Διακριτά Μαθηματικά
4ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Πρόβλημα 1 Να βρεθεί η ακολουθία $(a_k)_{k\geq 0}$ με $a_0 = 0$ και $a_{k+1} = a_k + 2^k$ για κάθε $k \geq 0$.

Πρόβλημα 2 Δίνεται η ακολουθία $(a_n)_{n\geq 0}$ με $a_0 = 1$ και

$$a_{n+1} = 2a_n + n \quad \text{για κάθε } n \geq 0.$$

(α) Δείξτε ότι

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n = \frac{1-2x+2x^2}{(1-x)^2(1-2x)}.$$

(β) Βρείτε έναν απλό τύπο για το a_n.

Πρόβλημα 3 Να βρεθεί το πλήθος των τρόπων να χωρίσουμε ένα εξάμηνο n ημερών σε τρία *διαδοχικά* μέρη, ώστε:

- στο πρώτο μέρος να επιλεγεί οποιοδήποτε πλήθος αργιών,
- στο δεύτερο μέρος να επιλεγεί περιττό πλήθος αργιών,
- στο τρίτο μέρος να επιλεγεί άρτιο πλήθος αργιών.

Πρόβλημα 4 Να βρεθεί μια απλή κλειστή μορφή για τη γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $a_n = n^2$, δηλαδή για $A(x) = \sum_{n\geq 0} n^2 x^n$.

Πρόβλημα 5 Σταθεροποιούμε έναν θετικό ακέραιο n. Να βρείτε το πλήθος λύσεων της εξίσωσης

$$x_0 + 2x_1 + \dots + 2^k x_k = n,$$

όπου ο $k \geq 0$ μεταβάλλεται και $x_i \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Πρόβλημα 6 Έστω $f(n)$ ο αριθμός υποσυνόλων του $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ με την ιδιότητα ότι η απόσταση (διαφορά) οποιωνδήποτε δύο διαφορετικών στοιχείων τους είναι τουλάχιστον 3. Βρείτε μια αναδρομική σχέση για την $f(n)$ και την γεννήτρια συνάρτηση $F(x) = \sum_{n\geq 0} f(n)x^n$.

Πρόβλημα 7 Έστω $n \in \mathbb{N}$. Υπολογίστε την γεννήτρια συνάρτηση του αθροίσματος

$$S_n := \sum a_1 a_2 \cdots a_k,$$

όπου το άθροισμα λαμβάνεται σε *όλες* τις συνθέσεις του n της μορφής

$$n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k, \qquad k \geq 1, \qquad a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{N}.$$

(Η σειρά των a_i μετράει, δηλαδή πρόκειται για διατεταγμένες k-άδες.)

Πρόβλημα 8 Έστω $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι: ο αριθμός των διαμερίσεων του n στις οποίες *κάθε μέρος εμφανίζεται τουλάχιστον δύο φορές* είναι ίσος με τον αριθμό των διαμερίσεων του n σε μέρη που είναι *διαιρετά με 2 ή με 3*.

Πρόβλημα 9 Θέτουμε για $n \in \mathbb{N}$

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{2n-k}{k}.$$

(1) Να αποδείξετε ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει η ταυτότητα (για $|x| < 1$):

$$\sum_{m\geq 0} \binom{2m+k}{k} x^{2m} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1-x)^{k+1}} + \frac{1}{(1+x)^{k+1}}\right).$$

(2) Να βρείτε έναν απλό κλειστό τύπο για το s_n, υπολογίζοντας την γεννήτρια συνάρτηση.

Πρόβλημα 10 Έστω a_n το πλήθος των ασθενών συνθέσεων (r_1, r_2, r_3) του n (δηλ. $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ και $r_1 + r_2 + r_3 = n$) για τις οποίες τα r_2 και r_3 είναι άρτιοι αριθμοί.

(α) Δείξτε ότι

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)^2}.$$

(β) Συναγάγετε έναν απλό τύπο για το a_n.

Πρόβλημα 11 Έχουμε δύο «πειραγμένα» ζάρια, τα οποία ρίχνονται ανεξάρτητα.

