

Διακριτά Μαθηματικά
5^ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Πρόβλημα 1 Μπορούν να σχεδιαστούν στο επίπεδο 9 ευθύγραμμα τμήματα, έτσι ώστε καθένα από αυτά να τέμνει ακριβώς 3 από τα υπόλοιπα;

Πρόβλημα 2 Έστω G απλό γράφημα με 9 κορυφές. Υποθέτουμε ότι το άθροισμα των βαθμών όλων των κορυφών του G είναι τουλάχιστον 27. Να αποδείξετε ότι το G έχει κάποια κορυφή βαθμού τουλάχιστον 4.

Πρόβλημα 3 Έστω G απλό γράφημα με 10 κορυφές και 28 ακμές. Να αποδείξετε ότι:
(α) Υπάρχουν δύο κορυφές του G που το άθροισμα των βαθμών τους είναι τουλάχιστον 12.
(β) Με την βοήθεια του (α), να αποδείξετε ότι το G περιέχει κύκλο μήκους 4.

Πρόβλημα 4 (α) Ένα σύρμα έχει μήκος 120 cm. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί ολόκληρο, χωρίς να κοπεί, για να σχηματίσει τις ακμές ενός κύβου, καθεμία από τις οποίες έχει μήκος 10 cm;

(β) Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός τομών που πρέπει να κάνουμε στο σύρμα, ώστε να μπορούμε να σχηματίσουμε τον ζητούμενο κύβο;

Πρόβλημα 5 Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει απλό γράφημα με 5 κορυφές των οποίων οι βαθμοί είναι

$$4, 4, 4, 4, 2.$$

Πρόβλημα 6 Να αποδείξετε ότι υπάρχει γράφημα με $2n$ κορυφές του οποίου οι βαθμοί είναι

$$1, 1, 2, 2, \dots, n, n.$$

Πρόβλημα 7 Για κάθε ακέραιο $k \geq 1$, ορίζουμε τον γράφο Q_k , που λέγεται k -διάστατος κύβος ή k -κυβικός γράφος, ως εξής:

- οι κορυφές του Q_k είναι όλες οι δυαδικές ακολουθίες μήκους k , δηλαδή όλες οι ακολουθίες της μορφής

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k), \quad \varepsilon_i \in \{0, 1\},$$

- δύο κορυφές ενώνονται με ακμή αν και μόνο αν οι αντίστοιχες ακολουθίες διαφέρουν σε ακριβώς μία θέση.

Να βρεθούν, ως συναρτήσεις του k ,

- το πλήθος των κορυφών του Q_k ,
- το πλήθος των ακμών του Q_k .

Πρόβλημα 8 Ισχύει ότι δύο απλά γραφήματα είναι υποχρεωτικά ισόμορφα αν:

- και τα δύο έχουν 10 κορυφές και κάθε κορυφή έχει βαθμό 9;
- και τα δύο είναι συνεκτικά, χωρίς κύκλους, και έχουν 6 ακμές;

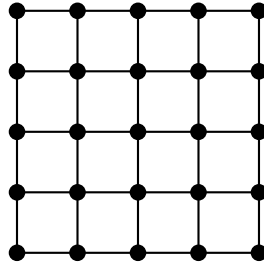
Πρόβλημα 9 Σε ένα συνεκτικό γράφημα οι βαθμοί τεσσάρων κορυφών είναι ίσοι με 3, ενώ οι βαθμοί όλων των άλλων κορυφών είναι ίσοι με 4. Να αποδείξετε ότι δεν μπορούμε να διαγράψουμε μία ακμή με τέτοιο τρόπο ώστε ο γράφος να διασπαστεί σε δύο ισόμορφες συνεκτικές συνιστώσες.

Πρόβλημα 10 Να αποδείξετε ότι ένας συνεκτικός γράφος του οποίου ο αριθμός των κορυφών υπερβαίνει τον αριθμό των ακμών κατά 1 είναι δέντρο.

Πρόβλημα 11 Ένα δίχτυ βόλεϊ έχει τη μορφή ορθογώνιου πλέγματος διαστάσεων 50×600 . Ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός μοναδιαίων νημάτων που μπορούμε να κόψουμε, ώστε το δίχτυ να μη διασπαστεί σε περισσότερα από ένα κομμάτια;

Πρόβλημα 12 Να αποδείξετε ότι σε κάθε πεπερασμένο συνεκτικό γράφο μπορούμε να διαγράψουμε μία κορυφή, μαζί με όλες τις ακμές που προσπίπτουν σε αυτήν, έτσι ώστε ο γράφος που απομένει να παραμείνει συνεκτικός.

