Αναλυτική Θεωρία Αριθμών

Σημειώσεις από τις Διαλέξεις

Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Κρήτης
Ηράκλειο, 2026

Περιεχόμενα

1 Η πρώτη αναγωγή **1**

1.1 Άθροιση κατά Abel . . . 1

1.2 Ένα φυσικό αντικείμενο: Mellin–τύπου ολοκλήρωμα . . . 6

1.3 Η σύνδεση με την συνάρτηση Mangoldt . . . 6

1.4 Σύνδεση με την συνάρτηση ζ . . . 7

1.5 Συμπέρασμα . . . 8

2 Επέκταση του Ορισμού της συνάρτησης ζ **10**

2.1 Μερομορφική συνέχεια της $\zeta(s)$ στο $\Re(s) > 0$ . . . 13

2.2 Μη μηδενισμός της ζ στη γραμμή $\Re(s) = 1$ . . . 14

3 Το «μιγαδικό» Korevaar–Zagier **17**

3.1 Ένα βοηθητικό λήμμα: σύγκλιση $\int (A(x) - x)/x^2 \Rightarrow A(x) \sim x$ . . . 22

4 Το Θεώρημα Dirichlet σε αριθμητικές προόδους **28**

4.1 Ορθογωνιότητα χαρακτήρων και αναγωγή σε $-L'/L$ . . . 29

4.2 Αναλυτική συνέχεια των $L(s, \chi)$ στο $\mathrm{Re}(s) > 0$ (όπως για την ζ) . . . 31

4.3 Μη μηδενισμός στη γραμμή $\mathrm{Re}(s) = 1$, $t \neq 0$ . . . 32

4.4 Μη μηδενισμός στο $s = 1$ για πραγματικούς μη κυρίους χαρακτήρες (μέθοδος Lambert) . . . 33

5 Μη μηδενισμός στο $s = 1$ για πραγματικούς χαρακτήρες (μέθοδος Landau) **36**

5.1 Ολοκλήρωση της Απόδειξης με Tauberian . . . 37

6 Ανασκόπηση των άπειρων γινομένων **43**

7 Τύπος γινομένου του Euler **48**

8 Η εξίσωση του Pell **56**

1 Η πρώτη αναγωγή

1.1 Άθροιση κατά Abel

Θεώρημα 1.1 (Άθροιση κατά Abel). *Έστω $0 < y < x$ πραγματικοί αριθμοί και $f : [y, x] \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη. Θεωρούμε την ακολουθία μιγαδικών αριθμών $(a_n)_{n\geq 1}$ και για κάθε $t > 0$ ορίζουμε*

$$A(t) := \sum_{n \leq t} a_n.$$

Τότε ισχύει

$$\sum_{y<n\leq x} a_n\, f(n) \;=\; A(x)f(x) - A(y)f(y) - \int_y^x A(t)\, f'(t)\, dt.$$

Θεώρημα 1.2 (Τύπος άθροισης Euler). *Έστω $0 < y < x$ πραγματικοί αριθμοί και $f : [y, x] \to \mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο f' στο $[y, x]$. Τότε*

$$\sum_{y<n\leq x} f(n) = \int_y^x f(t)\, dt + \int_y^x \{t\}\; f'(t)\, dt + \{y\}\; f(y) - \{x\}\; f(x),$$

όπου $\{t\} = t - \lfloor t \rfloor$ είναι το κλασματικό μέρος.

Οι παρακάτω δύο εφαρμογές είναι χαρακτηριστικές για το πώς χρησιμοποιούμε τον τύπο άθροισης.

Θεώρημα 1.3. *Για $x \geq 1$ ισχύει*

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \log x + \gamma + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right), \tag{1}$$

όπου γ είναι η σταθερά του Euler, οριζόμενη από

$$\gamma = 1 - \int_1^\infty \frac{\{t\}}{t^2}\, dt.$$

Επιπλέον,

$$\gamma = \lim_{x \to \infty} \left(\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} - \log x \right).$$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 1.2 για την συνάρτηση $f(t) = 1/t$ και $y = 1$. Τότε $\{1\} = 0$ και $f'(t) = -1/t^2$, άρα

$$\sum_{1 < n \leq x} \frac{1}{n} = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt + \int_1^x \{t\} \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt - \{x\}\, \frac{1}{x}.$$

Επομένως

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = 1 + \log x - \int_1^x \frac{\{t\}}{t^2}\, dt - \frac{\{x\}}{x}.$$

Προσθέτουμε και αφαιρούμε $\int_1^\infty \frac{\{t\}}{t^2} dt$:

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \log x + \left(1 - \int_1^\infty \frac{\{t\}}{t^2}\, dt\right) + \int_x^\infty \frac{\{t\}}{t^2}\, dt - \frac{\{x\}}{x}.$$

Ορίζοντας $\gamma = 1 - \int_1^\infty \frac{\{t\}}{t^2}\, dt$ παίρνουμε

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \log x + \gamma + \int_x^\infty \frac{\{t\}}{t^2}\, dt - \frac{\{x\}}{x}.$$

Τώρα $0 \leq \{t\} \leq 1$, άρα

$$0 \leq \int_x^\infty \frac{\{t\}}{t^2}\, dt \leq \int_x^\infty \frac{1}{t^2}\, dt = \frac{1}{x}, \qquad 0 \leq \frac{\{x\}}{x} \leq \frac{1}{x}.$$

Άρα το υπόλοιπο είναι $\mathcal{O}(1/x)$ και προκύπτει η (1). Τέλος, καθώς $x \to \infty$ το $\mathcal{O}(1/x)$ τείνει στο 0, οπότε

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} - \log x \to \gamma,$$

δηλαδή $\gamma = \lim_{x \to \infty} \left(\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} - \log x \right)$. □

Ορισμοί

Για $x \geq 0$ θέτουμε:

$$\pi(x) := \#\{p \leq x : \ p \text{ πρώτος}\}, \qquad \theta(x) := \sum_{p \leq x} \log p,$$

και

$$\psi(x) := \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = \sum_{p^k \leq x} \log p,$$

όπου Λ είναι η συνάρτηση von Mangoldt: $\Lambda(n) = \log p$ αν $n = p^k$ για κάποιον πρώτο p και $k \geq 1$, και $\Lambda(n) = 0$ αλλιώς.

Θεώρημα 1.4. *Για κάθε $x \geq 2$ ισχύουν οι ταυτότητες*

$$\theta(x) = \pi(x) \log x - \int_2^x \frac{\pi(t)}{t}\, dt,$$

και

$$\pi(x) = \frac{\theta(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\theta(t)}{t(\log t)^2}\, dt.$$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 1.1 με $y = 2$,

$$a_n = \mathbf{1}_{\{n \text{ πρώτος}\}}, \qquad f(t) = \log t, \qquad A(t) = \sum_{n \leq t} a_n = \pi(t).$$

Τότε

$$\sum_{2 < n \leq x} a_n f(n) = \sum_{2 < p \leq x} \log p = \theta(x) - \log 2.$$

Το Θεώρημα 1.1 δίνει

$$\theta(x) - \log 2 = \pi(x) \log x - \pi(2) \log 2 - \int_2^x \pi(t)\, \frac{dt}{t}.$$

Επειδή $\pi(2) = 1$, οι όροι $\log 2$ απαλείφονται, και παίρνουμε

$$\theta(x) = \pi(x) \log x - \int_2^x \frac{\pi(t)}{t}\, dt.$$

Εφαρμόζουμε πάλι το Θεώρημα 1.1 με $y = 2$,

$$a_n = (\log n)\, \mathbf{1}_{\{n \text{ πρώτος}\}}, \qquad f(t) = \frac{1}{\log t}, \qquad A(t) = \sum_{n \leq t} a_n = \theta(t).$$