Στο πρώτο ζάρι, για κάθε $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ η ένδειξη i εμφανίζεται με πιθανότητα p_i, όπου $p_i \geq 0$ και $p_1 + p_2 + \cdots + p_6 = 1$.

Στο δεύτερο ζάρι, για κάθε $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ η ένδειξη i εμφανίζεται με πιθανότητα q_i, όπου $q_i \geq 0$ και $q_1 + q_2 + \cdots + q_6 = 1$.

Να αποδείξετε ότι αν το πείραμα είναι να ρίξουμε τα δύο ζάρια και να υπολογίσουμε το άθροισμα των ενδείξεων, *δεν είναι δυνατόν* να ισχύει τα ενδεχόμενα $2, 3, \ldots, 12$ να είναι ισοπίθανα.

Παραδίδετε 5 Προβλήματα έως 17–03–2026.

2 Θέτουμε τη γεννήτρια συνάρτηση
$$A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n.$$

(α) Πολλαπλασιάζουμε την αναδρομή $a_{n+1} = 2a_n + n$ με x^{n+1} και αθροίζουμε για $n \geq 0$:
$$\sum_{n\geq 0} a_{n+1}x^{n+1} = \sum_{n\geq 0} 2a_n x^{n+1} + \sum_{n\geq 0} nx^{n+1}.$$

Το αριστερό μέλος είναι
$$\sum_{n\geq 0} a_{n+1}x^{n+1} = \sum_{m\geq 1} a_m x^m = A(x) - a_0 = A(x) - 1.$$

Ο πρώτος όρος δεξιά είναι
$$\sum_{n\geq 0} 2a_n x^{n+1} = 2x \sum_{n\geq 0} a_n x^n = 2xA(x).$$

Για τον δεύτερο όρο χρησιμοποιούμε τη γνωστή ταυτότητα
$$\sum_{n\geq 0} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2} \quad (|x| < 1),$$

άρα
$$\sum_{n\geq 0} nx^{n+1} = x\sum_{n\geq 0} nx^n = \frac{x^2}{(1-x)^2}.$$

Επομένως
$$A(x) - 1 = 2xA(x) + \frac{x^2}{(1-x)^2}.$$

Λύνοντας ως προς $A(x)$ παίρνουμε
$$A(x) = \frac{1-2x+2x^2}{(1-x)^2(1-2x)},$$

όπως ζητείται.

(β) Κάνουμε ανάλυση σε απλά κλάσματα:
$$A(x) = \frac{1-2x+2x^2}{(1-x)^2(1-2x)} = \frac{C}{1-2x} + \frac{D}{1-x} + \frac{E}{(1-x)^2}.$$

Πολλαπλασιάζοντας με $(1-x)^2(1-2x)$ παίρνουμε
$$1 - 2x + 2x^2 = C(1-x)^2 + D(1-x)(1-2x) + E(1-2x).$$

Μηδενίζοντας τους συντελεστές για $x = 1, x = 1/2$ παίρνουμε $E = -1$, $C = 2$ και στην συνέχεια για $x = 0$ βρίσκουμε $D = 0$. Έτσι
$$A(x) = \frac{2}{1-2x} - \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Τώρα
$$\frac{1}{1-2x} = \sum_{n\geq 0}(2x)^n = \sum_{n\geq 0} 2^n x^n, \qquad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n\geq 0}(n+1)x^n.$$

Άρα
$$A(x) = \sum_{n\geq 0}(2\cdot 2^n - (n+1))x^n = \sum_{n\geq 0}(2^{n+1} - n - 1)x^n.$$

Συνεπώς
$$a_n = 2^{n+1} - n - 1 \quad \text{για κάθε } n \geq 0.$$

Έλεγχος: $a_0 = 2 - 0 - 1 = 1$ και $a_{n+1} - 2a_n = (2^{n+2} - (n+1) - 1) - 2(2^{n+1} - n - 1) = n$, σωστά.

3 Έστω ότι τα μήκη των τριών μερών είναι $a, b, c \geq 1$ με $a + b + c = n$.

- Στο πρώτο μέρος υπάρχουν 2^a επιλογές (οποιοδήποτε υποσύνολο).

