Διακριτά Μαθηματικά
7ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Πρόβλημα 1 Δίνονται διαστήματα I_1, I_2, ... , I_m, υποσύνολα του $[0, 1]$, ώστε το άθροισμα των μηκών τους να είναι μεγαλύτερο από 10. Να αποδείξετε ότι σημείο του $[0, 1]$ που ανήκει σε τουλάχιστον 11 από τα διαστήματα.

Πρόβλημα 2 Μέσα σε τετράγωνο πλευράς a δίνονται κύκλοι, όλοι ολόκληροι μέσα στο τετράγωνο, έτσι ώστε το άθροισμα των περιμέτρων τους να είναι ίσο με $8a$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν άπειρες πολλές ευθείες που τέμνουν τουλάχιστον 3 από τους κύκλους.

Πρόβλημα 3 Έστω n και m δύο θετικοί ακέραιοι μεγαλύτεροι του 1, και έστω

$$m \geq 2 \log_2 n.$$

Τότε είναι δυνατό να χρωματίσουμε κάθε ακμή του $K_{n,n}$ με κόκκινο ή μπλε, έτσι ώστε να μη σχηματίζεται κανένα υπογράφημα $K_{m,m}$ με μονόχρωμες ακμές.

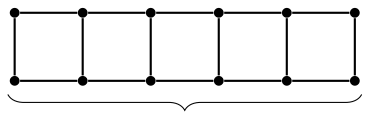
Πρόβλημα 4 Να αποδειχθεί ότι υπάρχει ένας χρωματισμός με 4 χρώματα του συνόλου

$$M = \{1, 2, \dots, 1987\}$$

με την ιδιότητα ότι καμία αριθμητική πρόοδος 10 όρων που περιέχεται στο M δεν είναι μονόχρωμη.

Πρόβλημα 5 Ένα τμήμα της του Λυκείου έχει 26 μαθητές, που κάθονται ανά δύο στα θρανία. Στο δεύτερο τετράμηνο έχουν αποφασίσει να αλλάξουν θέσεις ώστε κάθε δύο μαθητές που καθόταν μαζί στο πρώτο τετράμηνο, να μην κάθονται μαζί και στο δεύτερο. Να αποδείξετε ότι ανεξαρτήτως από το πώς κάθισαν οι μαθητές στα δύο τετράμηνα, υπάρχει στο τέλος της χρονιάς ένα σύνολο S από 13 μαθητές, στο οποίο δεν υπάρχουν δύο μαθητές οι οποίοι κάθισαν μαζί σε κάποιο από τα δύο τετράμηνα.

Πρόβλημα 6 Να βρεθεί το πλήθος των τελείων ταιριασμάτων του $2 \times n$ γραφήματος Manhattan.



$2 \times n$ γράφημα Manhattan

Πρόβλημα 7 Έστω $G = (X, Y)$ ένα διμερές γράφημα με την ιδιότητα ότι κάθε κορυφή του X έχει βαθμό τουλάχιστον τόσο μεγάλο όσο ο βαθμός οποιασδήποτε κορυφής του Y. Να αποδειχθεί ότι το X έχει τέλειο ταίριασμα μέσα στο Y.

Πρόβλημα 8 Είκοσι μαθητές έχουν λύσει είκοσι προβλήματα. Κάθε μαθητής έχει λύσει ακριβώς 2 προβλήματα και κάθε πρόβλημα έχει λυθεί από ακριβώς 2 μαθητές. Να αποδειχθεί ότι είναι δυνατό να ανατεθεί σε κάθε μαθητή να παρουσιάσει τη λύση ενός από τα προβλήματα που έχει λύσει, έτσι ώστε στο τέλος να έχουν παρουσιαστεί οι λύσεις όλων των προβλημάτων.

Πρόβλημα 9 Έστω $p_n(k)$ το πλήθος των μεταθέσεων του συνόλου $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ που έχουν ακριβώς k σταθερά σημεία. Να αποδειχθεί ότι

$$\sum_{k=0}^{n} k \, p_n(k) = n!.$$

Υπόδειξη. Θεώρησε ομοιόμορφα τυχαία μια μετάθεση του $\{1, 2, \dots, n\}$, και έστω X ο αριθμός των σταθερών σημείων της. Υπολόγισε την $\mathbb{E}[X]$ με δύο διαφορετικούς τρόπους.

Πρόβλημα 10 Ο Άγιος Βασίλης έχει τουλάχιστον n δώρα για n παιδιά. Για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, το i-οστό παιδί θεωρεί επιθυμητά ακριβώς $x_i > 0$ από αυτά τα δώρα. Υποθέτουμε ότι

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} \leq 1.$$

Να αποδειχθεί ότι ο Άγιος Βασίλης μπορεί να δώσει σε κάθε παιδί ένα δώρο που να αρέσει σε αυτό το παιδί.

Υπόδειξη. Σχημάτισε ένα διμερές γράφημα με αριστερή πλευρά τα παιδιά και δεξιά πλευρά τα δώρα. Για ένα σύνολο S παιδιών, αν $N(S)$ είναι το σύνολο των δώρων που αρέσουν σε τουλάχιστον ένα από αυτά, σύγκρινε το $|S|$ με το $|N(S)|$ χρησιμοποιώντας την ανισότητα

$$\sum_{i \in S} \frac{1}{x_i} \leq 1.$$

Πρόβλημα 11 Έστω G ένα απλό γράφημα με σύνολο κορυφών $V(G)$, $|V(G)| = n$, και βαθμούς $d(v)$, $v \in V(G)$.

(i) Να αποδείξετε την ακόλουθη "συμπληρωματική" μορφή του θεωρήματος Caro–Wei:

$$\omega(G) \geq \sum_{v \in V(G)} \frac{1}{n - d(v)},$$

όπου $\omega(G)$ είναι το μέγεθος μέγιστης κλίκας του G. Κλίκα του G είναι ένα υπογράφημα G' όπου όλες οι κορυφές στο G' συνδέονται με όλες τις άλλες κορυφές του G'.

(ii) Σε μια συνάντηση παρευρίσκονται 2011 επιστήμονες. Γνωρίζουμε ότι κάθε επιστήμονας γνωρίζει τουλάχιστον 1509 από τους υπόλοιπους. Να αποδείξετε ότι μπορούν να βρεθούν 5 επιστήμονες τέτοιοι ώστε καθένας να γνωρίζει και τους άλλους 4.

Πρόβλημα 12 Ένα γράφημα λέγεται *χωρίς τρίγωνα* αν δεν έχει τρεις διαφορετικές κορυφές u, v, w τέτοιες ώστε οι uv, vw, wu να είναι όλες ακμές. Ένα *ανεξάρτητο σύνολο* μεγέθους t είναι ένα σύνολο κορυφών $v_1, \ldots, v_t$ τέτοιο ώστε καμία από τις $v_i v_j$, $i \neq j$, να μην είναι ακμή.

(i) Να αποδείξετε ότι κάθε γράφημα με n κορυφές που δεν έχει τρίγωνα περιέχει ένα ανεξάρτητο σύνολο μεγέθους τουλάχιστον $\frac{1}{2}\sqrt{n}$.

(ii) Να βελτιώσετε το αποτέλεσμα του πρώτου ερωτήματος, αποδεικνύοντας ότι για κάθε σταθερά $c < \sqrt{2}$ υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε κάθε γράφημα με n κορυφές χωρίς τρίγωνα, με $n \geq n_0$, έχει ανεξάρτητο σύνολο μεγέθους τουλάχιστον $c\sqrt{n}$.

Παραδίδετε 5 Προβλήματα έως 28–05–2026.