Διακριτά Μαθηματικά
6$^{\text{ο}}$ Φυλλάδιο Ασκήσεων

Πρόβλημα 1 Έστω $n \geq 2$ ακέραιος και έστω

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$$

θετικοί ακέραιοι με

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 2n - 2.$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει δέντρο T με n κορυφές του οποίου η διατεταγμένη ακολουθία βαθμών είναι

$$a_1, a_2, \ldots, a_n.$$

Πρόβλημα 2 Πόσα διαφορετικά επισημασμένα δέντρα υπάρχουν πάνω στο $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$, τα οποία δεν έχουν καμία κορυφή βαθμού μεγαλύτερου από 2;

Πρόβλημα 3 Πόσες το πολύ ακμές μπορεί να έχει ένα απλό γράφημα G με κορυφές το $[n]$, αν το G δεν είναι συνεκτικό;

Πρόβλημα 4 Να αποδείξετε ότι σε κάθε απλό επίπεδο γράφημα υπάρχει κορυφή βαθμού το πολύ 5.

Πρόβλημα 5 Κάθε ακμή του πλήρους γραφήματος K_{11} βάφεται είτε κόκκινη είτε μπλε. Θεωρούμε το γράφημα G_R που έχει όλες τις 11 κορυφές και μόνο τις κόκκινες ακμές, και το γράφημα G_B που έχει όλες τις 11 κορυφές και μόνο τις μπλε ακμές. Να αποδείξετε ότι τουλάχιστον ένα από τα δύο γραφήματα G_R, G_B δεν είναι επίπεδο.

Πρόβλημα 6 Να αποδείξετε ότι σε κάθε πολύεδρο υπάρχουν δύο κορυφές που ανήκουν σε ίσο πλήθος εδρών.

Πρόβλημα 7 Οι έδρες ενός κυρτού πολυέδρου είναι όλες τρίγωνα ή πεντάγωνα. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός των εδρών είναι άρτιος.

Πρόβλημα 8 Υπάρχουν τρία σπίτια H_1, H_2, H_3 και τρία πηγάδια P_1, P_2, P_3. Θέλουμε να ενώσουμε κάθε σπίτι με κάθε πηγάδι με έναν δρόμο, έτσι ώστε κανένας δύο δρόμοι να μην τέμνονται, εκτός ίσως στα κοινά άκρα τους.

Να αποδείξετε ότι αυτό είναι αδύνατο.

Πρόβλημα 9 Ένα επτάγωνο διαμερίζεται σε κυρτά πεντάγωνα και εξάγωνα, έτσι ώστε καθεμία από τις κορυφές του επταγώνου να ανήκει σε τουλάχιστον δύο από τα μικρότερα πολύγωνα. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός των πολυγώνων του διαμερισμού είναι τουλάχιστον 13.

Πρόβλημα 10 Σε ένα συνέδριο υπάρχουν 50 επιστήμονες και καθένας γνωρίζει τουλάχιστον 25 από τους άλλους. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν 4 από αυτούς που μπορούν να καθίσουν γύρω από ένα στρογγυλό τραπέζι έτσι ώστε καθένας να έχει ως δύο γείτονές του δύο γνωστούς του.

Πρόβλημα 11 Έστω G γράφημα στο οποίο κάθε κορυφή έχει βαθμό τουλάχιστον 10. Να αποδείξετε ότι το G περιέχει κύκλο με τουλάχιστον 11 κορυφές.

Πρόβλημα 12 Έστω G συνεκτικό γράφημα με 22 κορυφές, στο οποίο κάθε κορυφή έχει βαθμό τουλάχιστον 10. Να αποδείξετε ότι το G περιέχει μονοπάτι με τουλάχιστον 21 κορυφές.

Πρόβλημα 13 Θεωρούμε n σημεία $A_1, A_2, \ldots, A_n$ στο επίπεδο, όπου $n \geq 4$, με την ιδιότητα ότι κανένα τρία από αυτά δεν είναι συνευθειακά. Μερικά ζεύγη διακεκριμένων σημείων από τα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ενώνονται με ευθύγραμμα τμήματα, έτσι ώστε κάθε σημείο να είναι ενωμένο με τουλάχιστον τρία διαφορετικά σημεία.

Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $k > 1$ και διακεκριμένα σημεία

$$X_1, X_2, \ldots, X_{2k} \in \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$$

τέτοια ώστε, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, 2k - 1$, το X_i να είναι ενωμένο με το X_{i+1}, και επιπλέον το X_{2k} να είναι ενωμένο με το X_1.

Πρόβλημα 14 Σε έναν οικισμό υπάρχουν 1000 κάτοικοι. Κάθε βράδυ, κάθε κάτοικος λέει σε όλους τους φίλους του όλες τις ειδήσεις που έμαθε την προηγούμενη μέρα. Κάθε είδηση τελικά γίνεται γνωστή σε όλους τους κατοίκους. Αποδείξτε ότι είναι δυνατόν να επιλεγούν 90 κάτοικοι έτσι ώστε, αν τους ανακοινωθεί μια είδηση ταυτόχρονα, αυτή να γίνει γνωστή σε όλους μέσα σε 10 ημέρες.

