Διακριτά Μαθηματικά
$6^{\text{ο}}$ Φυλλάδιο Ασκήσεων

Πρόβλημα 1 Έστω $n \geq 2$ ακέραιος και έστω

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$$

θετικοί ακέραιοι με

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 2n - 2.$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει δέντρο T με n κορυφές του οποίου η διατεταγμένη ακολουθία βαθμών είναι

$$a_1, a_2, \dots, a_n.$$

Πρόβλημα 2 Πόσα διαφορετικά επισημασμένα δέντρα υπάρχουν πάνω στο $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$, τα οποία δεν έχουν καμία κορυφή βαθμού μεγαλύτερου από 2;

Πρόβλημα 3 Πόσες το πολύ ακμές μπορεί να έχει ένα απλό γράφημα G με κορυφές το $[n]$, αν το G δεν είναι συνεκτικό;

Πρόβλημα 4 Να αποδείξετε ότι σε κάθε απλό επίπεδο γράφημα υπάρχει κορυφή βαθμού το πολύ 5.

Πρόβλημα 5 Κάθε ακμή του πλήρους γραφήματος K_{11} βάφεται είτε κόκκινη είτε μπλε. Θεωρούμε το γράφημα G_R που έχει όλες τις 11 κορυφές και μόνο τις κόκκινες ακμές, και το γράφημα G_B που έχει όλες τις 11 κορυφές και μόνο τις μπλε ακμές. Να αποδείξετε ότι τουλάχιστον ένα από τα δύο γραφήματα G_R, G_B δεν είναι επίπεδο.

Πρόβλημα 6 Να αποδείξετε ότι σε κάθε πολύεδρο υπάρχουν δύο κορυφές που ανήκουν σε ίσο πλήθος εδρών.

Πρόβλημα 7 Οι έδρες ενός κυρτού πολυέδρου είναι όλες τρίγωνα ή πεντάγωνα. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός των εδρών είναι άρτιος.

Πρόβλημα 8 Υπάρχουν τρία σπίτια H_1, H_2, H_3 και τρία πηγάδια P_1, P_2, P_3. Θέλουμε να ενώσουμε κάθε σπίτι με κάθε πηγάδι με έναν δρόμο, έτσι ώστε κανένας δύο δρόμοι να μην τέμνονται, εκτός ίσως στα κοινά άκρα τους.

Να αποδείξετε ότι αυτό είναι αδύνατο.

Πρόβλημα 9 Ένα επτάγωνο διαμερίζεται σε κυρτά πεντάγωνα και εξάγωνα, έτσι ώστε καθεμία από τις κορυφές του επταγώνου να ανήκει σε τουλάχιστον δύο από τα μικρότερα πολύγωνα. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός των πολυγώνων του διαμερισμού είναι τουλάχιστον 13.

Πρόβλημα 10 Σε ένα συνέδριο υπάρχουν 50 επιστήμονες και καθένας γνωρίζει τουλάχιστον 25 από τους άλλους. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν 4 από αυτούς που μπορούν να καθίσουν γύρω από ένα στρογγυλό τραπέζι έτσι ώστε καθένας να έχει ως δύο γείτονές του δύο γνωστούς του.

Πρόβλημα 11 Έστω G γράφημα στο οποίο κάθε κορυφή έχει βαθμό τουλάχιστον 10. Να αποδείξετε ότι το G περιέχει κύκλο με τουλάχιστον 11 κορυφές.

Πρόβλημα 12 Έστω G συνεκτικό γράφημα με 22 κορυφές, στο οποίο κάθε κορυφή έχει βαθμό τουλάχιστον 10. Να αποδείξετε ότι το G περιέχει μονοπάτι με τουλάχιστον 21 κορυφές.

Πρόβλημα 13 Θεωρούμε n σημεία $A_1, A_2, \dots, A_n$ στο επίπεδο, όπου $n \geq 4$, με την ιδιότητα ότι κανένα τρία από αυτά δεν είναι συνευθειακά. Μερικά ζεύγη διακεκριμένων σημείων από τα $A_1, A_2, \dots, A_n$ ενώνονται με ευθύγραμμα τμήματα, έτσι ώστε κάθε σημείο να είναι ενωμένο με τουλάχιστον τρία διαφορετικά σημεία.

Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $k > 1$ και διακεκριμένα σημεία

$$X_1, X_2, \dots, X_{2k} \in \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$$

τέτοια ώστε, για κάθε $i = 1, 2, \dots, 2k - 1$, το X_i να είναι ενωμένο με το X_{i+1}, και επιπλέον το X_{2k} να είναι ενωμένο με το X_1.

Πρόβλημα 14 Σε έναν οικισμό υπάρχουν 1000 κάτοικοι. Κάθε βράδυ, κάθε κάτοικος λέει σε όλους τους φίλους του όλες τις ειδήσεις που έμαθε την προηγούμενη μέρα. Κάθε είδηση τελικά γίνεται γνωστή σε όλους τους κατοίκους. Αποδείξτε ότι είναι δυνατόν να επιλεγούν 90 κάτοικοι έτσι ώστε, αν τους ανακοινωθεί μια είδηση ταυτόχρονα, αυτή να γίνει γνωστή σε όλους μέσα σε 10 ημέρες.

Πρόβλημα 15 Υπάρχουν n θέσεις στάθμευσης $1, 2, \ldots, n$ κατά μήκος ενός μονόδρομου. Τα αυτοκίνητα $1, 2, \ldots, n$ φθάνουν με αυτήν τη σειρά. Το αυτοκίνητο i προτιμά τη θέση $f(i) \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Όταν φθάνει, πηγαίνει πρώτα στη θέση $f(i)$. Αν αυτή είναι ελεύθερη, σταθμεύει εκεί· αν όχι, προχωρά στην επόμενη θέση, και συνεχίζει έτσι μέχρι να βρει κενή θέση. Αν περάσει και από τη θέση n χωρίς να βρει θέση, αποτυγχάνει. Αν στο τέλος όλα τα αυτοκίνητα έχουν σταθμεύσει, λέμε ότι η f είναι *parking function* στο $[n]$.

Να αποδείξετε ότι το πλήθος των parking functions στο $[n]$ είναι

$$(n+1)^{n-1}.$$

Παραδίδετε 7 Προβλήματα έως 21–04–2026.