- Στο δεύτερο μέρος, τα υποσύνολα περιττού πλήθους είναι 2^{b-1} (για $b \geq 1$).
- Στο τρίτο μέρος, τα υποσύνολα άρτιου πλήθους είναι 2^{c-1} (για $c \geq 1$).

Άρα, για σταθερό (a, b, c), οι τρόποι είναι

$$2^a \cdot 2^{b-1} \cdot 2^{c-1} = 2^{a+b+c-2} = 2^{n-2}.$$

Ο αριθμός διαμερίσεων του n σε $a + b + c$ με $a, b, c \geq 1$ είναι

$$\binom{n-1}{2}.$$

Επομένως, για $n \geq 3$ ο ζητούμενος αριθμός είναι

$$\binom{n-1}{2} 2^{n-2}.$$

(Για $n < 3$ δεν υπάρχει τέτοια διαμέριση σε τρία μη κενά μέρη.)

4 Ξεκινάμε από

$$\sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Παραγωγίζοντας και πολλαπλασιάζοντας με x,

$$\sum_{n\geq 0} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Επίσης,

$$\sum_{n\geq 0} n(n-1)x^n = x^2 \cdot \frac{d^2}{dx^2}\Big(\frac{1}{1-x}\Big) = \frac{2x^2}{(1-x)^3}.$$

Επειδή $n^2 = n(n-1) + n$, έχουμε

$$\sum_{n\geq 0} n^2 x^n = \sum_{n\geq 0} n(n-1)x^n + \sum_{n\geq 0} nx^n = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$

Άρα

$$A(x) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$

6 Για $n \geq 3$ διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Αν n δεν ανήκει στο υποσύνολο, τότε μετράμε $f(n-1)$ επιλογές (υποσύνολα του $[n-1]$).
- Αν n ανήκει στο υποσύνολο, τότε τα $n-1$ και $n-2$ δεν μπορούν να ανήκουν, οπότε το υπόλοιπο είναι ένα επιτρεπτό υποσύνολο του $[n-3]$: άρα $f(n-3)$ επιλογές.

Άρα

$$f(n) = f(n-1) + f(n-3) \qquad (n \geq 3).$$

Οι αρχικές τιμές είναι:

$$f(0) = 1, \qquad f(1) = 2, \qquad f(2) = 3.$$

Θέτουμε $F(x) = \sum_{n\geq 0} f(n)x^n$. Πολλαπλασιάζουμε την αναδρομή με x^n και αθροίζουμε για $n \geq 3$:

$$\sum_{n\geq 3} f(n)x^n = \sum_{n\geq 3} f(n-1)x^n + \sum_{n\geq 3} f(n-3)x^n.$$

Δηλαδή,

$$(F(x) - f(0) - f(1)x - f(2)x^2) = x(F(x) - f(0) - f(1)x) + x^3 F(x).$$

Με $f(0) = 1, f(1) = 2, f(2) = 3$ παίρνουμε

$$F(x) - 1 - 2x - 3x^2 = xF(x) - x - 2x^2 + x^3F(x),$$

οπότε

$$(1 - x - x^3)F(x) = 1 + x + x^2.$$

Άρα

$$F(x) = \frac{1 + x + x^2}{1 - x - x^3}.$$

7 Θεωρούμε την (απλή) γεννήτρια συνάρτηση

$$A(x) = \sum_{m \geq 1} mx^m = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Για μια σταθερή σύνθεση $n = a_1 + \cdots + a_k$, ο όρος $a_1 \cdots a_k$ αντιστοιχεί στο γινόμενο $(a_1x^{a_1}) \cdots (a_kx^{a_k})$, άρα το συνολικό βάρος όλων των συνθέσεων με *ακριβώς* k μέρη είναι

$$A(x)^k.$$

Επομένως, αν

$$F(x) := \sum_{n \geq 1} S_n x^n,$$

τότε

$$F(x) = \sum_{k \geq 1} A(x)^k = \frac{A(x)}{1 - A(x)} = \frac{\frac{x}{(1-x)^2}}{1 - \frac{x}{(1-x)^2}} = \frac{x}{(1-x)^2 - x} = \frac{x}{1 - 3x + x^2}.$$