Πρόβλημα 15 Υπάρχουν n θέσεις στάθμευσης $1, 2, \ldots, n$ κατά μήκος ενός μονόδρομου. Τα αυτοκίνητα $1, 2, \ldots, n$ φθάνουν με αυτήν τη σειρά. Το αυτοκίνητο i προτιμά τη θέση $f(i) \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Όταν φθάνει, πηγαίνει πρώτα στη θέση $f(i)$. Αν αυτή είναι ελεύθερη, σταθμεύει εκεί· αν όχι, προχωρά στην επόμενη θέση, και συνεχίζει έτσι μέχρι να βρει κενή θέση. Αν περάσει και από τη θέση n χωρίς να βρει θέση, αποτυγχάνει. Αν στο τέλος όλα τα αυτοκίνητα έχουν σταθμεύσει, λέμε ότι η f είναι *parking function* στο $[n]$.

Να αποδείξετε ότι το πλήθος των parking functions στο $[n]$ είναι

$$(n+1)^{n-1}.$$

Παραδίδετε 7 Προβλήματα έως 21–04–2026.

1 Θα αποδείξουμε το ζητούμενο με επαγωγή ως προς n.

Για $n = 2$, από την σχέση

$$a_1 + a_2 = 2$$

και επειδή $a_1, a_2 \geq 1$, παίρνουμε αναγκαστικά

$$a_1 = a_2 = 1.$$

Η ακολουθία αυτή είναι πράγματι η ακολουθία βαθμών του μοναδικού δέντρου με 2 κορυφές.

Έστω τώρα $n \geq 3$ και υποθέτουμε ότι η πρόταση ισχύει για $n - 1$. Θα δείξουμε ότι ισχύει και για n.

Πρώτα παρατηρούμε ότι

$$a_n = 1.$$

Πράγματι, αν είχαμε $a_n \geq 2$, τότε όλες οι a_i θα ήταν τουλάχιστον 2, άρα

$$a_1 + \cdots + a_n \geq 2n,$$

άτοπο, αφού το άθροισμα είναι $2n - 2$.

Επίσης δεν μπορεί να ισχύει $a_1 = 1$, διότι τότε όλες οι a_i θα ήταν ίσες με 1, οπότε

$$a_1 + \cdots + a_n = n,$$

που είναι αδύνατο για $n \geq 3$. Άρα

$$a_1 \geq 2.$$

Θεωρούμε τώρα την ακολουθία

$$a_1 - 1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{n-1}.$$

Όλοι οι όροι της είναι θετικοί ακέραιοι, αφού $a_1 \geq 2$, και το άθροισμά τους είναι

$$(a_1 - 1) + a_2 + \cdots + a_{n-1} = (a_1 + \cdots + a_n) - 2 = 2n - 4 = 2(n-1) - 2.$$

Αφού την αναδιατάξουμε σε μη αύξουσα σειρά, παίρνουμε μια ακολουθία $n-1$ θετικών ακεραίων με άθροισμα $2(n-1) - 2$. Από την επαγωγική υπόθεση, υπάρχει δέντρο T' με $n - 1$ κορυφές που έχει αυτήν ακριβώς την ακολουθία βαθμών.

Στο T' υπάρχει κάποια κορυφή v βαθμού $a_1 - 1$. Προσθέτουμε μία νέα κορυφή u και την ενώνουμε μόνο με την v. Το νέο γράφημα T είναι δέντρο: είναι συνεκτικό, αφού η νέα κορυφή συνδέεται με το T', και είναι άκυκλο, αφού η προσθήκη ενός φύλλου δεν δημιουργεί κύκλο.

Οι βαθμοί στο T είναι οι ίδιοι με του T', εκτός από το ότι ο βαθμός του v αυξάνεται κατά 1, ενώ η νέα κορυφή u έχει βαθμό 1. Άρα η ακολουθία βαθμών του T είναι ακριβώς

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

(μετά από διάταξη σε μη αύξουσα σειρά).

Επομένως υπάρχει δέντρο με την ζητούμενη ακολουθία βαθμών.

2 Για $n = 1$, υπάρχει ακριβώς ένα τέτοιο δέντρο.

Έστω λοιπόν $n \geq 2$, και έστω T ένα επισημασμένο δέντρο πάνω στο $[n]$ στο οποίο κάθε κορυφή έχει βαθμό το πολύ 2. Επειδή το T είναι δέντρο με n κορυφές, έχουμε

$$\sum_{v \in V(T)} d(v) = 2(n-1).$$

Από την υπόθεση, κάθε βαθμός είναι 1 ή 2, αφού σε δέντρο με $n \geq 2$ δεν μπορεί να υπάρχει κορυφή βαθμού 0.

Έστω ότι το T έχει x κορυφές βαθμού 1 και y κορυφές βαθμού 2. Τότε

$$x + y = n$$

και

$$x + 2y = 2n - 2.$$

Αφαιρώντας τις δύο σχέσεις, παίρνουμε

$$y = n-2 \qquad \text{και} \qquad x = 2.$$

Άρα το T έχει ακριβώς δύο κορυφές βαθμού 1 και όλες οι υπόλοιπες έχουν βαθμό 2. Επομένως το T είναι μονοπάτι με n κορυφές.

Άρα το πρόβλημα ανάγεται στο να μετρήσουμε πόσα διαφορετικά επισημασμένα μονοπάτια υπάρχουν πάνω στο $[n]$.

Κάθε τέτοιο μονοπάτι μπορεί να γραφεί με τη μορφή

$$v_1 - v_2 - \cdots - v_n,$$

όπου $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ είναι μια διάταξη των στοιχείων του $[n]$. Υπάρχουν $n!$ τέτοιες διατάξεις. Όμως κάθε μονοπάτι μετριέται ακριβώς δύο φορές, αφού οι δύο διατάξεις

$$(v_1, v_2, \dots, v_n) \qquad \text{και} \qquad (v_n, v_{n-1}, \dots, v_1)$$

δίνουν το ίδιο δέντρο.