Πρόβλημα 13 Είναι δυνατό να σχηματίσουμε το παρακάτω πλέγμα



(α) από 5 τεθλασμένες γραμμές μήκους 8 η καθεμία;

(β) από 8 τεθλασμένες γραμμές μήκους 5 η καθεμία;

(Το μήκος κάθε μοναδιαίου τμήματος του πλέγματος είναι 1.)

Παραδίδετε 6 Προβλήματα έως 31-03-2026.

1 Όχι.

Θεωρούμε γράφο του οποίου οι κορυφές είναι τα 9 ευθύγραμμα τμήματα, και δύο κορυφές ενώνονται με ακμή αν και μόνο αν τα αντίστοιχα τμήματα τέμνονται.

Η υπόθεση του προβλήματος λέει ότι κάθε κορυφή αυτού του γράφου έχει βαθμό 3. Άρα το άθροισμα των βαθμών όλων των κορυφών είναι

$$9 \cdot 3 = 27.$$

Αυτό είναι αδύνατο, επειδή σε κάθε γράφο το άθροισμα των βαθμών όλων των κορυφών είναι άρτιος αριθμός (ίσο με το διπλάσιο του αριθμού των ακμών).

Επομένως δεν μπορούν να υπάρξουν 9 ευθύγραμμα τμήματα, καθένα από τα οποία να τέμνει ακριβώς 3 από τα υπόλοιπα.

2 Το άθροισμα των βαθμών ενός γράφου είναι πάντοτε άρτιος αριθμός, αφού είναι ίσο με το διπλάσιο του αριθμού των ακμών. Άρα, αφού το άθροισμα των βαθμών είναι τουλάχιστον 27, στην πραγματικότητα είναι τουλάχιστον 28.

Υποθέτουμε, προς άτοπο, ότι κάθε κορυφή έχει βαθμό το πολύ 3. Τότε το άθροισμα των βαθμών όλων των 9 κορυφών είναι το πολύ

$$9 \cdot 3 = 27,$$

πράγμα που αντιφάσκει με το ότι το άθροισμα είναι τουλάχιστον 28.

Άρα υπάρχει τουλάχιστον μία κορυφή βαθμού τουλάχιστον 4.

3 Θα λύσουμε πρώτα το βοηθητικό ερώτημα.

Βοηθητικό ερώτημα. Υποθέτουμε ότι ο γράφος H δεν περιέχει κύκλο μήκους 4. Αν δύο διαφορετικές κορυφές x, y είχαν δύο διαφορετικούς κοινούς γείτονες u, v , τότε οι κορυφές

$$x, u, y, v$$

θα σχημάτιζαν κύκλο μήκους 4, αφού οι ακμές

$$xu, uy, yv, vx$$

θα ανήκαν όλες στον γράφο. Αυτό είναι άτοπο. Άρα κάθε δύο διαφορετικές κορυφές έχουν το πολύ έναν κοινό γείτονα.

Τώρα αποδεικνύουμε την άσκηση.

Υποθέτουμε, προς άτοπο, ότι ο G δεν περιέχει κύκλο μήκους 4. Τότε, από το βοηθητικό ερώτημα, κάθε δύο διαφορετικές κορυφές του έχουν το πολύ έναν κοινό γείτονα.

Για κάθε κορυφή v , ο αριθμός των ζευγών διαφορετικών γειτόνων της είναι

$$\binom{d(v)}{2}.$$

Αν αθροίσουμε αυτά τα πλήθη για όλες τις κορυφές v , μετράμε τα ζεύγη κορυφών που έχουν κοινό γείτονα. Επειδή κάθε ζεύγος διαφορετικών κορυφών έχει το πολύ έναν κοινό γείτονα, παίρνουμε

$$\sum_{v \in V(G)} \binom{d(v)}{2} \leq \binom{10}{2} = 45.$$

Από την άλλη πλευρά, επειδή ο G έχει 28 ακμές, από το θεώρημα χειραφίας το άθροισμα των βαθμών είναι

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2 \cdot 28 = 56.$$

Επιπλέον,

$$\sum_{v \in V(G)} \binom{d(v)}{2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{v \in V(G)} d(v)^2 - \sum_{v \in V(G)} d(v) \right).$$

Με την ανισότητα Cauchy–Schwarz έχουμε

$$\sum_{v \in V(G)} d(v)^2 \geq \frac{\left(\sum_{v \in V(G)} d(v)\right)^2}{10} = \frac{56^2}{10} = 313.6.$$