Θέτουμε

$$\alpha = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \qquad \beta = \frac{3 - \sqrt{5}}{2},$$

ώστε $1 - 3x + x^2 = (1 - \alpha x)(1 - \beta x)$. Τότε

$$\frac{x}{1 - 3x + x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1 - \alpha x} - \frac{1}{1 - \beta x} \right),$$

άρα, αναπτύσσοντας σε γεωμετρικές σειρές,

$$F(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} \, x^n.$$

Συνεπώς

$$\boxed{S_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\tfrac{3+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\tfrac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)} \quad (n \geq 1).$$

(Ισοδύναμα, $S_1 = 1, S_2 = 3$ και $S_n = 3S_{n-1} - S_{n-2}$ για $n \geq 3$.)

8 Θα δουλέψουμε με γεννήτριες συναρτήσεις.

(A) Διαμερίσεις όπου κάθε μέρος εμφανίζεται 0 ή ≥ 2 φορές. Για κάθε $k \geq 1$, το μέρος k είτε δεν εμφανίζεται, είτε εμφανίζεται $2, 3, 4, \ldots$ φορές. Άρα ο αντίστοιχος παράγοντας είναι

$$1 + x^{2k} + x^{3k} + x^{4k} + \cdots = 1 + \frac{x^{2k}}{1 - x^k} = \frac{1 - x^k + x^{2k}}{1 - x^k}.$$

Επομένως η γεννήτρια συνάρτηση είναι

$$G(x) = \prod_{k \geq 1} \frac{1 - x^k + x^{2k}}{1 - x^k}.$$

Παρατηρούμε την ταυτότητα

$$(1 + x^k)(1 - x^k + x^{2k}) = 1 + x^{3k},$$

άρα $1 - x^k + x^{2k} = \dfrac{1 + x^{3k}}{1 + x^k}$. Τότε

$$G(x) = \prod_{k\geq 1} \frac{1 + x^{3k}}{(1 + x^k)(1 - x^k)} = \prod_{k\geq 1} \frac{1 + x^{3k}}{1 - x^{2k}}.$$

Επίσης $1 + x^{3k} = \dfrac{1 - x^{6k}}{1 - x^{3k}}$, οπότε

$$G(x) = \prod_{k\geq 1} \frac{1 - x^{6k}}{(1 - x^{2k})(1 - x^{3k})}.$$

(Β) Διαμερίσεις σε μέρη διαιρετά με 2 ή 3. Η γεννήτρια συνάρτηση για «μέρη πολλαπλάσια του 2» είναι $\prod_{k\geq 1} \frac{1}{1-x^{2k}}$, και για «μέρη πολλαπλάσια του 3» είναι $\prod_{k\geq 1} \frac{1}{1-x^{3k}}$. Αν τα πολλαπλασιάσουμε, τα μέρη πολλαπλάσια του 6 μετρώνται *διπλά*, άρα διορθώνουμε πολλαπλασιάζοντας με $\prod_{k\geq 1}(1 - x^{6k})$. Έτσι η γεννήτρια συνάρτηση των διαμερίσεων σε μέρη διαιρετά με 2 ή 3 είναι

$$H(x) = \left(\prod_{k\geq 1} \frac{1}{1 - x^{2k}}\right)\left(\prod_{k\geq 1} \frac{1}{1 - x^{3k}}\right)\left(\prod_{k\geq 1}(1 - x^{6k})\right) = \prod_{k\geq 1} \frac{1 - x^{6k}}{(1 - x^{2k})(1 - x^{3k})}.$$

Συγκρίνοντας, παίρνουμε $G(x) = H(x)$. Άρα οι συντελεστές του x^n στις δύο γεννήτριες συναρτήσεις είναι ίσοι για κάθε n, δηλαδή οι δύο ζητούμενοι αριθμοί διαμερίσεων είναι ίσοι.

