Διακριτά Μαθηματικά
3$^{\text{ο}}$ Φυλλάδιο Ασκήσεων

Πρόβλημα 1 Έξι άτομα βρίσκονται σε ασανσέρ. Με πόσους τρόπους μπορούν να κατέβουν σε 4 ορόφους, αν σε κάθε όροφο πρέπει να κατέβει τουλάχιστον ένα άτομο;

Πρόβλημα 2 Πόσες ακέραιες λύσεις έχει το σύστημα

$$w + x + y + z = 11$$

με $0 \leq w, x, y, z \leq 4$;

Πρόβλημα 3 Σε ένα πίνακα 4×4 χωρισμένο σε 16 μικρά τετράγωνα 1×1 τοποθετούμε 4 λευκά και 4 μαύρα πιόνια, έτσι ώστε να ισχύουν τα ακόλουθα:
(α) Κάθε μικρό τετράγωνο περιέχει το πολύ ένα πιόνι.
(β) Κάθε γραμμή περιέχει 2 πιόνια, ένα λευκό και ένα μαύρο.
(γ) κάθε στήλη περιέχει 2 πιόνια, ένα λευκό και ένα μαύρο.
Να βρείτε πόσες διαφορετικές τοποθετήσεις υπάρχουν.

Πρόβλημα 4 (i) Να βρείτε κλειστό τύπο για τον αριθμό Stirling 2ου είδους $S(n, 3)$.

(ii) Να αποδείξετε ότι για κάθε $n \geq 3$ ισχύει $B(n) < n!$, όπου $B(n)$ είναι ο n-οστός αριθμός Bell (δηλαδή το πλήθος των διαμερίσεων του $[n]$ σε μη κενά υποσύνολα).

Πρόβλημα 5 Πόσες μεταθέσεις του $1, 2, \dots, 9$ υπάρχουν στις οποίες *ακριβώς* 5 αριθμοί βρίσκονται στην αρχική τους θέση (δηλαδή υπάρχουν ακριβώς 5 σταθερά σημεία);

Πρόβλημα 6 Να βρεθεί το πλήθος των τοποθετήσεων n (ίδιων) πύργων σε σκακιέρα $n \times n$, ώστε *τουλάχιστον ένας* από τους πύργους να *μην απειλείται*.

Πρόβλημα 7 Βρείτε το πλήθος των διατεταγμένων ακολουθιών μήκους $2n$ που αποτελούνται από δύο στοιχεία τύπου 1, δύο στοιχεία τύπου 2, ..., δύο στοιχεία τύπου n, έτσι ώστε να μην υπάρχουν δύο διαδοχικά στοιχεία του ίδιου τύπου.

Πρόβλημα 8 Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν n ζευγάρια (δηλαδή $2n$ διαφορετικά άτομα) σε $2n$ καρέκλες σε σειρά, ώστε κανένα ζευγάρι να μην κάθεται σε δύο γειτονικές καρέκλες;

Πρόβλημα 9 Έστω $q(n)$ ο αριθμός των διαμερίσεων του n στις οποίες κάθε μέρος είναι τουλάχιστον 2. Να αποδειχθεί ότι για κάθε ακέραιο $n \geq 2$ ισχύει

$$q(n) = p(n) - p(n-1),$$

όπου $p(n)$ είναι ο αριθμός των διαμερίσεων του n.

Πρόβλημα 10 Να αποδειχθεί ότι το πλήθος των διαμερίσεων του n σε *το πολύ* k μέρη είναι ίσο με το πλήθος των διαμερίσεων του $n + k$ σε *ακριβώς* k μέρη.

Πρόβλημα 11 Να αποδειχθεί ότι για κάθε θετικό ακέραιο n ισχύει

$$p(1) + p(2) + \cdots + p(n) \ < \ p(2n).$$

Παραδίδετε 7 Προβλήματα έως 10–03–2026.

1 Θεωρούμε τους 4 ορόφους διακριτούς και κάθε άτομο επιλέγει έναν όροφο για να κατέβει. Ζητάμε επί απεικονίσεις από ένα σύνολο 6 ατόμων σε ένα σύνολο 4 ορόφων.

