διαφορετικά. Τότε
$$X = \sum_{c \in \mathcal{C}} X_c \qquad \text{και} \qquad \mathbb{E}[X] = \sum_{c \in \mathcal{C}} \mathbb{E}[X_c].$$

Τώρα, το $\mathbb{E}[X_c]$ είναι ακριβώς η πιθανότητα η τυχαία διάμετρος να τέμνει τη χορδή c. Έστω ότι η χορδή c έχει άκρα
$$(\cos\theta_1, \sin\theta_1), \qquad (\cos\theta_2, \sin\theta_2),$$
όπου $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < 2\pi$ και $\theta_2 - \theta_1 \leq \pi$. Τότε $\theta_2 - \theta_1$ είναι η κεντρική γωνία που βαίνει στη χορδή c. Μια διάμετρος διεύθυνσης $\varphi \in [0, \pi)$ τέμνει τη χορδή c αν και μόνον αν μία από τις δύο ημιευθείες της έχει γωνία ανάμεσα στις θ_1 και θ_2. Άρα το σύνολο των ευνοϊκών διαμέτρων έχει γωνιακό μέτρο
$$\theta_2 - \theta_1.$$

Επομένως
$$P(\text{η τυχαία διάμετρος τέμνει τη } c) = \frac{\theta_2 - \theta_1}{\pi}.$$

Αλλά
$$l(c) = 2\sin\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right),$$

οπότε
$$\theta_2 - \theta_1 = 2\arcsin\left(\frac{l(c)}{2}\right).$$

Συνεπώς
$$P(\text{η τυχαία διάμετρος τέμνει τη } c) = \frac{2}{\pi}\arcsin\left(\frac{l(c)}{2}\right).$$

Άρα, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι
$$\arcsin(x) \geq x,$$

παίρνουμε
$$\mathbb{E}[X] = \sum_{c \in \mathcal{C}} \frac{2}{\pi}\arcsin\left(\frac{l(c)}{2}\right) \geq \sum_{c \in \mathcal{C}} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{l(c)}{2} = \frac{1}{\pi}\sum_{c \in \mathcal{C}} l(c) = \frac{13}{\pi} > 4.2.$$

Επομένως υπάρχει κάποιο σημείο του δειγματικού χώρου για το οποίο

$$X > 4.2.$$

Επειδή η X παίρνει ακέραιες τιμές, έπεται ότι για κάποια διάμετρο ισχύει

$$X \geq 5.$$

Άρα υπάρχει διάμετρος που τέμνει τουλάχιστον 5 από τις δοσμένες χορδές. □

Θεώρημα 9.18. *Έστω $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^m$ με*

$$|u_i| = 1 \qquad \text{για κάθε } i = 1, \dots, n.$$

Τότε υπάρχουν $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{\pm 1\}$ τέτοια ώστε

$$\left|\varepsilon_1 u_1 + \cdots + \varepsilon_n u_n\right| \leq \sqrt{n},$$

και επίσης υπάρχουν $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{\pm 1\}$ τέτοια ώστε

$$\left|\varepsilon_1 u_1 + \cdots + \varepsilon_n u_n\right| \geq \sqrt{n}.$$

Απόδειξη. Επιλέγουμε $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ ομοιόμορφα και ανεξάρτητα από το σύνολο $\{-1, +1\}$. Θέτουμε

$$X = \left|\varepsilon_1 u_1 + \cdots + \varepsilon_n u_n\right|^2.$$

Τότε

$$X = \left\langle \sum_{i=1}^n \varepsilon_i u_i,\ \sum_{j=1}^n \varepsilon_j u_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \varepsilon_i \varepsilon_j \left\langle u_i, u_j \right\rangle.$$

Παίρνοντας αναμενόμενες τιμές, βρίσκουμε

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle u_i, u_j \rangle\, \mathbb{E}[\varepsilon_i \varepsilon_j].$$

Αν $i \neq j$, τότε, λόγω ανεξαρτησίας,

$$\mathbb{E}[\varepsilon_i \varepsilon_j] = \mathbb{E}[\varepsilon_i]\mathbb{E}[\varepsilon_j] = 0.$$

Αν $i = j$, τότε $\varepsilon_i^2 = 1$, άρα

$$\mathbb{E}[\varepsilon_i^2] = 1.$$

Επομένως

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^n \langle u_i, u_i \rangle = \sum_{i=1}^n |u_i|^2 = n.$$

Αφού η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής X είναι n, υπάρχουν συγκεκριμένες επιλογές προσήμων για τις οποίες

$$X \leq n$$

και επίσης συγκεκριμένες επιλογές προσήμων για τις οποίες

$$X \geq n.$$

Παίρνοντας τετραγωνικές ρίζες, προκύπτει το ζητούμενο. □

Πρόταση 9.19. *Έστω G ένα απλό γράφημα με κορυφές $v_1, \ldots, v_n$, και έστω*

$$d_i = \deg(v_i) \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Τότε υπάρχει σύνολο κορυφών S τέτοιο ώστε:

1.
$$|S| \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i + 1},$$

2. *καμία δύο κορυφές του S δεν είναι γειτονικές.*

Δηλαδή, το S είναι ανεξάρτητο σύνολο με τουλάχιστον

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i + 1}$$

κορυφές.