Τότε

$$\sum_{2 < n \leq x} a_n f(n) = \sum_{2 < p \leq x} \frac{\log p}{\log p} = \pi(x) - 1,$$

επομένως

$$\pi(x) - 1 = \theta(x) \frac{1}{\log x} - \theta(2) \frac{1}{\log 2} - \int_2^x \theta(t)\, f'(t)\, dt.$$

Επειδή $\theta(2) = \log 2$, ο όρος $\theta(2)/\log 2$ είναι 1 και απαλείφεται με το -1 αριστερά. Επίσης

$$f'(t) = \left(\frac{1}{\log t}\right)' = -\frac{1}{t(\log t)^2}.$$

Άρα

$$\pi(x) = \frac{\theta(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\theta(t)}{t(\log t)^2}\, dt.$$

$\square$

Θεώρημα 1.5. *Για κάθε $x \geq 1$ ισχύει*

$$0 \leq \psi(x) - \theta(x) \leq \frac{\sqrt{x}(\log x)^2}{2\log 2}. \tag{2}$$

Ειδικότερα, για $x \geq 2$ έχουμε

$$\psi(x) = \theta(x) + O\big(\sqrt{x}(\log x)^2\big).$$

Απόδειξη. Η ανισότητα $\psi(x) - \theta(x) \geq 0$ είναι άμεση, αφού η ψ περιλαμβάνει όλους τους όρους της θ και επιπλέον τις συνεισφορές από πρώτες δυνάμεις p^k με $k \geq 2$.

Για το άνω φράγμα, ξεκινάμε από τον ορισμό

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = \sum_{p^k \leq x} \Lambda(p^k).$$

Ομαδοποιώντας ως προς τον εκθέτη k παίρνουμε

$$\psi(x) = \sum_{k \geq 1} \sum_{p \leq x^{1/k}} \log p = \sum_{k \geq 1} \theta\big(x^{1/k}\big).$$

Το άθροισμα ως προς k είναι στην πράξη πεπερασμένο, διότι $\theta(y) = 0$ όταν $y < 2$ (δεν υπάρχουν πρώτοι ≤ 1). Άρα $\theta(x^{1/k}) = 0$ για $x^{1/k} < 2$, δηλαδή για

$$k > \frac{\log x}{\log 2}.$$

Συνεπώς

$$\psi(x) - \theta(x) = \sum_{k \geq 2} \theta(x^{1/k}) = \sum_{2 \leq k \leq \log x/\log 2} \theta(x^{1/k}).$$

Για $k \geq 2$ έχουμε $x^{1/k} \leq \sqrt{x}$, άρα (μονοτονία της θ)

$$\theta(x^{1/k}) \leq \theta(\sqrt{x}) \quad \text{για κάθε } k \geq 2.$$

Επομένως

$$\psi(x) - \theta(x) \leq \theta(\sqrt{x}) \cdot \frac{\log x}{\log 2}.$$

Τέλος,

$$\theta(\sqrt{x}) = \sum_{p \leq \sqrt{x}} \log p \leq \sum_{p \leq \sqrt{x}} \log \sqrt{x} \leq \sqrt{x} \log \sqrt{x}.$$

Άρα

$$\psi(x) - \theta(x) \leq \sqrt{x} \log \sqrt{x} \cdot \frac{\log x}{\log 2} = \sqrt{x} \cdot \frac{(\log x)^2}{2\log 2},$$

που είναι ακριβώς το (2). □

Λήμμα 1.6. *Για $x \geq 3$ ισχύει*

$$\int_2^x \frac{dt}{\log t} \leq \frac{C_1 x}{\log x}, \qquad \int_2^x \frac{dt}{(\log t)^2} \leq \frac{C_2 x}{(\log x)^2}.$$

Απόδειξη. Θέτουμε $u = \sqrt{x}$. Για $t \in [u, x]$ έχουμε $\log t \geq \log u = \frac{1}{2}\log x$. Άρα

$$\int_2^x \frac{dt}{\log t} = \int_2^u \frac{dt}{\log t} + \int_u^x \frac{dt}{\log t} \leq \frac{u-2}{\log 2} + \frac{x-u}{\frac{1}{2}\log x} = \mathcal{O}\bigg(\sqrt{x} + \frac{x}{\log x}\bigg) = \mathcal{O}\bigg(\frac{x}{\log x}\bigg).$$

Ομοίως,

$$\int_2^x \frac{dt}{(\log t)^2} \leq u + \frac{x-u}{(\frac{1}{2}\log x)^2} \ll \sqrt{x} + \frac{x}{(\log x)^2} \ll \frac{x}{(\log x)^2}.$$

□

Θεώρημα 1.7. *Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}, \tag{3}$$

$$\theta(x) \sim x, \tag{4}$$

$$\psi(x) \sim x. \tag{5}$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 1.4 έχουμε, για $x \geq 2$,

$$\theta(x) = \pi(x)\log x - \int_2^x \frac{\pi(t)}{t}\,dt.$$

Διαιρώντας με x και γράφοντας $\frac{\pi(x)\log x}{x} = \frac{\pi(x)}{x/\log x}$ παίρνουμε

$$\frac{\theta(x)}{x} = \frac{\pi(x)}{x/\log x} - \frac{1}{x}\int_2^x \frac{\pi(t)}{t}\,dt. \tag{6}$$

(3) $\implies$ (4). Υποθέτουμε ότι $\pi(x) \sim x/\log x$. Τότε υπάρχει σταθερά $C > 0$ ώστε για t μεγάλα

$$\pi(t) \leq C\frac{t}{\log t}.$$

Άρα

$$\frac{1}{x}\int_2^x \frac{\pi(t)}{t}\,dt \ll \frac{1}{x}\int_2^x \frac{dt}{\log t} \ll \frac{1}{\log x}.$$

Συνεπώς

$$\frac{1}{x}\int_2^x \frac{\pi(t)}{t}\,dt \longrightarrow 0 \qquad (x \to \infty).$$

Επιστρέφοντας στην (6) και χρησιμοποιώντας ότι $\frac{\pi(x)}{x/\log x} \to 1$, παίρνουμε $\frac{\theta(x)}{x} \to 1$, δηλαδή $\theta(x) \sim x$.

(4) $\implies$ (3). Από το Θεώρημα 1.4έχουμε επίσης

$$\pi(x) = \frac{\theta(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\theta(t)}{t(\log t)^2}\,dt,$$

άρα

$$\frac{\pi(x)}{x/\log x} = \frac{\theta(x)}{x} + \frac{\log x}{x}\int_2^x \frac{\theta(t)}{t(\log t)^2}\,dt. \tag{7}$$

Υποθέτουμε $\theta(x) \sim x$. Τότε υπάρχει σταθερά $C > 0$ ώστε για t μεγάλα $\theta(t) \leq Ct$. Έτσι

$$\frac{\log x}{x}\int_2^x \frac{\theta(t)}{t(\log t)^2}\,dt \ll \frac{\log x}{x}\int_2^x \frac{dt}{(\log t)^2} \ll \frac{1}{\log x}.$$

Στην (7) λοιπόν, ο δεύτερος όρος τείνει στο 0 και ο πρώτος τείνει στο 1, οπότε $\frac{\pi(x)}{x/\log x} \to 1$, δηλαδή $\pi(x) \sim x/\log x$.

(5) $\iff$ (4). Από το Θεώρημα 1.5 ισχύει $0 \leq \psi(x) - \theta(x) \leq C\sqrt{x}(\log x)^2$ για $x \geq 2$. Διαιρώντας με x παίρνουμε

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\psi(x)}{x} - \frac{\theta(x)}{x}\right) = 0.$$

Άρα $\theta(x) \sim x$ αν και μόνο αν $\psi(x) \sim x$.