Με εγκλεισμό–αποκλεισμό:

$$N = 4^6 - \binom{4}{1}3^6 + \binom{4}{2}2^6 - \binom{4}{3}1^6 = 4096 - 4 \cdot 729 + 6 \cdot 64 - 4 = 1560.$$

2 Αρχικά αγνοούμε το άνω φράγμα ≤ 4 και μετράμε τις μη αρνητικές λύσεις της $w + x + y + z = 11$. Με «αστέρια και μπάρες» είναι

$$\binom{11+4-1}{4-1} = \binom{14}{3} = 364.$$

Θα αφαιρέσουμε όσες λύσεις έχουν *τουλάχιστον μία* μεταβλητή ≥ 5, με συμπληρωματική καταμέτρηση και εγκλεισμό–αποκλεισμό.

Για κάθε μεταβλητή ορίζουμε το γεγονός

$$A_w = \{w \geq 5\}, \quad A_x = \{x \geq 5\}, \quad A_y = \{y \geq 5\}, \quad A_z = \{z \geq 5\}.$$

Αν π.χ. $w \geq 5$, γράφουμε $w' = w - 5 \geq 0$. Τότε

$$w' + x + y + z = 6,$$

άρα

$$|A_w| = \binom{6+4-1}{4-1} = \binom{9}{3}.$$

Ομοίως για κάθε μία από τις 4 μεταβλητές, οπότε

$$|A_w| + |A_x| + |A_y| + |A_z| = 4\binom{9}{3}.$$

Αν τώρα *δύο* μεταβλητές είναι ≥ 5, π.χ. $w \geq 5$ και $x \geq 5$, θέτουμε $w' = w - 5$, $x' = x - 5$. Τότε

$$w' + x' + y + z = 1,$$

οπότε

$$|A_w \cap A_x| = \binom{1+4-1}{4-1} = \binom{4}{3} = 4.$$

Υπάρχουν $\binom{4}{2} = 6$ επιλογές για το ζεύγος των «μεγάλων» μεταβλητών, άρα

$$\sum_{1 \leq i < j \leq 4} |A_i \cap A_j| = 6\binom{4}{3}.$$

Τομή τριών (ή τεσσάρων) από τα A_w, A_x, A_y, A_z είναι αδύνατη, γιατί τότε το άθροισμα θα ήταν $\geq 15 > 11$.

Άρα, με εγκλεισμό–αποκλεισμό,

$$\#\{\text{λύσεις με } 0 \leq w, x, y, z \leq 4\} = \binom{14}{3} - 4\binom{9}{3} + 6\binom{4}{3}.$$

Υπολογίζουμε:

$$\binom{14}{3} = 364, \qquad \binom{9}{3} = 84, \qquad \binom{4}{3} = 4,$$

οπότε

$$364 - 4 \cdot 84 + 6 \cdot 4 \ = \ 364 - 336 + 24 \ = \ 52.$$

Άρα υπάρχουν 52 λύσεις.

3

4 (i) Θυμίζουμε ότι $S(n,3)$ είναι το πλήθος των διαμερίσεων του $[n]$ σε *ακριβώς* 3 μη κενά blocks. Μετράμε πρώτα τις *επί* απεικονίσεις $f:[n]\to[3]$. Από εγκλεισμό–αποκλεισμό:

$$\#\{\text{επί } f:[n]\to[3]\} = 3^n - \binom{3}{1}2^n + \binom{3}{2}1^n = 3^n - 3\cdot 2^n + 3.$$

Κάθε επί απεικόνιση δίνει διαμέριση του $[n]$ στα 3 προ-εικόνες $f^{-1}(1), f^{-1}(2), f^{-1}(3)$, που είναι 3 μη κενά blocks *με ετικέτες* (επειδή τα $1,2,3$ είναι διακριτά). Αντιστρόφως, κάθε διαμέριση του $[n]$ σε 3 blocks μπορεί να «ετικετοποιηθεί» με 3! τρόπους (αντιστοιχίζουμε τα 3 blocks στα $1,2,3$). Άρα

$$3!\,S(n,3) = 3^n - 3\cdot 2^n + 3,$$

και επομένως

$$S(n,3) = \frac{3^n - 3\cdot 2^n + 3}{6} = \frac{3^n - 3\cdot 2^n + 3}{3!}.$$

(ii) Θα αποδείξουμε με ισχυρή επαγωγή ως προς n ότι για κάθε $n \geq 3$ ισχύει

$$B(n) < n!,$$

όπου $B(n)$ είναι ο n-οστός αριθμός Bell.