10 (α) Για το $r_1 \geq 0$ η γεννήτρια συνάρτηση είναι

$$\sum_{r_1\geq 0} x^{r_1} = \frac{1}{1 - x}.$$

Για το r_2 άρτιο, γράφουμε $r_2 = 2u$ με $u \geq 0$, οπότε

$$\sum_{r_2 \text{ άρτιο}} x^{r_2} = \sum_{u\geq 0} x^{2u} = \frac{1}{1 - x^2},$$

και αντίστοιχα για το r_3 άρτιο έχουμε επίσης $1/(1-x^2)$. Επειδή οι επιλογές είναι ανεξάρτητες και ο εκθέτης αθροίζεται, η γεννήτρια συνάρτηση του πλήθους των τριάδων (r_1, r_2, r_3) είναι το γινόμενο:

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n = \frac{1}{1 - x} \cdot \frac{1}{1 - x^2} \cdot \frac{1}{1 - x^2} = \frac{1}{(1 - x)(1 - x^2)^2}.$$

(β) Θέτουμε $r_2 = 2u$, $r_3 = 2v$ με $u, v \geq 0$. Τότε

$$r_1 = n - 2(u + v) \geq 0 \quad\Longleftrightarrow\quad u + v \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Άρα a_n ισούται με το πλήθος των ζευγών $(u, v) \in \mathbb{Z}^2_{\geq 0}$ με $u + v \leq m$, όπου $m = \lfloor n/2 \rfloor$. Για κάθε $s = 0, 1, \dots, m$, υπάρχουν ακριβώς $s + 1$ ζεύγη (u, v) με $u + v = s$. Επομένως

$$a_n = \sum_{s=0}^{m}(s + 1) = \frac{(m + 1)(m + 2)}{2} = \binom{m + 2}{2}, \quad \text{όπου } m = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Ισοδύναμα, για $n = 2m$ ή $n = 2m + 1$ ισχύει

$$a_n = \frac{(m + 1)(m + 2)}{2}.$$

9 (1) Από το γενικευμένο διωνυμικό θεώρημα έχουμε (ως τυπικές σειρές)

$$\frac{1}{(1 - x)^{k+1}} = \sum_{r\geq 0} \binom{k + r}{k} x^r, \qquad \frac{1}{(1 + x)^{k+1}} = \sum_{r\geq 0} \binom{k + r}{k} (-x)^r.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη,

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}}+\frac{1}{(1+x)^{k+1}}=\sum_{r\ge 0}\binom{k+r}{k}(1+(-1)^r)x^r=2\sum_{m\ge 0}\binom{k+2m}{k}x^{2m}.$$

Διαιρώντας με 2, παίρνουμε ακριβώς

$$\sum_{m\ge 0}\binom{2m+k}{k}x^{2m}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1-x)^{k+1}}+\frac{1}{(1+x)^{k+1}}\right).$$

(2) Ορίζουμε τη γεννήτρια (με άρτιους εκθέτες)

$$S(x):=\sum_{n\ge 0}s_n\,x^{2n}.$$

Τότε

$$S(x)=\sum_{n\ge 0}\sum_{k=0}^{n}2^k\binom{2n-k}{k}x^{2n}=\sum_{k\ge 0}2^k\sum_{n\ge k}\binom{2n-k}{k}x^{2n}.$$

Θέτοντας $n=m+k$ στο εσωτερικό άθροισμα,

$$\sum_{n\ge k}\binom{2n-k}{k}x^{2n}=\sum_{m\ge 0}\binom{2(m+k)-k}{k}x^{2(m+k)}=x^{2k}\sum_{m\ge 0}\binom{2m+k}{k}x^{2m}.$$

Άρα, με χρήση του (1),

$$S(x)=\sum_{k\ge 0}2^kx^{2k}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1-x)^{k+1}}+\frac{1}{(1+x)^{k+1}}\right).$$

Γράφουμε αυτό ως άθροισμα δύο γεωμετρικών σειρών:

$$S(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-x}\sum_{k\ge 0}\left(\frac{2x^2}{1-x}\right)^k+\frac{1}{1+x}\sum_{k\ge 0}\left(\frac{2x^2}{1+x}\right)^k\right].$$

Επομένως

$$S(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-\frac{2x^2}{1-x}}+\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{1-\frac{2x^2}{1+x}}\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x-2x^2}+\frac{1}{1+x-2x^2}\right).$$

Απλοποιώντας,

$$S(x)=\frac{1-2x^2}{(1-x^2)(1-4x^2)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-x^2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1-4x^2}.$$