Άρα ο αριθμός των ζητούμενων επισημασμένων δέντρων είναι

$$\frac{n!}{2}.$$

Συνεπώς, για $n \geq 2$, υπάρχουν ακριβώς

$$\boxed{\frac{n!}{2}}$$

διαφορετικά επισημασμένα δέντρα πάνω στο $[n]$ χωρίς κορυφή βαθμού μεγαλύτερου από 2.

3 Θα δείξουμε ότι ο μέγιστος δυνατός αριθμός ακμών είναι

$$\binom{n-1}{2}.$$

Έστω ότι το G δεν είναι συνεκτικό, και ότι οι συνεκτικές συνιστώσες του έχουν

$$n_1, n_2, \dots, n_k$$

κορυφές, όπου $k \geq 2$ και

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n.$$

Καθώς $k \geq 2$, υπάρχουν τουλάχιστον δύο μη μηδενικά n_i, έστω $n_1, n_2 \geq 1$ Κάθε συνιστώσα με n_i κορυφές έχει το πολύ

$$\binom{n_i}{2}$$

ακμές, με ισότητα μόνο όταν είναι πλήρες γράφημα. Άρα

$$e(G) \leq \binom{n_1}{2} + \binom{n_2}{2} + \cdots + \binom{n_k}{2} = \frac{\sum n_i^2 - \sum n_i}{2}.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα $a^2 + b^2 \leq (a+b)^2$ διαδοχικά. Τότε

$$\sum n_i^2 \leq \left(\sum_{i \neq 1} n_i \right)^2 + n_1^2 = (n - n_1)^2 + n_1^2 = 2n_1^2 - 2nn_1 + n^2.$$

Η τελευταία είναι κυρτή συνάρτηση ως προς n_1 και $1 \leq n_1 \leq n-1$, επομένως παίρνει μέγιστη τιμή είτε όταν $n_1 = 1$, είτε όταν $n_1 = n-1$. Στην περίπτωση αυτή,

$$e(G) \leq \binom{n-1}{2}.$$

Η ισότητα επιτυγχάνεται αν πάρουμε το γράφημα

$$K_{n-1} \cup K_1,$$

δηλαδή το πλήρες γράφημα σε $n-1$ κορυφές και μία απομονωμένη κορυφή.

Άρα ο μέγιστος δυνατός αριθμός ακμών είναι

$$\binom{n-1}{2}.$$

4 Έστω G ένα απλό επίπεδο γράφημα με n κορυφές και m ακμές.

Αν $n \leq 2$, τότε προφανώς υπάρχει κορυφή βαθμού το πολύ 1, άρα και το πολύ 5.

Έστω λοιπόν $n \geq 3$. Για απλό επίπεδο γράφημα ισχύει η γνωστή ανισότητα

$$m \leq 3n - 6.$$

Άρα

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m \leq 6n - 12.$$

Επομένως ο μέσος βαθμός των κορυφών είναι

$$\frac{1}{n} \sum_{v \in V(G)} d(v) = \frac{2m}{n} \leq 6 - \frac{12}{n} < 6.$$

Αν όλες οι κορυφές είχαν βαθμό τουλάχιστον 6, τότε ο μέσος βαθμός θα ήταν τουλάχιστον 6, άτοπο.

Άρα υπάρχει τουλάχιστον μία κορυφή βαθμού το πολύ 5.

5 Το πλήρες γράφημα K_{11} έχει

$$\binom{11}{2} = 55$$

ακμές. Οι ακμές του χωρίζονται στις κόκκινες και στις μπλε, άρα

$$e(G_R) + e(G_B) = 55.$$

Θα υποθέσουμε προς άτοπο ότι και τα δύο γραφήματα G_R και G_B είναι επίπεδα. Κάθε ένα από αυτά είναι απλό γράφημα με 11 κορυφές, οπότε από την ανισότητα για απλά επίπεδα γραφήματα έχουμε

$$e(G_R) \leq 3 \cdot 11 - 6 = 27$$

και

$$e(G_B) \leq 3 \cdot 11 - 6 = 27.$$

Άρα

$$e(G_R) + e(G_B) \leq 27 + 27 = 54,$$

που αντιφάσκει με το ότι

$$e(G_R) + e(G_B) = 55.$$

Άρα δεν μπορούν και τα δύο να είναι επίπεδα. Επομένως τουλάχιστον ένα από τα δύο γραφήματα G_R, G_B δεν είναι επίπεδο.

6 Έστω ότι το πολύεδρο έχει V κορυφές και E ακμές.

Κάθε κορυφή πολυέδρου έχει βαθμό τουλάχιστον 3. Θα δείξουμε ότι δεν είναι δυνατόν όλες οι κορυφές να έχουν διαφορετικούς βαθμούς.