Συμπεραίνουμε ότι (3), (4), (5) είναι ισοδύναμες. □

Εφόσον θέλουμε να αποδείξουμε ότι $\psi(x) \sim x$, κάνουμε την πρώτη βασική αναγωγή, με βάση το παρακάτω Θεώρημα.

Θεώρημα 1.8 (Korevaar–Zagier). *Έστω $(a_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία με $a_n \geq 0$ και ορίζουμε, για $x \geq 1$,*

$$A(x) := \sum_{n\leq x} a_n.$$

Αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_1^\infty \frac{A(x) - x}{x^2}\, dx$$

συγκλίνει, τότε $A(x) \sim x$, καθώς $x \to \infty$.

Απόδειξη. Θέτουμε

$$I(y) = \int_y^\infty \frac{A(t) - t}{t^2}\, dt.$$

Η υπόθεση ότι $\int_1^\infty \frac{A(t)-t}{t^2}\, dt$ συγκλίνει ισοδυναμεί με $I(y) \to 0$. Θα αποδείξουμε ότι $A(x)/x \to 1$.

Υποθέτουμε, προς άτοπο, ότι $\limsup_{x\to\infty} A(x)/x > 1$. Τότε υπάρχει $\lambda > 1$ και άπειρα x με $A(x) \geq \lambda x$. Για τέτοιο x και κάθε $t \in [x, \lambda x]$ ισχύει $A(t) \geq A(x) \geq \lambda x$, άρα

$$I(x) - I(\lambda x) = \int_x^{\lambda x} \frac{A(t) - t}{t^2}\, dt \geq \int_x^{\lambda x} \frac{\lambda x - t}{t^2}\, dt.$$

Με την αλλαγή μεταβλητής $t = vx$ παίρνουμε

$$\int_x^{\lambda x} \frac{\lambda x - t}{t^2}\, dt = \int_1^{\lambda} \frac{\lambda - v}{v^2}\, dv = \lambda - 1 - \log \lambda > 0.$$

Όμως $I(x) \to 0$ και $I(\lambda x) \to 0$, άρα $I(x) - I(\lambda x) \to 0$, άτοπο. Ανάλογα αποκλείεται και η σχέση $\liminf_{x\to\infty} A(x)/x < 1$. Άρα $A(x)/x \to 1$. □

1.2 Ένα φυσικό αντικείμενο: Mellin–τύπου ολοκλήρωμα

Για $\sigma > 1$ ορίζουμε

$$F(\sigma) := \int_1^\infty \frac{\psi(x) - x}{x^{\sigma+1}}\, dx. \tag{8}$$

Τυπικά,

$$F(1) = \int_1^\infty \frac{\psi(x) - x}{x^2}\, dx,$$

άρα το ερώτημα είναι αν το $F(\sigma)$ μπορεί να «κατέβει» μέχρι $\sigma = 1$ με πεπερασμένη τιμή. Προς το παρόν εργαζόμαστε μόνο στο $\sigma > 1$, όπου όλα είναι απολύτως νόμιμα.

1.3 Η σύνδεση με την συνάρτηση Mangoldt

Λήμμα 1.9. *Για κάθε $\sigma > 1$ ισχύει*

$$\int_1^\infty \frac{\psi(x)}{x^{\sigma+1}}\, dx = \frac{1}{\sigma} \sum_{n=1}^\infty \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma}.$$

Απόδειξη. Από τον ορισμό $\psi(x) = \sum_{n\le x} \Lambda(n)$ και επειδή $\Lambda(n) \ge 0$, μπορούμε να εφαρμόσουμε Tonelli και να ανταλλάξουμε άθροισμα–ολοκλήρωμα:

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{\psi(x)}{x^{\sigma+1}}\,dx &= \int_1^\infty \left(\sum_{n\le x} \Lambda(n)\right) x^{-\sigma-1}\,dx \\ &= \sum_{n=1}^\infty \Lambda(n) \int_1^\infty \mathbf{1}_{\{n\le x\}}\, x^{-\sigma-1}\,dx = \sum_{n=1}^\infty \Lambda(n) \int_n^\infty x^{-\sigma-1}\,dx.\end{aligned}$$

Για $\sigma > 0$ έχουμε

$$\int_n^\infty x^{-\sigma-1}\,dx = \frac{1}{\sigma} n^{-\sigma},$$

οπότε παίρνουμε το ζητούμενο. □

Επιπλέον για κάθε $\sigma > 1$ ισχύει

$$\int_1^\infty \frac{x}{x^{\sigma+1}}\,dx = \int_1^\infty x^{-\sigma}\,dx = \frac{1}{\sigma-1},$$

επομένως παίρνουμε την ακόλουθη ισότητα.

Πρόταση 1.10. *Για κάθε $\sigma > 1$ ισχύει*

$$F(\sigma) = \frac{1}{\sigma} \sum_{n=1}^\infty \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma} - \frac{1}{\sigma-1}. \tag{9}$$

Άρα το πρόβλημά μας μεταφέρθηκε φυσικά στη μελέτη της σειράς Dirichlet

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma}.$$

1.4 Σύνδεση με την συνάρτηση ζ

Εισάγουμε την συνάρτηση ζ ως σειρά Dirichlet:

$$\zeta(\sigma) := \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\sigma} \qquad (\sigma > 1). \tag{10}$$

Λήμμα 1.11 (Παραγώγιση της ζ για $\sigma > 1$). *Για κάθε $\sigma > 1$ ισχύει*

$$\zeta'(\sigma) = -\sum_{n=1}^\infty \frac{\log n}{n^\sigma}.$$

Απόδειξη. Για κάθε $\varepsilon > 0$ η σειρά $\sum_{n\ge1} \frac{\log n}{n^{1+\varepsilon}}$ συγκλίνει, οπότε η σειρά των παραγώγων συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[1+\varepsilon, \infty)$ (Weierstrass M–test). Άρα επιτρέπεται η παραγώγιση της (10) για $\sigma > 1$. □

Το κρίσιμο αριθμητικό γεγονός είναι μια ταυτότητα για τη von Mangoldt συνάρτηση.

Λήμμα 1.12 (Ταυτότητα διαιρετών για Λ). *Για κάθε ακέραιο $n \ge 1$ ισχύει*

$$\log n = \sum_{d\mid n} \Lambda(d). \tag{11}$$

Απόδειξη. Αν $n = \prod_{j=1}^{m} p_j^{\alpha_j}$, τότε $\log n = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \log p_j$. Οι διαιρέτες d του n με $\Lambda(d) \neq 0$ είναι ακριβώς οι δυνάμεις p_j^k με $1 \le k \le \alpha_j$, άρα

$$\sum_{d|n} \Lambda(d) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{\alpha_j} \log p_j = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \log p_j = \log n.$$

$\square$

Λήμμα 1.13. *Για κάθε $\sigma > 1$ η σειρά $\displaystyle\sum_{n\ge 1} \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma}$ συγκλίνει απολύτως.*

Απόδειξη. Ισχύει $\Lambda(n) \le \log n$, άρα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\Lambda(n)|}{n^\sigma} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^\sigma} < \infty \qquad (\sigma > 1).$$

$\square$

Θεώρημα 1.14. *Για κάθε $\sigma > 1$ ισχύει*

$$-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma}. \tag{12}$$

Απόδειξη. Από το Λήμμα 1.11 έχουμε

$$-\zeta'(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^\sigma}.$$

Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα (11):

$$-\zeta'(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} \sum_{d|n} \Lambda(d).$$