Θα χρησιμοποιήσουμε την αναγωγική σχέση

$$B(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} B(k) \qquad (n \geq 1).$$

Βάση. Για $n=3$ έχουμε

$$B(3) = 5 < 6 = 3!.$$

Επαγωγική υπόθεση. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \geq 4$ ισχύει

$$B(m) < m! \qquad \text{για κάθε } 3 \leq m \leq n-1.$$

Επαγωγικό βήμα. Από την αναγωγική σχέση παίρνουμε

$$B(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} B(k).$$

Για $k = 0,1,2$ γνωρίζουμε ότι

$$B(0) = 1 = 0!, \qquad B(1) = 1 = 1!, \qquad B(2) = 2 = 2!,$$

ενώ για $3 \leq k \leq n-1$, από την επαγωγική υπόθεση,

$$B(k) < k!.$$

Άρα για κάθε $0 \leq k \leq n-1$ ισχύει

$$B(k) \leq k!,$$

και επομένως

$$B(n) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} k!.$$

Τώρα

$$\binom{n-1}{k} k! = \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!},$$

άρα

$$B(n) \le \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!}.$$

Θέτοντας $j = n-1-k$, αυτό γίνεται

$$B(n) \le (n-1)! \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j!}.$$

Επειδή

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j!} < e < 3 \le n \qquad (\text{για } n \ge 3),$$

παίρνουμε

$$B(n) < (n-1)!\, n = n!.$$

Άρα η πρόταση ισχύει και για το n. Επομένως, με ισχυρή επαγωγή,

$$B(n) < n! \qquad \text{για κάθε } n \ge 3.$$

Δεύτερος Τρόπος. Θέτουμε $B(n)$ το πλήθος των διαμερίσεων του $[n]$ σε μη κενά blocks. Θα ορίσουμε μια 1–1 απεικόνιση από το σύνολο των διαμερίσεων του $[n]$ στο σύνολο των μεταθέσεων του $[n]$.

Δοθείσης μιας διαμέρισης $\mathcal{P} = \{A_1, \dots, A_k\}$ του $[n]$, γράφουμε μέσα σε κάθε block τα στοιχεία του σε *αύξουσα* σειρά. Έπειτα διατάσσουμε τα blocks κατά αύξουσα τιμή του $\min A_i$. Τέλος, συνενώνουμε τις (αύξουσες) λίστες των blocks από αριστερά προς τα δεξιά και παίρνουμε έτσι μια λέξη μήκους n που είναι μετάθεση του $[n]$. Ας την συμβολίσουμε $\pi(\mathcal{P}) \in S_n$.

Παράδειγμα 0.1 *Αν*

$$\mathcal{P} = \big\{\{2,5,8\},\{1,4\},\{3,7,9\},\{6\}\big\},$$

τότε, αφού ταξινομήσουμε τα blocks κατά αύξουσα τιμή του ελαχίστου τους, παίρνουμε

$$\{1,4\},\ \{2,5,8\},\ \{3,7,9\},\ \{6\}.$$

Επομένως

$$\pi(\mathcal{P}) = 142583796.$$

Ισχυριζόμαστε ότι π είναι 1–1 για $n \ge 3$, άρα $B(n) \le n!$. Πράγματι, από τη μετάθεση $\pi(\mathcal{P})$ μπορούμε να ανακτήσουμε μοναδικά τη διαμέριση $\mathcal{P}$: σπάμε τη λέξη σε blocks στα σημεία όπου εμφανίζεται ένα *νέο ελάχιστο* από τα στοιχεία που έχουν μείνει δεξιά. Ισοδύναμα, διαβάζοντας από αριστερά προς τα δεξιά, ξεκινάμε νέο block ακριβώς στα στοιχεία που είναι μικρότερα από όλα τα προηγούμενα ελάχιστα των blocks που έχουν απομείνει να ξεκινήσουν (η παραπάνω διαδικασία «τα blocks ταξινομούνται με βάση το ελάχιστο» ακριβώς αυτό κωδικοποιεί). Έτσι η ανάκτηση είναι μοναδική, άρα δεν υπάρχουν δύο διαφορετικές διαμερίσεις που να δίνουν την ίδια μετάθεση. Συνεπώς $B(n) \le n!$.