Τώρα

$$\frac{1}{1-x^2}=\sum_{n\ge 0}x^{2n},\qquad \frac{1}{1-4x^2}=\sum_{n\ge 0}4^nx^{2n},$$

άρα ο συντελεστής του x^{2n} στη $S(x)$ είναι

$$s_n=\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{2}{3}\cdot 4^n=\frac{2\cdot 4^n+1}{3}.$$

Δηλαδή

$$\boxed{s_n=\frac{2\cdot 4^n+1}{3}=\frac{2^{2n+1}+1}{3}}.$$

11 Θέτουμε $U=X-1$ και $V=Y-1$, οπότε $U,V\in\{0,1,2,3,4,5\}$ και

$$\mathbb{P}(U=i)=p_{i+1},\qquad \mathbb{P}(V=i)=q_{i+1}\qquad (i=0,1,\dots,5).$$

Η υπόθεση «όλα τα αθροίσματα $2,3,\dots,12$ έχουν την ίδια πιθανότητα» ισοδυναμεί με το ότι όλα τα αθροίσματα $U+V=0,1,\dots,10$ έχουν την ίδια πιθανότητα, δηλαδή

$$\mathbb{P}(U+V=k)=\frac{1}{11}\qquad (k=0,1,\dots,10),$$

αφού οι 11 αυτές πιθανότητες αθροίζουν σε 1.

Ορίζουμε τα πολυώνυμα

$$P(x) := \sum_{i=0}^{5} p_{i+1} x^i, \qquad Q(x) := \sum_{i=0}^{5} q_{i+1} x^i.$$

Τότε ο συντελεστής του x^k στο γινόμενο $P(x)Q(x)$ είναι ακριβώς $\mathbb{P}(U+V=k)$ (συνέλιξη κατανομών). Άρα η παραπάνω ισότητα σημαίνει ότι

$$P(x)Q(x) = \frac{1}{11}\,(1 + x + x^2 + \cdots + x^{10}). \qquad (*)$$

Έστω τώρα ζ μία μη τετριμμένη 11-οστή ρίζα της μονάδας, δηλαδή $\zeta^{11} = 1$ και $\zeta \neq 1$. Τότε

$$1 + \zeta + \zeta^2 + \cdots + \zeta^{10} = \frac{\zeta^{11} - 1}{\zeta - 1} = 0.$$

Βάζοντας $x = \zeta$ στην $(*)$ παίρνουμε

$$P(\zeta)Q(\zeta) = 0,$$

άρα ζ είναι ρίζα του P ή του Q.

Οι μη τετριμμένες 11-οστές ρίζες της μονάδας είναι ακριβώς 10 (όλες εκτός από το 1). Επειδή 11 είναι περιττός, καμία από αυτές δεν είναι πραγματική (οι μόνες πραγματικές ρίζες της μονάδας είναι ± 1, και το -1 δεν είναι 11-οστή ρίζα). Άρα έχουμε 10 *μη πραγματικές* ρίζες που πρέπει να μοιραστούν ως ρίζες του P ή/και του Q.

Όμως τα P, Q έχουν *πραγματικούς* συντελεστές και βαθμό 5. Για ένα πραγματικό πολυώνυμο βαθμού 5, οι μη πραγματικές ρίζες έρχονται σε συζυγή ζεύγη, άρα ο αριθμός των μη πραγματικών ριζών του (με διακριτότητα) είναι *ζυγός* και ≤ 5. Επομένως μπορεί να έχει το πολύ 4 μη πραγματικές ρίζες.

Συνεπώς, το P μπορεί να «καλύψει» το πολύ 4 από τις 10 μη πραγματικές 11-οστές ρίζες της μονάδας, και το Q επίσης το πολύ 4. Άρα συνολικά μπορούν να καλύψουν το πολύ 8 τέτοιες ρίζες, πράγμα αδύνατο αφού πρέπει να καλυφθούν και οι 10.

Άτοπο. Επομένως δεν υπάρχουν πιθανότητες (p_i), (q_i) που να κάνουν όλα τα αθροίσματα $2, 3, \ldots, 12$ ισοπίθανα.