Για $\sigma > 1$ όλοι οι όροι είναι μη αρνητικοί, οπότε (Tonelli) αναδιατάσσουμε:

$$\begin{aligned}
-\zeta'(\sigma) &= \sum_{d=1}^{\infty} \Lambda(d) \sum_{\substack{n\ge 1\\ d|n}} \frac{1}{n^\sigma} = \sum_{d=1}^{\infty} \Lambda(d) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(dm)^\sigma} \\
&= \left(\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\Lambda(d)}{d^\sigma} \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^\sigma} \right) = \left(\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\Lambda(d)}{d^\sigma} \right) \zeta(\sigma).
\end{aligned}$$

Επειδή $\zeta(\sigma) > 0$ για $\sigma > 1$, διαιρούμε και παίρνουμε την (12). $\square$

1.5 Συμπέρασμα

Συνδυάζοντας την Πρόταση 1.10 με το Θεώρημα 1.14 παίρνουμε, για κάθε $\sigma > 1$,

$$F(\sigma) = -\frac{1}{\sigma} \frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} - \frac{1}{\sigma - 1}. \tag{13}$$

Ξεκινήσαμε από τη ψ και το κριτήριο Korevaar–Zagier, και φτάσαμε στο ότι η μελέτη της σύγκλισης του (??) ισοδυναμεί με το να καταλάβουμε τη συμπεριφορά του δεξιού μέλους του (13) καθώς $\sigma \downarrow 1$.

Γιατί *αναγκαστικά* θα περάσουμε σε μιγαδική ανάλυση.

Παρατήρηση 1.15 (Γιατί δεν αρκεί να μείνουμε στο $\sigma \in \mathbb{R}$). Μέχρι εδώ δουλέψαμε μόνο με πραγματικά $\sigma > 1$. Το επόμενο βήμα θα ήταν να περάσουμε στο

$$F(1) = \int_1^\infty \frac{\psi(x) - x}{x^2}\, dx,$$

αλλά αυτό δεν προκύπτει μόνο από τη γνώση του $F(\sigma)$ για $\sigma > 1$. Πράγματι, αν πάρουμε

$$E(x) := x \sin(\log x), \qquad F_E(\sigma) := \int_1^\infty \frac{E(x)}{x^{\sigma+1}}\, dx = \int_1^\infty \frac{\sin(\log x)}{x^\sigma}\, dx,$$

με την αλλαγή μεταβλητής $u = \log x$ προκύπτει

$$F_E(\sigma) = \int_0^\infty e^{-(\sigma-1)u} \sin u\, du = \frac{1}{(\sigma-1)^2 + 1},$$

άρα $\lim_{\sigma \downarrow 1} F_E(\sigma) = 1$. Πράγματι, ένας γρήγορος τρόπος για τον τελευταίο υπολογισμό είναι

$$\int_0^\infty e^{-(\sigma-1)u} \sin u\, du = \Im \int_0^\infty e^{-(\sigma-1)u} e^{iu}\, du = \Im \int_0^\infty e^{-(\sigma-1-i)u}\, du.$$

Για $\sigma > 1$ έχουμε $\Re(\sigma - 1 - i) = \sigma - 1 > 0$, άρα

$$\int_0^\infty e^{-(\sigma-1-i)u}\, du = \frac{1}{\sigma - 1 - i}.$$

Επομένως

$$\int_0^\infty e^{-(\sigma-1)u} \sin u\, du = \Im \frac{1}{\sigma - 1 - i} = \Im \left(\frac{\sigma - 1 + i}{(\sigma-1)^2 + 1} \right) = \frac{1}{(\sigma-1)^2 + 1}.$$

Ωστόσο

$$F_E(1) = \int_1^\infty \frac{\sin(\log x)}{x}\, dx = \int_0^\infty \sin u\, du,$$

που δεν συγκλίνει. Δηλαδή: ακόμη και πολύ καλή συμπεριφορά για όλα τα $\sigma > 1$ (και μάλιστα ύπαρξη ορίου στο $\sigma \downarrow 1$) δεν εγγυάται σύγκλιση στο $\sigma = 1$.

Η σωστή πρόσθετη πληροφορία είναι να ελέγξουμε την *οριακή ευθεία* $\Re(s) = 1$, δηλαδή τι συμβαίνει για $s = \sigma + it$. Στο παραπάνω παράδειγμα, ο αντίστοιχος μετασχηματισμός είναι

$$F_E(s) = \frac{1}{(s-1)^2 + 1},$$

που έχει πόλους στα $s = 1 \pm i$, δηλαδή πάνω στην $\Re(s) = 1$. Αυτές οι ανωμαλίες αντιστοιχούν σε ταλαντώσεις και είναι ακριβώς αυτό που πρέπει να αποκλείσουμε στην περίπτωση της ζ.

2 Επέκταση του Ορισμού της συνάρτησης ζ

Λήμμα 2.1. *Έστω $(a_n)_{n\geq 1}$ με $a_n \in \mathbb{C}$ και έστω*

$$F(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \qquad s = \sigma + it.$$

Αν υπάρχει $\sigma_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^{\sigma_0}} < \infty$, τότε για κάθε $\sigma_1 > \sigma_0$ η σειρά συγκλίνει απολύτως και ομοιόμορφα στο ημιεπίπεδο $\Re(s) \geq \sigma_1$. Επιπλέον, η F είναι ολόμορφη στο $\Re(s) > \sigma_0$ και

$$F'(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \log n}{n^s},$$

με ομοιόμορφη σύγκλιση σε κάθε $\Re(s) \geq \sigma_1 > \sigma_0$.

Απόδειξη. Για s με $\Re(s) = \sigma \geq \sigma_1$ έχουμε

$$\left|\frac{a_n}{n^s}\right| = \frac{|a_n|}{n^\sigma} \leq \frac{|a_n|}{n^{\sigma_1}}.$$

Επειδή $\sum_{n\geq 1} \frac{|a_n|}{n^{\sigma_1}} < \infty$, το M-κριτήριο του Weierstrass δίνει ομοιόμορφη σύγκλιση στο $\Re(s) \geq \sigma_1$. Άρα η F είναι συνεχής εκεί.

Για την ολομορφία, παρατηρούμε ότι κάθε όρος $s \mapsto a_n n^{-s} = a_n e^{-s \log n}$ είναι ολόμορφη και για $\sigma \geq \sigma_1$ ισχύει

$$\left|\frac{a_n \log n}{n^s}\right| = \frac{|a_n| \log n}{n^\sigma} \leq \frac{|a_n| \log n}{n^{\sigma_1}}.$$

Αλλά για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $\log n \leq n^\varepsilon$ για n αρκετά μεγάλο, οπότε (π.χ. παίρνοντας $\varepsilon = (\sigma_1 - \sigma_0)/2$) η $\sum \frac{|a_n| \log n}{n^{\sigma_1}}$ συγκλίνει. Άρα η σειρά των παραγώγων συγκλίνει ομοιόμορφα όταν $\Re(s) \geq \sigma_1$. Από το Θεώρημα ?? συμπεραίνουμε ότι F είναι ολόμορφη και ότι επιτρέπεται παραγωγίση όρο-όρο. □

Πρόταση 2.2. *Για $\Re(s) > 1$ ορίζουμε*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Τότε η σειρά συγκλίνει απολύτως για $\Re(s) > 1$, ορίζει ολόμορφη συνάρτηση στο $\{s : \Re(s) > 1\}$, και για κάθε $\Re(s) > 1$ ισχύει

$$\zeta'(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^s},$$

με ομοιόμορφη σύγκλιση σε κάθε ημιεπίπεδο $\Re(s) \geq 1 + \delta$ ($\delta > 0$).

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το Λήμμα 2.1 με $a_n \equiv 1$ και $\sigma_0 = 1$. □

Παρατήρηση 2.3. Θέτουμε $H_1 := \{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > 1\}$. Η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο H_1.