Άρα

$$\sum_{v \in V(G)} \binom{d(v)}{2} \geq \frac{313.6 - 56}{2} = 128.8.$$

Επειδή το αριστερό μέλος είναι ακέραιος αριθμός, παίρνουμε

$$\sum_{v \in V(G)} \binom{d(v)}{2} \geq 129.$$

Αυτό όμως αντιφάσκει με την προηγούμενη εκτίμηση

$$\sum_{v \in V(G)} \binom{d(v)}{2} \leq 45.$$

Η αντίφαση δείχνει ότι η υπόθεσή μας ήταν εσφαλμένη. Επομένως ο G περιέχει κύκλο μήκους 4.

4 Ο σκελετός του κύβου είναι γράφος με 8 κορυφές και 12 ακμές, και κάθε κορυφή του έχει βαθμό 3.

(α) Αν δεν κόψουμε καθόλου το σύρμα, τότε θα έπρεπε ένα και μόνο κομμάτι σύρματος να περάσει από όλες τις 12 ακμές του κύβου. Δηλαδή ο γράφος του κύβου θα έπρεπε να έχει περίπατο Euler.

Αυτό όμως είναι αδύνατο, διότι ο γράφος του κύβου έχει 8 κορυφές περιττού βαθμού (όλες έχουν βαθμό 3), ενώ για να υπάρχει περίπατος Euler πρέπει να υπάρχουν ακριβώς 0 ή 2 κορυφές περιττού βαθμού.

Άρα δεν μπορούμε να σχηματίσουμε τον κύβο με το σύρμα σε ένα μόνο κομμάτι.

(β) Αν κάνουμε k τομές, τότε το σύρμα χωρίζεται σε $k + 1$ κομμάτια. Κάθε κομμάτι αντιστοιχεί σε έναν περίπατο στον γράφο του κύβου. Ένας τέτοιος περίπατος μπορεί να έχει το πολύ 2 κορυφές περιττού βαθμού, δηλαδή τα άκρα του.

Εφόσον ο γράφος του κύβου έχει 8 κορυφές περιττού βαθμού, χρειαζόμαστε τουλάχιστον

$$\frac{8}{2} = 4$$

κομμάτια σύρματος. Άρα πρέπει να γίνουν τουλάχιστον 3 τομές.

Μένει να δείξουμε ότι 3 τομές πράγματι αρκούν.

Ονομάζουμε τις κορυφές της κάτω βάσης του κύβου A, B, C, D κυκλικά και της πάνω βάσης A', B', C', D' , έτσι ώστε οι κατακόρυφες ακμές να είναι AA', BB', CC', DD' . Τότε οι 12 ακμές του κύβου μπορούν να χωριστούν στα εξής 4 μονοπάτια 3 ακμών:

$$A - B - B' - C', \quad D - A - A' - B', \quad B - C - C' - D', \quad C - D - D' - A'.$$

Τα τέσσερα αυτά μονοπάτια είναι ξένα ως προς τις ακμές και μαζί καλύπτουν όλες τις ακμές του κύβου.

Άρα, αν κόψουμε το σύρμα σε 4 κομμάτια μήκους 30 cm, μπορούμε να σχηματίσουμε τις ακμές του κύβου.

Συνεπώς ο ελάχιστος αριθμός τομών είναι 3.

5 Υποθέτουμε ότι υπάρχει τέτοιος γράφος G .

Ας είναι v η κορυφή βαθμού 2. Οι άλλες τέσσερις κορυφές έχουν όλες βαθμό 4. Επειδή ο γράφος έχει συνολικά 5 κορυφές, κάθε κορυφή βαθμού 4 πρέπει να είναι γειτονική με όλες τις υπόλοιπες 4 κορυφές του γράφου. Άρα καθεμία από τις τέσσερις αυτές κορυφές είναι γειτονική και με την v .

Επομένως η v είναι γειτονική με 4 κορυφές, δηλαδή

$$\deg(v) = 4,$$

πράγμα που αντιφάσκει με την υπόθεση ότι $\deg(v) = 2$.

Άρα τέτοιος γράφος δεν υπάρχει.

6 Θα κατασκευάσουμε ρητά έναν τέτοιο γράφο.