Τέλος, για $n \ge 3$ η ανισότητα είναι *αυστηρή*, γιατί δεν παράγονται όλες οι μεταθέσεις: π.χ. η μετάθεση $(2,1,3,4,\dots,n)$ δεν μπορεί να προκύψει από την παραπάνω κατασκευή. Πράγματι, στην κατασκευή μας το πρώτο στοιχείο της τελικής λέξης είναι πάντοτε το min του πρώτου block, άρα πρέπει να είναι $\min[n] = 1$ (εφόσον το πρώτο block έχει το μικρότερο ελάχιστο από όλα τα blocks). Άρα καμία εικόνα της π δεν ξεκινά με 2, άρα π δεν είναι επί. Επομένως

$$B(n) < n! \qquad (n \ge 3).$$

5 Επιλέγουμε πρώτα ποιες 5 θέσεις θα μείνουν σταθερές. Αυτό γίνεται με $\binom{9}{5}$ τρόπους. Στις υπόλοιπες 4 θέσεις πρέπει να μπουν οι υπόλοιποι 4 αριθμοί, αλλά *κανένας* να μη μείνει στη θέση του, δηλαδή χρειαζόμαστε μια αντιμετάθεση των 4 στοιχείων. Ο αριθμός των αντιμεταθέσεων των 4 στοιχείων είναι

$$4!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right) = 24\left(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24}\right) = 9.$$

Άρα το ζητούμενο πλήθος είναι

$$\binom{9}{5} \cdot 9 \ = \ 126 \cdot 9 \ = \ 1134.$$

6 Θα εφαρμόσουμε την αρχή εγκλεισμού–αποκλεισμού.

Για κάθε τετράγωνο (i,j), $1 \le i,j \le n$, θέτουμε A_{ij} το γεγονός: «το τετράγωνο (i,j) είναι κατειλημμένο από πύργο και αυτός ο πύργος δεν απειλείται». Ζητάμε λοιπόν το

$$\Big|\bigcup_{i,j} A_{ij}\Big|.$$

Βήμα 1: Τομές γεγονότων. Για να ισχύουν ταυτόχρονα $A_{i_1j_1},\dots,A_{i_kj_k}$, πρέπει οι k πύργοι να βρίσκονται σε *διαφορετικές* γραμμές και *διαφορετικές* στήλες (αλλιώς κάποιος από αυτούς θα είχε δίπλα του άλλον στην ίδια γραμμή/στήλη). Άρα τα ζεύγη (i_t,j_t) σχηματίζουν μια μερική αντιστοίχιση γραμμών–στηλών.

Πόσοι τρόποι υπάρχουν να διαλέξουμε k τέτοια τετράγωνα; Διαλέγουμε k γραμμές ($\binom{n}{k}$ τρόποι), k στήλες ($\binom{n}{k}$ τρόποι) και μια 1-1 αντιστοίχιση μεταξύ τους ($k!$ τρόποι). Άρα

$$\#\{\text{σύνολα } k \text{ τετραγώνων που μπορούν να είναι ταυτόχρονα “ασφαλή”}\} = \binom{n}{k}^2 k!.$$

Αν τα k αυτά τετράγωνα είναι ασφαλή, τότε *κανένας άλλος* πύργος δεν επιτρέπεται να μπει στις k αντίστοιχες γραμμές ή στήλες. Επομένως οι υπόλοιποι $n-k$ πύργοι πρέπει να τοποθετηθούν αυθαίρετα στα $(n-k)\times(n-k)$ εναπομείναντα τετράγωνα. Άρα, για κάθε τέτοια επιλογή k ασφαλών τετραγώνων, οι τρόποι για τους υπόλοιπους είναι

$$\binom{(n-k)^2}{n-k}.$$

Συνεπώς,

$$\sum_{1\le(i_1,j_1)<\cdots<(i_k,j_k)\le(n,n)} |A_{i_1j_1}\cap\cdots\cap A_{i_kj_k}| = \binom{n}{k}^2 k! \binom{(n-k)^2}{n-k}.$$