Πράγματι, έστω προς άτοπο ότι συγκλίνει ομοιόμορφα στο H_1. Τότε, από το κριτήριο Cauchy για ομοιόμορφη σύγκλιση, για $\varepsilon = 1$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $\ell > k \geq N$ και κάθε $s \in H_1$ να ισχύει

$$\left| \sum_{n=k}^{\ell} \frac{1}{n^s} \right| < 1.$$

Ειδικότερα, αυτό ισχύει για κάθε *πραγματικό* $s > 1$ (αφού $(1, \infty) \subset H_1$). Για πραγματικό $s > 1$ όλοι οι όροι είναι θετικοί, άρα

$$\sum_{n=k}^{\ell} \frac{1}{n^s} < 1 \qquad (\ell > k \geq N,\ s > 1).$$

Αφήνοντας τώρα $s \to 1^+$, και χρησιμοποιώντας ότι για κάθε σταθερά ℓ, k έχουμε $\frac{1}{n^s} \to \frac{1}{n}$, παίρνουμε

$$\sum_{n=k}^{\ell} \frac{1}{n} \leq 1 \qquad (\ell > k \geq N).$$

Τέλος, αφήνοντας $\ell \to \infty$ καταλήγουμε ότι

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n} \leq 1 \qquad (k \geq N),$$

άτοπο, επειδή η αρμονική σειρά αποκλίνει. Άρα η αρχική υπόθεση είναι ψευδής.

Πρόταση 2.4. *Θέτουμε*

$$F(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

Τότε η F είναι καλά ορισμένη και ολόμορφη στο $\Re(s) > 1$, και

$$F'(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n) \log n}{n^s},$$

με ομοιόμορφη σύγκλιση σε κάθε $\Re(s) \geq 1 + \delta$.

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε ότι $0 \leq \Lambda(n) \leq \log n$ για κάθε $n \geq 2$. Για $\sigma > 1$ έχουμε

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{|\Lambda(n)|}{n^\sigma} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n^\sigma} < \infty,$$

άρα εφαρμόζουμε το Λήμμα 2.1 με $\sigma_0 = 1$. □

Πρόταση 2.5. *Θεωρούμε το ημιεπίπεδο $\Omega := \{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > 1\}$. Υποθέτουμε ότι για κάθε* πραγματικό *$s > 1$ έχει ήδη αποδειχθεί η ταυτότητα*

$$-\zeta'(s) = \zeta(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

Τότε η ίδια ταυτότητα ισχύει για κάθε μιγαδικό *$s \in \Omega$.*

Απόδειξη. Από την Πρόταση 2.2 η ζ και η ζ' είναι ολόμορφες στο Ω. Από την Πρόταση 2.4 η

$$F(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$$

είναι ολόμορφη στο Ω. Άρα και το γινόμενο $\zeta(s)F(s)$ είναι ολόμορφη συνάρτηση στο Ω.

Ορίζουμε την ολόμορφη συνάρτηση

$$H(s) := -\zeta'(s) - \zeta(s)F(s) \qquad (s \in \Omega).$$

Από την υπόθεση, για κάθε πραγματικό $s > 1$ ισχύει $H(s) = 0$. Το σύνολο $(1, \infty) \subset \Omega$ έχει σημείο συσσώρευσης *εντός* του Ω (π.χ. στο $s = 2$), άρα από την Αρχή Αναλυτικής Συνέχισης (Identity Theorem) συμπεραίνουμε ότι $H \equiv 0$ σε όλο το Ω. Δηλαδή

$$-\zeta'(s) = \zeta(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s},$$

για κάθε $s \in \Omega$.

$\square$

Λήμμα 2.6. *Έστω $\Omega \subset \mathbb{C}$ ανοικτό, $s_0 \in \Omega$ και $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη. Υποθέτουμε ότι $f \not\equiv 0$ και ότι $f(s_0) = 0$. Τότε υπάρχει ακέραιος $m \geq 1$ και ολόμορφη συνάρτηση h σε κάποια γειτονιά του s_0 με $h(s_0) \neq 0$ τέτοια ώστε*

$$f(s) = (s - s_0)^m h(s)$$

για s κοντά στο s_0. Ο m είναι μοναδικός και λέγεται τάξη (ή πολλαπλότητα) του μηδενικού στο s_0.

Απόδειξη. Επειδή f είναι ολόμορφη, υπάρχει $r > 0$ και ανάπτυγμα Taylor

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (s - s_0)^n \qquad (|s - s_0| < r).$$

Από $f(s_0) = 0$ παίρνουμε $a_0 = 0$. Επειδή $f \not\equiv 0$, δεν είναι όλοι οι συντελεστές μηδέν, άρα υπάρχει ελάχιστος $m \geq 1$ με $a_m \neq 0$. Τότε

$$f(s) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n (s - s_0)^n = (s - s_0)^m \sum_{k=0}^{\infty} a_{m+k} (s - s_0)^k.$$

Θέτουμε

$$h(s) := \sum_{k=0}^{\infty} a_{m+k} (s - s_0)^k.$$

Η h είναι ολόμορφη στο $|s - s_0| < r$ και $h(s_0) = a_m \neq 0$. Η μοναδικότητα του m προκύπτει από τη μοναδικότητα του Taylor αναπτύγματος. $\square$

Θεώρημα 2.7. *Για κάθε s με $\Re(s) > 1$ ισχύει $\zeta(s) \neq 0$.*

Απόδειξη. Έστω προς άτοπο ότι υπάρχει s_0 με $\Re(s_0) > 1$ και $\zeta(s_0) = 0$. Η ζ είναι ολόμορφη στο $\Re(s) > 1$, άρα το s_0 είναι μηδενικό κάποιας τάξης $m \geq 1$, δηλαδή υπάρχει ολόμορφη h κοντά στο s_0 με $h(s_0) \neq 0$ ώστε

$$\zeta(s) = (s - s_0)^m h(s).$$

Τότε

$$\zeta'(s) = m(s - s_0)^{m-1}h(s) + (s - s_0)^m h'(s),$$

οπότε η $\zeta'(s)$ έχει μηδενικό ακριβώς τάξης $m-1$ στο s_0. Ισοδύναμα, $-\zeta'(s)$ έχει μηδενικό ακριβώς τάξης $m - 1$ στο s_0.

Από την Πρόταση 2.5 έχουμε στο $\Re(s) > 1$ την ταυτότητα

$$-\zeta'(s) = \zeta(s)\, F(s), \qquad F(s) := \sum_{n\geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

Η F είναι ολόμορφη στο $\Re(s) > 1$ (από απόλυτη σύγκλιση), άρα κοντά στο s_0 είναι πεπερασμένη. Επομένως το γινόμενο $\zeta(s)F(s)$ έχει μηδενικό τάξης *τουλάχιστον* m στο s_0, αφού η ζ έχει τάξη m εκεί.