Θεωρούμε δύο σύνολα κορυφών

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}, \quad B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\},$$

και γράφο G με σύνολο κορυφών $A \cup B$, όπου για κάθε $i = 1, \dots, n$ η κορυφή a_i συνδέεται με τις κορυφές

$$b_1, b_2, \dots, b_{n-i+1}.$$

Δηλαδή η a_i έχει βαθμό

$$\deg(a_i) = n - i + 1.$$

Άρα οι βαθμοί των κορυφών a_1, \dots, a_n είναι

$$n, n - 1, \dots, 2, 1.$$

Τώρα υπολογίζουμε τον βαθμό μιας κορυφής b_j . Η b_j συνδέεται με όλες τις a_i για τις οποίες

$$j \leq n - i + 1,$$

δηλαδή

$$i \leq n - j + 1.$$

Επομένως

$$\deg(b_j) = n - j + 1.$$

Άρα και οι βαθμοί των κορυφών b_1, \dots, b_n είναι

$$n, n - 1, \dots, 2, 1.$$

Συνεπώς το πολυσύνολο των βαθμών όλων των $2n$ κορυφών είναι ακριβώς

$$1, 1, 2, 2, \dots, n, n,$$

όπως θέλαμε.

7 Κάθε κορυφή του Q_k αντιστοιχεί σε μία δυαδική ακολουθία μήκους k . Σε κάθε μία από τις k θέσεις έχουμε δύο επιλογές, 0 ή 1. Επομένως το πλήθος των διαφορετικών δυαδικών ακολουθιών μήκους k είναι

$$2^k.$$

Άρα ο γράφος Q_k έχει

$$|V(Q_k)| = 2^k$$

κορυφές.

Τώρα υπολογίζουμε τον βαθμό κάθε κορυφής.

Έστω μια κορυφή

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k).$$

Για να βρούμε μια γειτονική της κορυφή, πρέπει να αλλάξουμε ακριβώς μία από τις k θέσεις: αν σε κάποια θέση έχουμε 0, τη μετατρέπουμε σε 1, και αν έχουμε 1, τη μετατρέπουμε σε 0.

Άρα για κάθε μία από τις k θέσεις υπάρχει ακριβώς μία γειτονική κορυφή που προκύπτει με αλλαγή αυτής της θέσης. Επομένως κάθε κορυφή του Q_k έχει βαθμό

$$k.$$

Άρα το άθροισμα των βαθμών όλων των κορυφών είναι

$$\sum_{v \in V(Q_k)} \deg(v) = k \cdot 2^k.$$

Από το θεώρημα χειραφίας, το άθροισμα των βαθμών ισούται με το διπλάσιο του αριθμού των ακμών:

$$\sum_{v \in V(Q_k)} \deg(v) = 2|E(Q_k)|.$$

Άρα

$$2|E(Q_k)| = k \cdot 2^k,$$

οπότε

$$|E(Q_k)| = k \cdot 2^{k-1}.$$

Συνεπώς:

$$\boxed{|V(Q_k)| = 2^k} \quad \text{και} \quad \boxed{|E(Q_k)| = k \cdot 2^{k-1}}.$$

8 (α) Ναι.

Αν ένας γράφος έχει 10 κορυφές και κάθε κορυφή έχει βαθμό 9, τότε κάθε κορυφή είναι γειτονική με όλες τις άλλες. Άρα ο γράφος είναι ο πλήρης γράφος K_{10} . Επομένως οποιοιδήποτε δύο τέτοιοι γράφοι είναι ισόμορφοι.

(β) Όχι.

Αφού οι γράφοι είναι συνεκτικοί και χωρίς κύκλους, είναι δέντρα. Ένα δέντρο με 6 ακμές έχει 7 κορυφές. Όμως δεν είναι όλα τα δέντρα με 7 κορυφές ισόμορφα. Για παράδειγμα:

- το μονοπάτι P_7 ,
- ο αστέρας $K_{1,6}$,

είναι και τα δύο συνεκτικά, χωρίς κύκλους, και έχουν 6 ακμές, αλλά δεν είναι ισόμορφα, αφού οι ακολουθίες βαθμών τους είναι διαφορετικές:

$$P_7 : 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, \quad K_{1,6} : 1, 1, 1, 1, 1, 1, 6.$$

Άρα η απάντηση είναι αρνητική.

9 Υποθέτουμε, προς άτοπο, ότι μπορούμε να διαγράψουμε μία ακμή και να πάρουμε δύο ισόμορφες συνεκτικές συνιστώσες H_1 και H_2 .