Πράγματι, αν όλοι οι βαθμοί ήταν διαφορετικοί, τότε αφού υπάρχουν V κορυφές και κάθε βαθμός είναι τουλάχιστον 3, οι βαθμοί τους θα ήταν τουλάχιστον

$$3, 4, 5, \ldots, V + 2.$$

Άρα το άθροισμα των βαθμών θα ήταν τουλάχιστον

$$3 + 4 + \cdots + (V + 2) = \frac{V(V+5)}{2}.$$

Όμως, από το λήμμα της χειραψίας, το άθροισμα των βαθμών είναι ίσο με $2E$. Επομένως

$$2E \geq \frac{V(V+5)}{2},$$

δηλαδή

$$E \geq \frac{V(V+5)}{4}.$$

Από την άλλη, για το γράφημα ενός πολυέδρου ισχύει

$$E \leq 3V - 6.$$

Άρα θα έπρεπε να ισχύει

$$\frac{V(V+5)}{4} \leq 3V - 6.$$

Πολλαπλασιάζοντας με 4, παίρνουμε

$$V^2 + 5V \leq 12V - 24,$$

δηλαδή

$$V^2 - 7V + 24 \leq 0.$$

Αυτό είναι αδύνατο, αφού

$$V^2 - 7V + 24 = \left(V - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{47}{4} > 0$$

για κάθε πραγματικό V.

Άρα δεν μπορούν όλοι οι βαθμοί να είναι διαφορετικοί. Επομένως σε κάθε πολύεδρο υπάρχουν δύο κορυφές με τον ίδιο βαθμό.

7 Έστω t ο αριθμός των τριγωνικών εδρών και p ο αριθμός των πενταγωνικών εδρών. Τότε ο συνολικός αριθμός των εδρών είναι

$$F = t + p.$$

Αν E είναι ο αριθμός των ακμών του πολυέδρου, τότε μετρώντας τα ζεύγη

$$(\text{έδρα}, \text{πλευρά της έδρας})$$

παίρνουμε

$$3t + 5p = 2E,$$

διότι κάθε τρίγωνο συνεισφέρει 3, κάθε πεντάγωνο συνεισφέρει 5, και κάθε ακμή ανήκει σε ακριβώς δύο έδρες.

Περνώντας την παραπάνω σχέση modulo 2, παίρνουμε

$$3t + 5p \equiv 0 \pmod 2.$$

Επειδή $3 \equiv 1 \pmod 2$ και $5 \equiv 1 \pmod 2$, αυτό δίνει

$$t + p \equiv 0 \pmod 2.$$

Άρα

$$F = t + p$$

είναι άρτιος.

Επομένως ο αριθμός των εδρών του πολυέδρου είναι άρτιος.

8 Αν κάτι τέτοιο ήταν δυνατό, τότε θα είχαμε ένα επίπεδο σχεδίασμα του πλήρους διμερούς γραφήματος

$$K_{3,3},$$

όπου το ένα μέρος είναι τα σπίτια

$$\{H_1, H_2, H_3\}$$

και το άλλο τα πηγάδια

$$\{P_1, P_2, P_3\}.$$

Το γράφημα αυτό έχει

$$V = 6 \qquad \text{και} \qquad E = 9.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε το γνωστό γεγονός ότι για κάθε απλό διμερές επίπεδο γράφημα με $V \geq 3$ ισχύει

$$E \leq 2V - 4.$$

Πράγματι, σε ένα διμερές γράφημα δεν υπάρχουν κύκλοι μήκους 3, άρα κάθε έδρα σε ένα επίπεδο σχεδίασμα έχει περίμετρο τουλάχιστον 4. Αν F είναι ο αριθμός των εδρών, τότε μετρώντας τα άκρα των εδρών παίρνουμε

$$4F \leq 2E,$$

δηλαδή

$$F \leq \frac{E}{2}.$$

Από τον τύπο του Euler

$$V - E + F = 2$$

παίρνουμε

$$2 = V - E + F \leq V - E + \frac{E}{2} = V - \frac{E}{2},$$

οπότε

$$E \leq 2V - 4.$$

Εφαρμόζοντας αυτό στο $K_{3,3}$, θα έπρεπε να ισχύει

$$9 \leq 2 \cdot 6 - 4 = 8,$$

που είναι άτοπο.

Άρα το $K_{3,3}$ δεν είναι επίπεδο, και επομένως το πρόβλημα με τα τρία σπίτια και τα τρία πηγάδια δεν έχει λύση.

9 Θεωρούμε το επίπεδο γράφημα που προκύπτει από τον διαμερισμό: οι κορυφές του είναι όλες οι κορυφές των μικρότερων πολυγώνων και οι ακμές του είναι όλες οι πλευρές τους.

Έστω:

$$p = \text{ο αριθμός των πενταγώνων}, \qquad h = \text{ο αριθμός των εξαγώνων},$$

και

$$f = p + h$$

ο συνολικός αριθμός των μικρότερων πολυγώνων.

Επίσης, γράφουμε V για το πλήθος των κορυφών, E για το πλήθος των ακμών και B για το πλήθος των κορυφών του εξωτερικού ορίου του διαμερισμού.

1. Κάθε κορυφή έχει βαθμό τουλάχιστον 3.

Πράγματι:

- κάθε εσωτερική κορυφή του διαμερισμού έχει βαθμό τουλάχιστον 3, γιατί γύρω της συναντώνται τουλάχιστον τρεις πλευρές, - κάθε κορυφή πάνω στην πλευρά του επταγώνου που δεν είναι αρχική κορυφή του επταγώνου έχει επίσης βαθμό τουλάχιστον 3, αφού από εκεί ξεκινά τουλάχιστον μία εσωτερική ακμή, - κάθε αρχική κορυφή του επταγώνου, από την υπόθεση, ανήκει σε τουλάχιστον δύο μικρότερα πολύγωνα, άρα και αυτή έχει βαθμό τουλάχιστον 3.