Άρα το αριστερό μέλος $-\zeta'(s)$ θα έπρεπε να έχει μηδενικό τάξης $\geq m$ στο s_0, που αντιφάσκει με το ότι έχει τάξη ακριβώς $m - 1$. Άτοπο. Συνεπώς $\zeta(s) \neq 0$ για $\Re(s) > 1$. □

2.1 Μερομορφική συνέχεια της $\zeta(s)$ στο $\Re(s) > 0$

Θεώρημα 2.8. *Για $s \in \mathbb{C}$ με $\sigma = \mathrm{Re}(s) > 1$ ισχύει*

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \int_1^\infty \frac{\{t\}}{t^{s+1}}\, dt.$$

Απόδειξη. Απ τον τύπο αθροίσεως του Euler, παίρνουμε

$$\sum_{n\leq x} n^{-s} = 1 + \int_1^x t^{-s}\, dt + \int_1^x \{t\}\, (t^{-s})'\, dt - \frac{\{x\}}{x^s}.$$

Υπολογίζοντας τα παραπάνω ολοκληρώματα καταλήγουμε στην ισότητα

$$\sum_{n\leq x} n^{-s} = \frac{x^{1-s}}{1-s} + \frac{s}{s-1} - \frac{\{x\}}{x^s} - s\int_1^x \frac{\{t\}}{t^{s+1}}\, dt.$$

Περνώντας στο όριο $x \to \infty$ (και χρησιμοποιώντας ότι $\sigma > 1$ ώστε $x^{1-s} \to 0$ και $\{x\}/x^s \to 0$), παίρνουμε το ζητούμενο. □

Θεώρημα 2.9. *Η σχέση του Θεωρήματος 2.8 δίνει αναλυτική συνέχιση της $\zeta(s)$ στο ημιεπίπεδο $\sigma > 0$, με απλό πόλο στο $s = 1$ και υπόλοιπο 1.*

Απόδειξη. Εφόσον η συνάρτηση

$$s \longmapsto \frac{s}{s-1} = \frac{1}{s-1} + 1$$

είναι αναλυτική σε κάθε σημείο του $\sigma > 0$ εκτός από έναν απλό πόλο στο $s = 1$ με υπόλοιπο 1, αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση

$$f(s) = \int_1^\infty \frac{\{t\}}{t^{s+1}}\, dt$$

είναι αναλυτική στο $\sigma > 0$.

Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$f_m(s) = \int_1^m \frac{\{t\}}{t^{s+1}}\, dt \qquad \text{για } s \in \mathbb{C} \text{ με } \sigma > 0.$$

Επειδή το ολοκληρωτέο είναι αναλυτική συνάρτηση του s, δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι f_m είναι αναλυτική στο ημιεπίπεδο $\sigma > 0$.

Εναλλακτικά, γράφουμε το $f_m(s)$ ως δυναμοσειρά. Παρατηρούμε ότι

$$f_m(s) = \int_1^m \{t\}\ e^{-(s+1)\log t}\, dt = \int_1^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{t\}\,(-\log t)^n (s+1)^n}{n!}\, dt,$$

και ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{\{t\}\,(-\log t)^n (s+1)^n}{n!} \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\big(|\log t|(|s|+1)\big)^n}{n!} = e^{|\log t|(|s|+1)}.$$

Άρα

$$\int_1^m \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{\{t\}\,(-\log t)^n (s+1)^n}{n!} \right| dt \leq \int_1^m t^{|s|+1}\, dt < \infty.$$

Με το θεώρημα Fubini, μπορούμε να αλλάξουμε τη σειρά ολοκλήρωσης και αθροίσεως και παίρνουμε

$$f_m(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(s+1)^n}{n!} \int_1^m \{t\}\,(-\log t)^n\, dt,$$

που είναι δυναμοσειρά ως προς το s.

Για να δούμε ότι $f_m \to f$ ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $\sigma > 0$, θεωρούμε το ημιεπίπεδο $\sigma \geq \delta$ και παίρνουμε

$$|f_m(s) - f(s)| \leq \int_m^{\infty} \frac{1}{t^{\sigma+1}}\, dt \ll \frac{1}{\sigma m^{\sigma}} \leq \frac{1}{\delta m^{\delta}}.$$

Άρα, αν $\varepsilon, \delta > 0$ δοθούν, μπορούμε να διαλέξουμε $M > 0$ που εξαρτάται από ε, δ αλλά όχι από το s (π.χ. $M = (\delta\varepsilon)^{-1/\delta}$) τέτοιο ώστε $|f_m(s) - f(s)| < \varepsilon$ για κάθε $m > M$ και κάθε $s \in \mathbb{C}$ με $\sigma \geq \delta$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

2.2 Μη μηδενισμός της ζ στη γραμμή $\Re(s) = 1$

Λήμμα 2.10. *Για $\Re(s) > 1$ ισχύει*

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s},$$

και η σειρά συγκλίνει απολύτως και ομοιόμορφα σε κάθε ημιεπίπεδο $\Re(s) \geq 1 + \varepsilon$.

Απόδειξη. Προκύπτει άμεσα από τα παραπάνω. □

Λήμμα 2.11. *Για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$ ισχύει*

$$P(\theta) := 3 + 4\cos\theta + \cos(2\theta) = 2(1 + \cos\theta)^2 \geq 0.$$

Λήμμα 2.12. *Έστω $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Για $\sigma > 1$ θέτουμε*

$$G(\sigma) := \big|\zeta(\sigma)\big|^3 \big|\zeta(\sigma + it)\big|^4 \big|\zeta(\sigma + 2it)\big|.$$

Τότε:

1. $G(\sigma) \geq 1$ *για κάθε* $\sigma > 1$.

2. *Πιο συγκεκριμένα,*

$$-\frac{d}{d\sigma}\log G(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma}}\, P\big(t\log n\big) \;\geq\; 0,$$

όπου P είναι όπως στο Λήμμα 2.11.

Απόδειξη. Για $\sigma > 1$ έχουμε $\zeta(\sigma) \neq 0$, άρα οι ποσότητες ζ'/ζ ορίζονται και είναι ολόμορφες.

Βήμα 1: Παράγωγος του $\log G(\sigma)$. Για κάθε $u \in \mathbb{R}$ και $\sigma > 1$ ισχύει

$$\frac{d}{d\sigma}\log|\zeta(\sigma+iu)| = \Re\left(\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+iu)\right).$$

Πράγματι, γράφουμε

$$\zeta(\sigma+it) = u(\sigma,t) + iv(\sigma,t), \qquad u, v : \Omega \to \mathbb{R},$$

και υποθέτουμε ότι $\zeta(\sigma+it) \neq 0$. Τότε

$$\log|\zeta(\sigma+it)| = \frac{1}{2}\log\!\big(u(\sigma,t)^2 + v(\sigma,t)^2\big),$$

οπότε, για t σταθερό,

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\log|\zeta(\sigma+it)| = \frac{u\,u_{\sigma} + v\,v_{\sigma}}{u^2+v^2}.$$

Από την άλλη, επειδή η ζ είναι ολόμορφη, έχουμε

$$\zeta'(\sigma+it) = u_{\sigma}(\sigma,t) + i\,v_{\sigma}(\sigma,t),$$

άρα

$$\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)} = \frac{u_{\sigma}+iv_{\sigma}}{u+iv} = \frac{(u_{\sigma}+iv_{\sigma})(u-iv)}{u^2+v^2} = \frac{u\,u_{\sigma}+v\,v_{\sigma}}{u^2+v^2} + i\,\frac{u\,v_{\sigma}-v\,u_{\sigma}}{u^2+v^2}.$$

Συνεπώς

$$\mathrm{Re}\!\left(\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\right) = \frac{u\,u_{\sigma}+v\,v_{\sigma}}{u^2+v^2} = \frac{\partial}{\partial\sigma}\log|\zeta(\sigma+it)|.$$

Επειδή $\big(\log\zeta\big)' = \zeta'/\zeta$ όπου $\zeta \neq 0$, καταλήγουμε

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\log|\zeta(\sigma+it)| = \mathrm{Re}\big((\log\zeta)'(\sigma+it)\big).$$

Άρα

$$\frac{d}{d\sigma}\log G(\sigma) = 3\,\Re\!\left(\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma)\right) + 4\,\Re\!\left(\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+it)\right) + \Re\!\left(\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+2it)\right).$$

Επομένως

$$-\frac{d}{d\sigma}\log G(\sigma) = 3\,\Re\!\left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma)\right) + 4\,\Re\!\left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+it)\right) + \Re\!\left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+2it)\right).$$