Επειδή οι H_1 και H_2 είναι ισόμορφες, έχουν τον ίδιο αριθμό κορυφών. Έστω ότι καθεμία έχει v κορυφές και e ακμές. Τότε ο αρχικός γράφος G έχει

$$2v \text{ κορυφές}$$

και, αφού προκύπτει από τις δύο συνιστώσες προσθέτοντας πίσω τη διαγραμμένη ακμή, έχει

$$2e + 1 \text{ ακμές.}$$

Από την άλλη, ο G έχει ακριβώς 4 κορυφές βαθμού 3, ενώ οι υπόλοιπες $2v - 4$ κορυφές έχουν βαθμό 4. Άρα, από το άθροισμα των βαθμών,

$$2|E(G)| = 4 \cdot 3 + (2v - 4) \cdot 4 = 12 + 8v - 16 = 8v - 4.$$

Επομένως

$$|E(G)| = 4v - 2.$$

Άρα ο αριθμός των ακμών του G είναι άρτιος. Όμως ήδη είδαμε ότι

$$|E(G)| = 2e + 1,$$

που είναι περιττός αριθμός. Αυτό είναι άτοπο.

Επομένως δεν είναι δυνατόν, διαγράφοντας μία ακμή, να διασπαστεί ο γράφος σε δύο ισόμορφες συνεκτικές συνιστώσες.

10 Έστω G συνεκτικός γράφος με

$$|V(G)| = |E(G)| + 1.$$

Θα δείξουμε ότι ο G δεν έχει κύκλους.

Υποθέτουμε, προς άτοπο, ότι ο G περιέχει έναν κύκλο. Τότε μπορούμε να διαγράψουμε μία ακμή αυτού του κύκλου χωρίς να χαθεί η συνεκτικότητα του γράφου. Πράγματι, τα άκρα της διαγραμμένης ακμής εξακολουθούν να ενώνονται μέσω του υπόλοιπου τμήματος του κύκλου.

Αν επαναλάβουμε αυτή τη διαδικασία όσες φορές χρειάζεται, θα καταλήξουμε σε έναν συνεκτικό γράφο H χωρίς κύκλους, δηλαδή σε ένα δέντρο. Ο H έχει το ίδιο πλήθος κορυφών με τον G , αλλά λιγότερες ακμές. Αφού ο H είναι δέντρο, ισχύει

$$|E(H)| = |V(H)| - 1 = |V(G)| - 1.$$

Όμως

$$|V(G)| - 1 = |E(G)|.$$

Άρα

$$|E(H)| = |E(G)|.$$

Αυτό είναι αδύνατο, επειδή ο H προέκυψε από τον G αφού διαγράψαμε τουλάχιστον μία ακμή. Η αντίφαση δείχνει ότι ο G δεν έχει κύκλους.

Επομένως ο G είναι συνεκτικός και χωρίς κύκλους, άρα είναι δέντρο.

11 Θεωρούμε το δίχτυ ως γράφο: οι κόμβοι του πλέγματος είναι οι κορυφές και τα μοναδιαία νήματα είναι οι ακμές.

Ο στόχος είναι να αφαιρέσουμε όσο το δυνατόν περισσότερες ακμές, διατηρώντας τον γράφο συνεκτικό. Στο τελικό στάδιο, όταν δεν μπορούμε να αφαιρέσουμε άλλη ακμή χωρίς να καταστραφεί η συνεκτικότητα, ο γράφος πρέπει να είναι δέντρο. Πράγματι, αν είχε κύκλο, θα μπορούσαμε να αφαιρέσουμε μία ακμή του κύκλου και ο γράφος θα παρέμενε συνεκτικός.

Άρα ο μέγιστος αριθμός ακμών που μπορούμε να αφαιρέσουμε είναι:

$$(\text{αρχικός αριθμός ακμών}) - (\text{αριθμός ακμών ενός δέντρου με τις ίδιες κορυφές}).$$

Αριθμός κορυφών. Το πλέγμα 50×600 έχει

$$(50 + 1)(600 + 1) = 51 \cdot 601 = 30651$$

κορυφές.

Άρα ένα δέντρο με αυτές τις κορυφές έχει

$$30651 - 1 = 30650$$

ακμές.

Αρχικός αριθμός ακμών. Οι οριζόντιες ακμές είναι

$$51 \cdot 600 = 30600,$$

ενώ οι κατακόρυφες είναι

$$601 \cdot 50 = 30050.$$

Συνεπώς ο αρχικός αριθμός ακμών είναι

$$30600 + 30050 = 60650.$$

Άρα μπορούμε να αφαιρέσουμε το πολύ

$$60650 - 30650 = 30000$$

ακμές.