Βήμα 2: Εγκλεισμός–αποκλεισμός. Εφαρμόζοντας την αρχή εγκλεισμού–αποκλεισμού στο $\bigcup_{i,j} A_{ij}$, παίρνουμε

$$\Big|\bigcup_{i,j} A_{ij}\Big| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}^2 k! \binom{(n-k)^2}{n-k}.$$

Άρα το πλήθος των τοποθετήσεων n πύργων σε $n\times n$ σκακιέρα με *τουλάχιστον έναν μη απειλούμενο* πύργο είναι

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}^2 k! \binom{(n-k)^2}{n-k}}.$$

7 Θεωρούμε όλες τις μεταθέσεις του πολυσυνόλου $\{1,1,2,2,\dots,n,n\}$. Αρχικά, το πλήθος όλων των μεταθέσεων είναι

$$\frac{(2n)!}{(2!)^n} = \frac{(2n)!}{2^n}.$$

Για $i=1,\dots,n$ έστω M_i το σύνολο των μεταθέσεων όπου τα δύο i είναι διαδοχικά. Θέλουμε

$$a_n = \left|\overline{M_1\cup\cdots\cup M_n}\right| = \frac{(2n)!}{2^n} - |M_1\cup\cdots\cup M_n|.$$

Εφαρμόζουμε αρχή εγκλεισμού–αποκλεισμού. Για ένα σύνολο $J\subseteq\{1,\dots,n\}$ με $|J|=r$, στην τομή $\bigcap_{j\in J} M_j$ κάθε ζεύγος jj «κολλάει» και γίνεται ένα νέο (διαφορετικό) αντικείμενο. Άρα έχουμε συνολικά $2n-r$ αντικείμενα: r διαφορετικά «κολλημένα» και τα υπόλοιπα $n-r$ είδη εμφανίζονται από δύο φορές. Επομένως

$$\Big|\bigcap_{j\in J} M_j\Big| = \frac{(2n-r)!}{(2!)^{n-r}} = \frac{(2n-r)!}{2^{n-r}}.$$

Επειδή υπάρχουν $\binom{n}{r}$ επιλογές για το J, παίρνουμε

$$|M_1\cup\cdots\cup M_n| = \sum_{r=1}^{n}(-1)^{r+1}\binom{n}{r}\frac{(2n-r)!}{2^{n-r}}.$$

Άρα

$$a_n = \sum_{r=0}^{n}(-1)^{r}\binom{n}{r}\frac{(2n-r)!}{2^{n-r}}.$$

8 Χωρίς περιορισμό υπάρχουν $(2n)!$ καθίσματα. Για $i = 1, \ldots, n$ έστω A_i το ενδεχόμενο «το i-οστό ζευγάρι κάθεται μαζί (γειτονικά)». Θέλουμε το πλήθος των καθισμάτων όπου δεν συμβαίνει κανένα A_i.

Με αρχή εγκλεισμού–αποκλεισμού: αν επιβάλουμε ότι r συγκεκριμένα ζευγάρια είναι γειτονικά, τα θεωρούμε ως r blocks. Τότε έχουμε $2n - r$ αντικείμενα προς διάταξη (τα r blocks και τα υπόλοιπα $2n - 2r$ άτομα), άρα $(2n - r)!$ τρόπους, και για κάθε block υπάρχουν 2 εσωτερικές διατάξεις. Επομένως για κάθε επιλογή r ζευγαριών παίρνουμε $2^r(2n - r)!$ καθίσματα. Άρα το ζητούμενο είναι

$$\sum_{r=0}^{n}(-1)^r \binom{n}{r} 2^r\,(2n-r)!.$$

9 Θα δώσουμε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία. Έστω $\mathcal{P}(n)$ το σύνολο όλων των διαμερίσεων του n και $\mathcal{P}_{\geq 2}(n) \subseteq \mathcal{P}(n)$ εκείνων των διαμερίσεων του n που δεν περιέχουν 1 (δηλαδή όλα τα μέρη είναι ≥ 2). Τότε $|\mathcal{P}_{\geq 2}(n)| = q(n)$.

Χωρίζουμε τις διαμερίσεις του n σε δύο κλάσεις:

$$\mathcal{P}(n) = \mathcal{P}_{\geq 2}(n) \,\dot{\cup}\, \mathcal{P}_1(n),$$

όπου $\mathcal{P}_1(n)$ είναι οι διαμερίσεις του n που περιέχουν τουλάχιστον ένα 1.