Βήμα 2: Χρήση της Dirichlet σειράς (Λήμμα 2.10). Για $\sigma > 1$ έχουμε

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+iu) = \sum_{n\geq 1}\frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma+iu}} = \sum_{n\geq 1}\frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma}}\,e^{-iu\log n},$$

και επειδή η σύγκλιση είναι απόλυτη, παίρνουμε πραγματικά μέρη όρο-όρο:

$$\Re\Big(-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+iu)\Big) = \sum_{n\geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma}\cos(u\log n).$$

Άρα

$$-\frac{d}{d\sigma}\log G(\sigma) = \sum_{n\geq 1}\frac{\Lambda(n)}{n^\sigma}\Big(3+4\cos(t\log n)+\cos(2t\log n)\Big) = \sum_{n\geq 1}\frac{\Lambda(n)}{n^\sigma}P\big(t\log n\big).$$

Με το Λήμμα 2.11 έχουμε $P(\cdot)\geq 0$ και με $\Lambda(n)\geq 0$ παίρνουμε

$$-\frac{d}{d\sigma}\log G(\sigma)\geq 0.$$

Άρα $\frac{d}{d\sigma}\log G(\sigma)\leq 0$, δηλαδή η $\log G$ είναι φθίνουσα ως προς σ.

Βήμα 3: Πέρασμα στο όριο $\sigma\to\infty$. Για κάθε σταθερό u έχουμε

$$\zeta(\sigma+iu) = 1+\sum_{n\geq 2} n^{-(\sigma+iu)} \quad\Rightarrow\quad \big|\zeta(\sigma+iu)-1\big| \leq \sum_{n\geq 2} n^{-\sigma} \xrightarrow[\sigma\to\infty]{} 0.$$

Άρα $\zeta(\sigma+iu)\to 1$, οπότε $G(\sigma)\to 1$ όταν $\sigma\to\infty$. Επειδή $\log G$ είναι φθίνουσα στο σ, έχουμε για κάθε $\sigma>1$:

$$\log G(\sigma)\geq \lim_{\sigma\to\infty}\log G(\sigma) = 0,$$

δηλαδή $G(\sigma)\geq 1$. □

Θεώρημα 2.13. *Ισχύει* $\zeta(s)\neq 0$ *για κάθε* $s\in\mathbb{C}$ *με* $\Re(s)=1$.

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι $\zeta(1+it)\neq 0$ για κάθε $t\in\mathbb{R}$. Υποθέτουμε, προς άτοπο, ότι

$$\zeta(1+it)=0.$$

Από το Θεώρημα 2.9, η $\zeta(s)$ είναι αναλυτική σε κάθε σημείο της ευθείας $\Re(s)=1$ εκτός από ένα απλό πόλο στο $s=1$. Άρα $\zeta^3(\sigma)$ έχει πόλο τάξης 3 στο $\sigma=1$ και επίσης $\zeta^4(\sigma+it)$ έχει μηδενικό τάξης τουλάχιστον 4 στο $\sigma=1$ (δηλαδή στο σημείο $s=1+it$). Συνεπώς

$$\lim_{\sigma\to 1^+}\zeta^4(\sigma+it)\,\zeta^3(\sigma)=0.$$

Επιπλέον, επειδή ζ είναι αναλυτική στο σημείο $1+2it$ (αφού $t\neq 0$), είναι και συνεχής εκεί, οπότε

$$\lim_{\sigma\to 1^+}\zeta(\sigma+2it)=\zeta(1+2it).$$

Άρα

$$\lim_{\sigma\to 1^+}\zeta^4(\sigma+it)\,\zeta^3(\sigma)\,\zeta(\sigma+2it)=0.$$

Όμως, από το Λήμμα 2.12 ισχύει ότι για κάθε $\sigma>1$,

$$\big|\zeta^4(\sigma+it)\,\zeta^3(\sigma)\,\zeta(\sigma+2it)\big|\geq 1.$$

Επομένως το όριο καθώς $\sigma\to 1^+$ δεν μπορεί να είναι 0, που είναι άτοπο. Άρα η υπόθεση $\zeta(1+it)=0$ είναι ψευδής, και συνεπώς $\zeta(1+it)\neq 0$ για κάθε $t\neq 0$. Μαζί με το $t=0$ (όπου υπάρχει πόλος), παίρνουμε ότι $\zeta(s)\neq 0$ για κάθε s με $\Re(s)=1$. □

Παρατήρηση 2.14. Γιατί επιλέξαμε *αυτές* τις δυνάμεις; Το τρικ βασίζεται σε δύο *ταυτόχρονες* απαιτήσεις:

(i) Θέλουμε μη αρνητικότητα. Θέλουμε ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο $P(\theta)$ τέτοιο ώστε

$$P(\theta) = a_0 + a_1 \cos\theta + a_2 \cos(2\theta) \geq 0 \quad \forall\theta,$$

για να συμπεράνουμε ότι

$$-\frac{d}{d\sigma} \log G(\sigma) = \sum_{n\geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma} P(t \log n) \geq 0.$$

Το απλούστερο "τετράγωνο" που δίνει πολυώνυμο μέχρι βαθμό 2 είναι

$$(1 + \cos\theta)^2 = \frac{1}{2}\Big(3 + 4\cos\theta + \cos(2\theta)\Big).$$

Για να πάρουμε *ακέραιους* συντελεστές (ώστε να αντιστοιχούν σε *ακέραιες* δυνάμεις της ζ), πολλαπλασιάζουμε επί 2 και παίρνουμε ακριβώς

$$P(\theta) = 3 + 4\cos\theta + \cos(2\theta) = 2(1 + \cos\theta)^2 \geq 0.$$

Αυτό εξηγεί το σχήμα των δυνάμεων $3, 4, 1$.

(ii) Θέλουμε το μηδενικό να "νικάει" τον πόλο στο 1. Κοντά στο $\sigma = 1$ έχουμε $|\zeta(\sigma)| \asymp (\sigma-1)^{-1}$ (πόλος τάξης 1), ενώ αν υπήρχε μηδενικό στο $1 + it$ τάξης $m \geq 1$ τότε $|\zeta(\sigma + it)| \ll (\sigma - 1)^m$. Άρα, αν πάρεις

$$|\zeta(\sigma)|^{a_0} \, |\zeta(\sigma + it)|^{a_1}$$

με *ίδιους* εκθέτες $a_0 = a_1$ (όπως θα προέκυπτε από το πολυώνυμο $1 + \cos\theta$ ή $2 + 2\cos\theta$), τότε για απλό μηδενικό ($m = 1$) θα έχεις εκθέτη

$$-(a_0) + a_1 m = -a_0 + a_0 \cdot 1 = 0,$$

δηλαδή το γινόμενο *δεν* τείνει αναγκαστικά στο 0 όταν $\sigma \downarrow 1$, άρα δεν παίρνεις αντίφαση από το $G(\sigma) \geq 1$.

Στο δικό μας $G(\sigma)$ οι εκθέτες είναι $a_0 = 3$ για τον πόλο στο $s = 1$ και $a_1 = 4$ για το υποτιθέμενο μηδενικό στο $1 + it$. Τότε για $m = 1$ παίρνεις

$$-3 + 4 \cdot 1 = 1 > 0,$$

οπότε *αναγκαστικά* $G(\sigma) \to 0$ αν υπήρχε μηδενικό, και έτσι κλείνει η αντίφαση. Γι' αυτό οι "συγκεκριμένες" δυνάμεις είναι ακριβώς αυτές που χρειάζονται: προέρχονται από *τετράγωνο* (άρα μη αρνητικότητα) και ταυτόχρονα έχουν $4 > 3$ (άρα το μηδενικό υπερισχύει του πόλου).