Άρα
$$\sum_{v\in V(G)} d(v) \geq 3V.$$
Με το λήμμα χειραψίας παίρνουμε
$$2E \geq 3V.$$

2. Χρήση του τύπου του Euler.

Το γράφημα έχει f εσωτερικές έδρες και μία εξωτερική, άρα συνολικά $f+1$ έδρες. Από τον τύπο του Euler:
$$V - E + (f+1) = 2,$$
οπότε
$$V - E + f = 1.$$
Άρα
$$V = E - f + 1.$$
Αντικαθιστούμε στην ανισότητα $2E \geq 3V$:
$$2E \geq 3(E - f + 1) = 3E - 3f + 3.$$
Επομένως
$$E \leq 3f - 3.$$

3. Μέτρημα πλευρών των εσωτερικών εδρών.

Το άθροισμα των πλευρών όλων των μικρότερων πολυγώνων είναι
$$5p + 6h.$$
Αν χωρίσουμε τις ακμές σε εσωτερικές και συνοριακές, τότε κάθε εσωτερική ακμή μετριέται δύο φορές, ενώ κάθε ακμή του εξωτερικού ορίου μία φορά. Άρα
$$5p + 6h = 2(E - B) + B = 2E - B.$$
Επειδή το εξωτερικό όριο περιέχει τουλάχιστον τις 7 κορυφές του αρχικού επταγώνου, έχουμε
$$B \geq 7.$$
Άρα, χρησιμοποιώντας και το $E \leq 3f - 3$, παίρνουμε
$$5p + 6h = 2E - B \leq 2(3f - 3) - 7 = 6f - 13.$$
Επειδή $f = p + h$, αυτό δίνει
$$5p + 6h \leq 6p + 6h - 13,$$
οπότε
$$p \geq 13.$$
Άρα
$$f = p + h \geq p \geq 13.$$
Συνεπώς ο αριθμός των πολυγώνων του διαμερισμού είναι τουλάχιστον 13.

10 Θεωρούμε τον γράφο G του προβλήματος: οι κορυφές του είναι οι 50 επιστήμονες και δύο κορυφές ενώνονται με ακμή αν και μόνο αν οι αντίστοιχοι επιστήμονες γνωρίζονται.

Η υπόθεση λέει ότι κάθε κορυφή του G έχει βαθμό τουλάχιστον 25.

Θα δείξουμε ότι ο G περιέχει έναν κύκλο μήκους 4. Αυτό αρκεί, διότι τότε οι 4 κορυφές του κύκλου μπορούν να καθίσουν γύρω από το τραπέζι με τη σειρά που εμφανίζονται στον κύκλο, και κάθε μία θα έχει ως δύο γείτονές της δύο γνωστούς της.

Αν ο G είναι πλήρης, τότε οποιεσδήποτε 4 κορυφές κάνουν, αφού κάθε δύο κορυφές ενώνονται με ακμή.

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι ο G δεν είναι πλήρης. Τότε υπάρχουν δύο κορυφές u, v που δεν ενώνονται με ακμή, δηλαδή δύο επιστήμονες που δεν γνωρίζονται.

Επειδή $\deg(u) \geq 25$ και $\deg(v) \geq 25$, οι κορυφές u και v είναι γειτονικές συνολικά με τουλάχιστον

$$25 + 25 = 50$$

κορυφές, μετρώντας βέβαια διπλά τις κοινές γειτονικές κορυφές.

Όμως, αφού οι u, v δεν είναι γειτονικές, οι γείτονές τους βρίσκονται ανάμεσα στις υπόλοιπες 48 κορυφές του γράφου. Άρα, από την αρχή του περιστερώνα (ή ισοδύναμα από την αρχή εγκλεισμού–αποκλεισμού), οι u και v έχουν τουλάχιστον

$$25 + 25 - 48 = 2$$

κοινούς γείτονες.

Έστω x, y δύο διαφορετικοί κοινοί γείτονες των u και v. Τότε οι ακμές

$$ux,\ xv,\ vy,\ yu$$

ανήκουν όλες στον γράφο. Επομένως οι κορυφές

$$u, x, v, y$$

σχηματίζουν κύκλο μήκους 4.

Άρα υπάρχουν 4 επιστήμονες που μπορούν να καθίσουν γύρω από ένα στρογγυλό τραπέζι ώστε καθένας να έχει ως δύο γείτονές του δύο γνωστούς του.

11 Θεωρούμε ένα μονοπάτι μέγιστου μήκους

$$P = v_0 v_1 \cdots v_k$$

του γραφήματος G.

Επειδή το P είναι μέγιστο, κάθε γείτονας του άκρου v_0 ανήκει ήδη στο μονοπάτι P. Πράγματι, αν υπήρχε κορυφή $u \notin \{v_0, v_1, \dots, v_k\}$ με $uv_0 \in E(G)$, τότε το

$$uv_0 v_1 \cdots v_k$$

θα ήταν μονοπάτι μεγαλύτερου μήκους, άτοπο.

Άρα όλοι οι γείτονες του v_0 είναι κορυφές από το σύνολο

$$\{v_1, v_2, \dots, v_k\}.$$

Εφόσον $\deg(v_0) \geq 10$, η κορυφή v_0 έχει τουλάχιστον 10 διαφορετικούς γείτονες πάνω στο μονοπάτι P.