Ορίζουμε απεικόνιση

$$\Phi : \mathcal{P}_1(n) \to \mathcal{P}(n-1)$$

ως εξής: από μια διαμέριση του n που περιέχει 1, αφαιρούμε *ένα* από τα 1. Το άθροισμα μειώνεται κατά 1, άρα προκύπτει διαμέριση του $n - 1$.

Αντίστροφα, από κάθε διαμέριση του $n - 1$ παίρνουμε μια διαμέριση του n που ανήκει στην $\mathcal{P}_1(n)$, προσθέτοντας ένα επιπλέον μέρος ίσο με 1. Αυτό δίνει την αντίστροφη της Φ, άρα η Φ είναι αμφιμονοσήμαντη και

$$|\mathcal{P}_1(n)| = |\mathcal{P}(n-1)| = p(n-1).$$

Τελικά,

$$p(n) = |\mathcal{P}(n)| = |\mathcal{P}_{\geq 2}(n)| + |\mathcal{P}_1(n)| = q(n) + p(n-1),$$

οπότε $q(n) = p(n) - p(n-1)$.

Δεύτερος Τρόπος. Θα χρησιμοποιήσουμε γεννήτριες συναρτήσεις.

Η γεννήτρια συνάρτηση του $p(n)$, του αριθμού διαμερίσεων του n, είναι

$$\sum_{n\geq 0} p(n)x^n = \prod_{m\geq 1}\frac{1}{1-x^m}.$$

Από την άλλη, η γεννήτρια συνάρτηση του $q(n)$, δηλαδή του αριθμού διαμερίσεων του n στις οποίες κάθε μέρος είναι τουλάχιστον 2, είναι

$$\sum_{n\geq 0} q(n)x^n = \prod_{m\geq 2}\frac{1}{1-x^m}.$$

Όμως

$$\prod_{m\geq 2}\frac{1}{1-x^m} = (1-x)\prod_{m\geq 1}\frac{1}{1-x^m}.$$

Άρα

$$\sum_{n\geq 0} q(n)x^n = (1-x)\sum_{n\geq 0} p(n)x^n.$$

Αναπτύσσοντας το δεξί μέλος, παίρνουμε

$$\sum_{n\geq 0} q(n)x^n = \sum_{n\geq 0} p(n)x^n - \sum_{n\geq 0} p(n)x^{n+1}.$$

Η δεύτερη σειρά γράφεται ως

$$\sum_{n\geq 0} p(n)x^{n+1} = \sum_{n\geq 1} p(n-1)x^n.$$

Άρα

$$\sum_{n\geq 0} q(n)x^n = p(0) + \sum_{n\geq 1}(p(n)-p(n-1))x^n.$$

Συγκρίνοντας τους συντελεστές του x^n, βρίσκουμε ότι για κάθε $n \geq 1$,

$$q(n) = p(n) - p(n-1).$$

Ειδικότερα, για κάθε ακέραιο $n \geq 2$,

$$q(n) = p(n) - p(n-1),$$

όπως θέλαμε.

10 Θα κατασκευάσουμε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία.

Έστω λ μια διαμέριση του n σε το πολύ k μέρη. Γράφουμε τη λ με μη αύξουσα σειρά και συμπληρώνουμε με μηδενικά ώστε να έχει ακριβώς k όρους:

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k), \qquad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k \geq 0, \qquad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = n.$$

Ορίζουμε

$$\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k), \qquad \mu_i = \lambda_i + 1.$$

Τότε $\mu_1 \geq \cdots \geq \mu_k \geq 1$, άρα η μ είναι διαμέριση του $n+k$ σε *ακριβώς* k θετικά μέρη, και

$$\sum_{i=1}^{k} \mu_i = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i + 1) = n + k.$$

Αντίστροφα, αν μ είναι διαμέριση του $n+k$ σε ακριβώς k μέρη, τότε όλα τα μέρη είναι ≥ 1 και αφαιρώντας 1 από κάθε μέρος παίρνουμε k-άδα $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ με $\lambda_i \geq 0$ και άθροισμα n, δηλαδή διαμέριση του n σε το πολύ k μέρη (τα μηδενικά αντιστοιχούν σε «έλλειψη» μέρους).