Απόδειξη. Η ιδέα είναι να διατάξουμε τις κορυφές τυχαία και να κρατήσουμε εκείνες που εμφανίζονται πριν από όλους τους γειτόνους τους.

Επιλέγουμε ομοιόμορφα μια τυχαία μετάθεση σ του συνόλου των κορυφών

$$\{v_1, \ldots, v_n\}.$$

Δηλαδή, διαλέγουμε τυχαία μια διάταξη των κορυφών, και καθεμία από τις $n!$ δυνατές διατάξεις έχει την ίδια πιθανότητα.

Για κάθε $i = 1, \ldots, n$, ορίζουμε το ενδεχόμεο

$$A_i = \{\text{η κορυφή } v_i \text{ εμφανίζεται πριν από όλους τους γειτόνους της στη διάταξη } \sigma\}.$$

Με άλλα λόγια, το A_i συμβαίνει αν, ανάμεσα στην v_i και σε όλες τις κορυφές που είναι γειτονικές με αυτήν, η v_i είναι η πρώτη που εμφανίζεται στη διάταξη σ.

Υπολογισμός της πιθανότητας του A_i. Η κορυφή v_i έχει ακριβώς d_i γείτονες, άρα το σύνολο

$$\{v_i\} \cup N(v_i)$$

έχει $d_i + 1$ κορυφές.

Αν κοιτάξουμε μόνο τη σχετική σειρά αυτών των $d_i + 1$ κορυφών μέσα στην τυχαία μετάθεση σ, τότε όλες οι δυνατές σχετικές διατάξεις είναι ισοπίθανες. Επομένως καθεμία από τις $d_i + 1$ κορυφές είναι εξίσου πιθανό να εμφανιστεί πρώτη ανάμεσά τους.

Άρα η πιθανότητα να εμφανιστεί πρώτη η v_i είναι

$$\Pr(A_i) = \frac{1}{d_i + 1}.$$

Για κάθε i, ορίζουμε τη δεικτική τυχαία μεταβλητή

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{αν συμβαίνει το } A_i, \\ 0, & \text{αν δεν συμβαίνει το } A_i. \end{cases}$$

Θέτουμε επίσης

$$X = X_1 + \cdots + X_n.$$

Τότε το X μετρά πόσες κορυφές έχουν την ιδιότητα ότι εμφανίζονται πριν από όλους τους γειτόνους τους.

Από τη γραμμικότητα της αναμενόμενης τιμής παίρνουμε

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_1] + \cdots + \mathbb{E}[X_n].$$

Επειδή X_i είναι δεικτική μεταβλητή, έχουμε

$$\mathbb{E}[X_i] = \Pr(A_i) = \frac{1}{d_i + 1}.$$

Άρα

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i + 1}.$$

Συνεπώς υπάρχει τουλάχιστον μία συγκεκριμένη μετάθεση σ για την οποία

$$X(\sigma) \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i + 1}.$$

Πράγματι, αν για κάθε μετάθεση σ ίσχυε

$$X(\sigma) < \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i + 1},$$

τότε και η μέση τιμή του X θα ήταν μικρότερη από αυτό το άθροισμα, πράγμα που αντιφάσκει με τον υπολογισμό της $\mathbb{E}[X]$.

Διαλέγουμε τώρα μια τέτοια μετάθεση σ, και θέτουμε

$$S = \{v_i : \ A_i \text{ συμβαίνει για τη συγκεκριμένη μετάθεση } \sigma\}.$$

Τότε, από τον ορισμό του X,

$$|S| = X(\sigma) \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i + 1}.$$

Άρα έχει αποδειχθεί η πρώτη ιδιότητα.

Το σύνολο S είναι ανεξάρτητο. Μένει να δείξουμε ότι δεν υπάρχουν ακμές ανάμεσα σε δύο κορυφές του S.

Έστω προς άτοπο ότι υπάρχουν δύο γειτονικές κορυφές $v_i, v_j \in S$. Επειδή $v_i \in S$, συμβαίνει το γεγονός A_i, άρα η v_i εμφανίζεται πριν από όλους τους γειτόνους της, και ειδικότερα πριν από την v_j. Δηλαδή

$$\sigma(v_i) < \sigma(v_j).$$

Από την άλλη, επειδή $v_j \in S$, συμβαίνει το γεγονός A_j, άρα η v_j εμφανίζεται πριν από όλους τους γειτόνους της, και ειδικότερα πριν από την v_i. Δηλαδή

$$\sigma(v_j) < \sigma(v_i).$$

Αυτό είναι αδύνατο.

Η άτοπη αυτή υπόθεση δείχνει ότι καμία δύο κορυφές του S δεν είναι γειτονικές. Άρα το S είναι ανεξάρτητο σύνολο.

Επομένως το S ικανοποιεί και τις δύο ζητούμενες ιδιότητες. $\square$