Έστω τώρα v_i ένας γείτονας του v_0 με μέγιστο δυνατό δείκτη i. Τότε αναγκαστικά

$$i \geq 10,$$

αφού υπάρχουν τουλάχιστον 10 διαφορετικοί γείτονες του v_0 ανάμεσα στις κορυφές $v_1, \dots, v_k$.

Τότε οι κορυφές

$$v_0, v_1, \dots, v_i$$

και η ακμή $v_i v_0$ σχηματίζουν κύκλο

$$v_0 v_1 \cdots v_i v_0.$$

Ο κύκλος αυτός έχει μήκος

$$i + 1 \geq 11.$$

Άρα το γράφημα G περιέχει κύκλο με τουλάχιστον 11 κορυφές.

12 Θεωρούμε ένα μονοπάτι μέγιστου μήκους

$$P = v_0 v_1 \cdots v_\ell$$

του γραφήματος G.

Αν $\ell = 21$, τότε το P έχει 22 κορυφές, άρα ακόμη περισσότερο περιέχει τουλάχιστον 21 κορυφές, και τελειώσαμε.

Έστω λοιπόν ότι

$$\ell \leq 20.$$

Επειδή το P είναι μέγιστο, κάθε γείτονας του v_0 και κάθε γείτονας του v_ℓ ανήκει ήδη στο P. Πράγματι, αν υπήρχε κορυφή $u \notin V(P)$ με $uv_0 \in E(G)$, τότε το

$$uv_0 v_1 \cdots v_\ell$$

θα ήταν μονοπάτι μεγαλύτερου μήκους, άτοπο. Ομοίως για το v_ℓ.

Ορίζουμε τώρα τα σύνολα

$$A = \{\, i \in \{1, 2, \ldots, \ell\} : v_0 v_i \in E(G) \,\}$$

και

$$B = \{\, i \in \{1, 2, \ldots, \ell\} : v_{i-1} v_\ell \in E(G) \,\}.$$

Από όσα είπαμε, όλοι οι γείτονες του v_0 και του v_ℓ βρίσκονται πάνω στο P, άρα

$$|A| = \deg(v_0) \geq 10, \qquad |B| = \deg(v_\ell) \geq 10.$$

Θα δείξουμε ότι τα A και B είναι ξένα.

Έστω προς άτοπο ότι υπάρχει $i \in A \cap B$. Τότε

$$v_0 v_i \in E(G) \qquad \text{και} \qquad v_{i-1} v_\ell \in E(G).$$

Άρα οι κορυφές του P σχηματίζουν τον κύκλο

$$v_0 v_1 \cdots v_{i-1} v_\ell v_{\ell-1} \cdots v_i v_0,$$

ο οποίος περνά από όλες τις κορυφές του P.

Επειδή $\ell \leq 20$, το μονοπάτι P έχει το πολύ 21 κορυφές. Εφόσον το G έχει 22 κορυφές, υπάρχει κορυφή

$$x \notin V(P).$$

Το γράφημα G είναι συνεκτικό, άρα υπάρχει μονοπάτι από το x προς κάποια κορυφή του κύκλου. Αν πάρουμε το πρώτο σημείο στο οποίο ένα τέτοιο μονοπάτι συναντά τον κύκλο, βρίσκουμε κορυφή $y \notin V(P)$ που είναι γειτονική με κάποια κορυφή $w \in V(P)$.

Αφαιρούμε τώρα από τον παραπάνω κύκλο μία από τις δύο ακμές του που είναι προσκείμενες στο w. Έτσι προκύπτει μονοπάτι που περνά από όλες τις κορυφές του P και έχει άκρο το w. Προσθέτοντας την ακμή wy, παίρνουμε μονοπάτι μεγαλύτερο από το P, άτοπο.

Άρα πράγματι

$$A \cap B = \emptyset.$$

Εφόσον $A, B \subseteq \{1, 2, \ldots, \ell\}$ και είναι ξένα, έχουμε

$$\ell \geq |A| + |B| \geq 10 + 10 = 20.$$

Άρα το μονοπάτι P έχει

$$\ell + 1 \geq 21$$

κορυφές.

Επομένως το γράφημα G περιέχει μονοπάτι με τουλάχιστον 21 κορυφές.

13 Θεωρούμε το γράφημα G που έχει κορυφές τα σημεία $A_1, A_2, \dots, A_n$, και ακμές τα δοσμένα ευθύγραμμα τμήματα. Τότε κάθε κορυφή του G έχει βαθμό τουλάχιστον 3.

Παίρνουμε ένα μονοπάτι μέγιστου μήκους

$$X_1 X_2 \cdots X_m$$

στο G, με όλες τις κορυφές του διαφορετικές.

Επειδή το μονοπάτι αυτό είναι μέγιστου μήκους, κάθε γείτονας του X_1 ανήκει ήδη στο μονοπάτι. Πράγματι, αν το X_1 ήταν ενωμένο με κάποια κορυφή $Y \notin \{X_1, X_2, \dots, X_m\}$, τότε το

$$Y X_1 X_2 \cdots X_m$$

θα ήταν μεγαλύτερο μονοπάτι, άτοπο.