Το άνω αυτό φράγμα επιτυγχάνεται, αφού μπορούμε να κρατήσουμε οποιοδήποτε συνδεδεμένο δέντρο του πλέγματος. Επομένως ο μέγιστος αριθμός νημάτων που μπορούν να κοπούν είναι

$$\boxed{30000}.$$

12 Έστω G ένας πεπερασμένος συνεκτικός γράφος. Θεωρούμε ένα συνδετικό δέντρο T του G , δηλαδή έναν συνεκτικό υπογράφο του G που είναι δέντρο και περιέχει όλες τις κορυφές του G .

Επειδή το T είναι πεπερασμένο δέντρο με τουλάχιστον μία κορυφή, αν έχει τουλάχιστον δύο κορυφές, έχει τουλάχιστον δύο κορυφές βαθμού 1. Έστω v μία τέτοια κορυφή του T .

Αν διαγράψουμε την κορυφή v από το T , μαζί με τη μοναδική ακμή που προσπίπτει σε αυτήν, ο γράφος που απομένει είναι πάλι συνεκτικός. Πράγματι, το $T - v$ είναι δέντρο (ή η μοναδική κορυφή, αν αρχικά το T είχε μόνο μία κορυφή).

Τώρα παρατηρούμε ότι $T - v$ είναι υπογράφος του $G - v$. Εφόσον ο $T - v$ είναι συνεκτικός, και ο $G - v$ είναι συνεκτικός.

Άρα υπάρχει κορυφή v του G τέτοια ώστε, αν τη διαγράψουμε μαζί με όλες τις ακμές που προσπίπτουν σε αυτήν, ο γράφος που απομένει να παραμένει συνεκτικός.

13 Θεωρούμε το πλέγμα ως γράφο.

Έχει 25 κορυφές και 40 ακμές. Οι τέσσερις γωνιακές κορυφές έχουν βαθμό 2, οι 12 κορυφές του συνόρου που δεν είναι γωνίες έχουν βαθμό 3, και οι 9 εσωτερικές κορυφές έχουν βαθμό 4. Άρα ο γράφος έχει ακριβώς 12 κορυφές περιττού βαθμού.

(α) Κάθε τεθλασμένη γραμμή αντιστοιχεί σε έναν περίπατο χωρίς επανάληψη ακμών, άρα έχει το πολύ 2 άκρα. Επομένως 5 τέτοιες γραμμές μπορούν να «καλύψουν» το πολύ 10 κορυφές περιττού βαθμού.

Όμως ο γράφος μας έχει 12 κορυφές περιττού βαθμού. Άρα δεν είναι δυνατό να σχηματιστεί από 5 τεθλασμένες γραμμές.

(β) Εδώ η απάντηση είναι θετική. Θα δώσουμε ρητή κατασκευή.

Αν συμβολίσουμε τις κορυφές του πλέγματος με συντεταγμένες (i, j) , όπου

$$0 \leq i, j \leq 4,$$

τότε οι 8 παρακάτω τεθλασμένες γραμμές έχουν μήκος 5 η καθεμία:

$$\begin{aligned} &(0, 0) - (1, 0) - (2, 0) - (3, 0) - (4, 0) - (4, 1), \\ &(0, 0) - (0, 1) - (1, 1) - (2, 1) - (3, 1) - (3, 0), \\ &(0, 2) - (0, 3) - (1, 3) - (1, 2) - (1, 1) - (1, 0), \\ &(0, 1) - (0, 2) - (1, 2) - (2, 2) - (2, 1) - (2, 0), \\ &(0, 3) - (0, 4) - (1, 4) - (1, 3) - (2, 3) - (2, 2), \\ &(2, 2) - (3, 2) - (3, 1) - (4, 1) - (4, 2) - (4, 3), \\ &(1, 4) - (2, 4) - (3, 4) - (3, 3) - (3, 2) - (4, 2), \\ &(2, 4) - (2, 3) - (3, 3) - (4, 3) - (4, 4) - (3, 4). \end{aligned}$$

Καθεμία από αυτές έχει ακριβώς 5 μοναδιαία τμήματα, και μια άμεση επαλήθευση δείχνει ότι μαζί καλύπτουν όλες τις 40 ακμές του πλέγματος, χωρίς επικάλυψη.

Άρα το πλέγμα μπορεί να σχηματιστεί από 8 τεθλασμένες γραμμές μήκους 5 η καθεμία.

Συμπερασματικά:

(α) Όχι, (β) Ναι.