Άρα η αντιστοιχία $\lambda \leftrightarrow \mu$ είναι αμφιμονοσήμαντη και τα πλήθη είναι ίσα.

11 Θεωρούμε το σύνολο

$$\mathcal{A} = \bigsqcup_{m=1}^{n} \mathcal{P}(m),$$

όπου $\mathcal{P}(m)$ είναι το σύνολο όλων των διαμερίσεων του m. Τότε

$$|\mathcal{A}| = p(1) + p(2) + \cdots + p(n).$$

Θα κατασκευάσουμε μια 1-1

$$\Phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{P}(2n),$$

όπου $\mathcal{P}(2n)$ είναι το σύνολο όλων των διαμερίσεων του $2n$.

Έστω λοιπόν ότι $\lambda \in \mathcal{P}(m)$ για κάποιο $m \in \{1, 2, \dots, n\}$, και ας γράψουμε

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r), \qquad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r \geq 1, \qquad \lambda_1 + \cdots + \lambda_r = m.$$

Ορίζουμε

$$\Phi(\lambda) = (2n - m, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r),$$

δηλαδή παίρνουμε τη διαμέριση λ του m και προσθέτουμε ως νέο μέρος τον αριθμό $2n - m$. Το άθροισμα των μερών της νέας διαμέρισης είναι

$$(2n - m) + m = 2n,$$

άρα $\Phi(\lambda)$ είναι πράγματι μια διαμέριση του $2n$.

Παράδειγμα της αντιστοίχισης. Αν $n = 5$ και πάρουμε τη διαμέριση

$$\lambda = (2, 1) \in \mathcal{P}(3),$$

τότε $m = 3$ και

$$\Phi(\lambda) = (2 \cdot 5 - 3, 2, 1) = (7, 2, 1),$$

που είναι διαμέριση του 10.

Αν πάλι $n = 5$ και

$$\lambda = (3, 2) \in \mathcal{P}(5),$$

τότε

$$\Phi(\lambda) = (5, 3, 2),$$

ενώ για τη διαμέριση (5) παίρνουμε

$$\Phi((5)) = (5, 5).$$

Η Φ είναι 1-1. Θα δείξουμε ότι από την εικόνα $\Phi(\lambda)$ μπορούμε να ανακτήσουμε μοναδικά τη λ.

Περίπτωση 1: $m < n$. Τότε

$$2n - m > n.$$

Επειδή τα μέρη της λ αθροίζουν στο $m \leq n - 1$, καθένα από αυτά είναι το πολύ $m < n$. Άρα το νέο μέρος $2n - m$ είναι το μοναδικό μεγαλύτερο μέρος της $\Phi(\lambda)$. Επομένως, από τη $\Phi(\lambda)$, αρκεί να αφαιρέσουμε το μεγαλύτερο μέρος για να ανακτήσουμε τη λ.

Περίπτωση 2: $m = n$. Τότε

$$\Phi(\lambda) = (n, \lambda_1, \dots, \lambda_r).$$

Αν $\lambda \neq (n)$, τότε $\lambda_1 < n$, οπότε και πάλι το προστιθέμενο μέρος n είναι το μοναδικό μεγαλύτερο μέρος και η λ ανακτάται αφαιρώντας το. Αν $\lambda = (n)$, τότε

$$\Phi(\lambda) = (n, n),$$

οπότε αφαιρώντας ένα από τα δύο μέρη n ανακτούμε και πάλι τη λ.

Άρα η Φ είναι ένεση. Επομένως

$$p(1) + p(2) + \cdots + p(n) \leq p(2n).$$

Η ανισότητα είναι γνήσια. Κάθε διαμέριση που ανήκει στην εικόνα της Φ έχει κάποιο μέρος τουλάχιστον n, αφού το προστιθέμενο μέρος είναι ίσο με $2n - m \geq n$.

Όμως η διαμέριση

$$1 + 1 + \cdots + 1 \qquad (2n \text{ φορές})$$

του $2n$ δεν έχει κανένα μέρος τουλάχιστον n (για $n \geq 2$). Άρα δεν ανήκει στην εικόνα της Φ.

Επομένως η Φ δεν είναι επί, και έτσι

$$p(1) + p(2) + \cdots + p(n) \ < \ p(2n).$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.