Άρα όλοι οι γείτονες του X_1 είναι από τις κορυφές $X_2, \dots, X_m$. Εφόσον $\deg(X_1) \geq 3$, η κορυφή X_1 είναι ενωμένη με το X_2 και με τουλάχιστον δύο ακόμη κορυφές του μονοπατιού. Έστω λοιπόν ότι

$$X_1 X_k,\ X_1 X_\ell \in E(G) \qquad \text{με} \qquad 2 < k < \ell.$$

Από τους τρεις αριθμούς $2, k, \ell$, δύο έχουν την ίδια παρατικότητα. Έστω $p < q$ αυτοί οι δύο. Τότε $p, q \in \{2, k, \ell\}$, άρα η κορυφή X_1 είναι ενωμένη και με το X_p και με το X_q.

Επομένως οι κορυφές

$$X_1, X_p, X_{p+1}, \dots, X_q$$

σχηματίζουν κύκλο:

$$X_1 X_p X_{p+1} \cdots X_q X_1.$$

Το μήκος αυτού του κύκλου είναι

$$(q - p + 1) + 1 = q - p + 2.$$

Επειδή οι p και q έχουν την ίδια παρατικότητα, ο αριθμός $q - p$ είναι άρτιος, άρα και ο

$$q - p + 2$$

είναι άρτιος.

Άρα υπάρχει άρτιος κύκλος στο G, δηλαδή υπάρχουν $r \geq 2$ και διακεκριμένες κορυφές

$$X_1, X_2, \dots, X_{2r}$$

τέτοιες ώστε

$$X_1X_2,\ X_2X_3,\ \dots,\ X_{2r-1}X_{2r},\ X_{2r}X_1 \in E(G).$$

Θέτοντας $k = r$, παίρνουμε ακριβώς το ζητούμενο.

14 Θεωρούμε γράφο G με 1000 κορυφές, όπου οι κορυφές παριστάνουν τους κατοίκους του οικισμού και δύο κορυφές ενώνονται με ακμή αν και μόνο αν οι αντίστοιχοι κάτοικοι είναι φίλοι.

Η υπόθεση ότι κάθε είδηση τελικά γίνεται γνωστή σε όλους σημαίνει ακριβώς ότι ο γράφος G είναι συνεκτικός.

Αν αρχικά πούμε μια είδηση σε ένα σύνολο κορυφών S, τότε μετά από t ημέρες την ξέρει κάθε κορυφή που απέχει από το S το πολύ t. Άρα αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει σύνολο $S \subseteq V(G)$ με $|S| \leq 90$, τέτοιο ώστε κάθε κορυφή του G να απέχει από το S το πολύ 10.

Αρκεί να το αποδείξουμε για κάποιο συνδετικό δέντρο T του G, διότι οι αποστάσεις στο G είναι το πολύ ίσες με τις αποστάσεις στο T. Θα δείξουμε λοιπόν το εξής:

> Κάθε δέντρο με n κορυφές, όπου $n \geq 11$, έχει σύνολο κορυφών S με
>
> $$|S| \leq \frac{n}{11},$$
>
> τέτοιο ώστε κάθε κορυφή του δέντρου να απέχει από το S το πολύ 10.

Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή ως προς n. **Βάση.** Αν $11 \le n \le 21$, τότε ένα δέντρο με n κορυφές έχει διάμετρο το πολύ 20, άρα υπάρχει κορυφή c που απέχει από κάθε κορυφή το πολύ 10 (π.χ. μια κεντρική κορυφή ενός διαμέτρου). Τότε το σύνολο $S = \{c\}$ αρκεί, και πράγματι

$$|S| = 1 \le \frac{n}{11}.$$

Επαγωγικό βήμα. Έστω τώρα T δέντρο με $n > 21$ κορυφές, και υποθέτουμε ότι η πρόταση ισχύει για όλα τα δέντρα με λιγότερες από n κορυφές.

Διαλέγουμε μια κορυφή r και ριζώνουμε το δέντρο σε αυτήν. Έστω u ένα φύλλο μέγιστου δυνατού βάθους. Θεωρούμε την κορυφή x που βρίσκεται πάνω στο μοναδικό μονοπάτι από το u προς τη ρίζα, σε απόσταση ακριβώς 10 από το u.

Επειδή το u είναι φύλλο μέγιστου βάθους, το υποδέντρο T_x με ρίζα το x έχει ύψος ακριβώς 10. Άρα κάθε κορυφή του T_x απέχει από το x το πολύ 10. Επιπλέον, το T_x περιέχει τουλάχιστον τις 11 κορυφές του μονοπατιού από το x ως το u. Άρα

$$|V(T_x)| \ge 11.$$

Αφαιρούμε τώρα όλες τις κορυφές του T_x από το T. Ο γράφος που απομένει είναι πάλι δέντρο, ας τον πούμε T', και έχει

$$|V(T')| \le n - 11$$

κορυφές.

Από την επαγωγική υπόθεση, το T' έχει σύνολο κορυφών S' με

$$|S'| \le \frac{|V(T')|}{11} \le \frac{n-11}{11},$$

τέτοιο ώστε κάθε κορυφή του T' να απέχει από το S' το πολύ 10.

Θέτουμε τώρα

$$S = S' \cup \{x\}.$$

Τότε κάθε κορυφή του T_x απέχει από το x το πολύ 10, ενώ κάθε κορυφή του T' απέχει από το $S' \subseteq S$ το πολύ 10. Επομένως κάθε κορυφή του T απέχει από το S το πολύ 10.

Τέλος,

$$|S| = |S'| + 1 \le \frac{n-11}{11} + 1 = \frac{n}{11}.$$

Έτσι ολοκληρώνεται το επαγωγικό βήμα.

Εφαρμόζουμε τώρα το αποτέλεσμα στο συνδετικό δέντρο T του G, όπου $n = 1000$. Παίρνουμε σύνολο S με

$$|S| \le \frac{1000}{11} < 91.$$

Επειδή το $|S|$ είναι ακέραιος, συμπεραίνουμε ότι

$$|S| \le 90.$$

Άρα μπορούμε να διαλέξουμε 90 κατοίκους ώστε, αν τους πούμε ταυτόχρονα μια είδηση, αυτή να γίνει γνωστή σε όλους τους κατοίκους μέσα σε 10 ημέρες.

15 Θα χρησιμοποιήσουμε την κλασική κυκλική ιδέα του Pollak.

Βήμα 1: Κυκλική διάταξη με $n+1$ θέσεις. Τοποθετούμε τώρα $n+1$ θέσεις στάθμευσης πάνω σε κύκλο, αριθμημένες

$$1, 2, \dots, n+1,$$

και θεωρούμε n αυτοκίνητα. Κάθε αυτοκίνητο i διαλέγει μια προτίμηση $g(i) \in \{1, 2, \dots, n+1\}$. Τα αυτοκίνητα φθάνουν πάλι με τη σειρά $1, 2, \dots, n$, και το καθένα προχωρά κυκλικά μέχρι να βρει ελεύθερη θέση.

Επειδή υπάρχουν n αυτοκίνητα και $n+1$ θέσεις, στη κυκλική διαδικασία όλα τα αυτοκίνητα πάντοτε σταθμεύουν και στο τέλος μένει ακριβώς μία κενή θέση.

Άρα κάθε

$$(g(1), \dots, g(n)) \in [n+1]^n$$

παράγει μία καλά ορισμένη κενή θέση στο τέλος.

Βήμα 2: Κυκλικές μετατοπίσεις. Για $t \in \{0, 1, \dots, n\}$, ορίζουμε τη μετατόπιση

$$g_t(i) \equiv g(i) + t \pmod{n+1},$$

όπου τα υπόλοιπα τα παίρνουμε στο σύνολο $\{1, 2, \dots, n+1\}$.

Αν για την ακολουθία g η κενή θέση στο τέλος είναι η j, τότε για την ακολουθία g_t η κενή θέση είναι η

$$j + t \pmod{n+1}.$$

Πράγματι, η μετατόπιση όλων των προτιμήσεων κατά t απλώς περιστρέφει ολόκληρη τη διαδικασία κατά t θέσεις.

Άρα σε κάθε κλάση κυκλικών μετατοπίσεων

$$\{g_0, g_1, \cdots, g_n\}$$

υπάρχει ακριβώς μία ακολουθία για την οποία η κενή θέση είναι η $n+1$.

Βήμα 3: Σύνδεση με τις γραμμικές parking functions. Θα δείξουμε ότι οι ακολουθίες $g \in [n+1]^n$ που στην κυκλική διαδικασία αφήνουν κενή τη θέση $n+1$ είναι ακριβώς οι parking functions στο $[n]$.

Πρώτα, αν στην κυκλική διαδικασία η θέση $n+1$ μένει κενή, τότε κανένα αυτοκίνητο δεν μπορεί να έχει προτίμηση $n+1$. Πράγματι, αν κάποιο αυτοκίνητο πήγαινε πρώτα στη θέση $n+1$, τότε, εφόσον η θέση αυτή είναι κενή όταν φτάσει εκεί, θα σταθμεύσει αμέσως εκεί, άτοπο. Άρα αναγκαστικά

$$g(i) \in \{1, 2, \dots, n\} \qquad \text{για κάθε } i.$$

Επιπλέον, κανένα αυτοκίνητο δεν φτάνει ποτέ στη θέση $n+1$. Διότι αν κάποιο έφτανε εκεί, θα τη συναντούσε κενή και θα σταθμεύσει εκεί, πράγμα αδύνατο. Επομένως όλη η διαδικασία γίνεται αποκλειστικά στις θέσεις $1, 2, \dots, n$, ακριβώς όπως στη γραμμική εκδοχή του προβλήματος. Άρα η g είναι parking function στο $[n]$.

Αντίστροφα, έστω $f : [n] \to [n]$ parking function στη γραμμική εκδοχή. Αν την θεωρήσουμε και ως κυκλική ακολουθία προτιμήσεων στις $n+1$ θέσεις, τότε όλα τα αυτοκίνητα θα σταθμεύσουν στις θέσεις $1, \dots, n$, αφού ακριβώς αυτό συμβαίνει ήδη στη γραμμική διαδικασία. Άρα η θέση $n+1$ θα μείνει κενή.

Συνεπώς, σε κάθε κλάση κυκλικών μετατοπίσεων υπάρχουν ακριβώς μία parking function στο $[n]$.

Βήμα 4: Καταμέτρηση. Το πλήθος όλων των ακολουθιών $g \in [n+1]^n$ είναι

$$(n+1)^n.$$

Κάθε κλάση κυκλικών μετατοπίσεων έχει ακριβώς $n+1$ στοιχεία, άρα ο αριθμός των κλάσεων είναι

$$\frac{(n+1)^n}{n+1} = (n+1)^{n-1}.$$

Και, όπως δείξαμε, κάθε τέτοια κλάση αντιστοιχεί σε ακριβώς μία parking function στο $[n]$.

Άρα ο αριθμός των parking functions στο $[n]$ είναι

$$(n+1)^{n-1}.$$