3 Το «μιγαδικό» Korevaar–Zagier

Θεώρημα 3.1 (Korevaar–Zagier). *Έστω $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ φραγμένη και ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό φραγμένο υποδιάστημα του $[0, \infty)$. Θέτουμε*

$$g(s) := \int_0^\infty f(x) e^{-sx} \, dx \qquad (\mathrm{Re}(s) > 0).$$

Υποθέτουμε ότι υπάρχει ανοικτό σύνολο $G \subset \mathbb{C}$ με $\{\, \mathrm{Re}(s) \geq 0 \,\} \subset G$ και ολόμορφη επέκταση της g στο G (την οποία συμβολίζουμε πάλι με g). Τότε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int_0^\infty f(x) \, dx$$

συγκλίνει και ισχύει

$$\int_0^\infty f(x) \, dx = g(0).$$

Απόδειξη. Θέτουμε $M := \sup_{x\geq 0}|f(x)| < \infty$. Για $T > 0$ ορίζουμε

$$g_T(s) := \int_0^T f(x)e^{-sx}\,dx \qquad (s\in\mathbb{C}).$$

1) Το g_T είναι ολόμορφο (entire). Για κάθε $s \in \mathbb{C}$ το $x \mapsto f(x)e^{-sx}$ είναι ολοκληρώσιμο στο $[0,T]$, άρα το $g_T(s)$ ορίζεται. Επιπλέον, για $h \neq 0$ γράφουμε

$$\frac{g_T(s+h)-g_T(s)}{h} = \int_0^T f(x)e^{-sx}\,\frac{e^{-hx}-1}{h}\,dx.$$

Για σταθερό s και για h μικρό, ισχύει (με το θεώρημα μέσης τιμής στην πραγματική μεταβλητή)

$$\left|\frac{e^{-hx}-1}{h}\right| \leq x\,e^{|h|x} \leq x\,e^{x} \qquad (0\leq x\leq T),$$

οπότε το ολοκληρωτέο κυριαρχείται από την ολοκληρώσιμη συνάρτηση $M\,x\,e^{x}e^{|s|x}$, όπου $M = \sup_{[0,T]}|f|$. Άρα, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης, μπορούμε να περάσουμε στο όριο $h \to 0$ μέσα στο ολοκλήρωμα και παίρνουμε

$$g_T'(s) = \int_0^T f(x)e^{-sx}\lim_{h\to 0}\frac{e^{-hx}-1}{h}\,dx = -\int_0^T xf(x)e^{-sx}\,dx.$$

Επομένως g_T είναι μιγαδικά παραγωγίσιμη σε κάθε $s\in\mathbb{C}$, άρα ολόμορφη στο $\mathbb{C}$.
2) Στόχος. Αρκεί να δείξουμε ότι $g_T(0) \to g(0)$ όταν $T \to \infty$. Πράγματι, $g_T(0) = \int_0^T f(x)\,dx$, άρα το $\int_0^\infty f$ συγκλίνει και ισούται με $g(0)$.
3) Επιλογή καμπύλης ολοκλήρωσης γύρω από το 0. Σταθεροποιούμε $R > 0$. Θέτουμε

$$L_R := \{\, it:\ |t|\leq 2R \,\} \subset \{\, \mathrm{Re}(s) = 0 \,\} \subset G.$$

Για κάθε σημείο $z \in L_R$ υπάρχει ανοικτός δίσκος $B(z, r_z) \subset G$ (επειδή το G είναι ανοικτό). Από συμπάγεια του L_R (Heine–Borel) παίρνουμε πεπερασμένη υποκάλυψη, άρα υπάρχει $\delta = \delta(R) > 0$ τέτοια ώστε

$$D := \{\, z\in\mathbb{C}:\ |z| < 2R,\ \mathrm{Re}(z) > -2\delta \,\} \subset G.$$

Τότε επίσης η κλειστή καμπύλη

$$C := \partial\{\, z\in\mathbb{C}:\ |z|\leq R,\ \mathrm{Re}(z)\geq -\delta \,\}$$

βρίσκεται μέσα στο D και περικλείει το 0. (Γεωμετρικά: είναι *τόξο* του κύκλου $|z| = R$ για $\mathrm{Re}(z) \geq -\delta$ μαζί με τη *χορδή* $\mathrm{Re}(z) = -\delta$.)
4) Τύπος Cauchy για $g - g_T$ και «κόλπο» Carleman. Η συνάρτηση $h_T(z) := g(z) - g_T(z)$ είναι ολόμορφη στο D (ως διαφορά δύο ολόμορφων). Άρα από τον τύπο του Cauchy στο 0 παίρνουμε

$$g(0) - g_T(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{g(z)-g_T(z)}{z}\,dz. \tag{14}$$

Παρατηρούμε τώρα ότι:

- Η $(g-g_T)(z)e^{zT}$ είναι ολόμορφη στο D και στο $z = 0$ έχει την ίδια τιμή με $g - g_T$.
- Η $(g-g_T)(z)e^{zT}\cdot\dfrac{z}{R^2}$ είναι επίσης ολόμορφη στο D, άρα το ολοκλήρωμά της πάνω στο C είναι 0.

Συνεπώς, προσθέτοντας το μηδέν στο (14), παίρνουμε την ισοδυναμία

$$g(0) - g_T(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C (g(z) - g_T(z))\, e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{dz}{z}. \tag{15}$$

5) Διάσπαση $C = C_+ \cup C_-$. Θέτουμε

$$C_+ := C \cap \{\, \mathrm{Re}(z) \geq 0 \,\}, \qquad C_- := C \cap \{\, \mathrm{Re}(z) \leq 0 \,\}.$$

(Τα σημεία με $\mathrm{Re}(z) = 0$ είναι πεπερασμένα και δεν παίζουν ρόλο.)
6) Εκτίμηση στο C_+. Για $z \in C_+$ ισχύει $|z| = R$ και $\mathrm{Re}(z) > 0$, οπότε

$$g(z) - g_T(z) = \int_T^\infty f(t) e^{-zt}\, dt, \qquad \Rightarrow \qquad |g(z) - g_T(z)| \leq M \int_T^\infty e^{-(\mathrm{Re}\, z)\, t} dt = \frac{M e^{-(\mathrm{Re}\, z) T}}{\mathrm{Re}\, z}.$$

Επιπλέον, για $|z| = R$ έχουμε

$$\left| \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{1}{z} \right| = \frac{|1 + e^{2i\theta}|}{R} = \frac{2|\cos\theta|}{R} = \frac{2|\mathrm{Re}(z)|}{R^2},$$

όπου $z = Re^{i\theta}$. Άρα, στο C_+,

$$\left| (g - g_T)(z)\, e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{1}{z} \right| \leq \frac{M e^{-(\mathrm{Re}\, z) T}}{\mathrm{Re}\, z} \cdot e^{(\mathrm{Re}\, z) T} \cdot \frac{2\, \mathrm{Re}(z)}{R^2} = \frac{2M}{R^2}.$$

Επομένως

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_+} (g - g_T)(z) e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{dz}{z} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2M}{R^2} \cdot \mathrm{length}(C_+) \leq \frac{M}{R}, \tag{16}$$

αφού $\mathrm{length}(C_+) \leq \pi R$.
7) Εκτίμηση στο C_-: διάσπαση σε g και g_T. Από (15),

$$\int_{C_-} (g - g_T)(\cdot) = \int_{C_-} g(\cdot) \;-\; \int_{C_-} g_T(\cdot).$$

(i) Ο όρος με g_T. Η συνάρτηση

$$z \longmapsto g_T(z) e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{1}{z}$$

είναι ολόμορφη σε περιοχή που περιέχει τον «αριστερό θύλακα» που περικλείεται ανάμεσα στο C_- και στο αριστερό ημικύκλιο

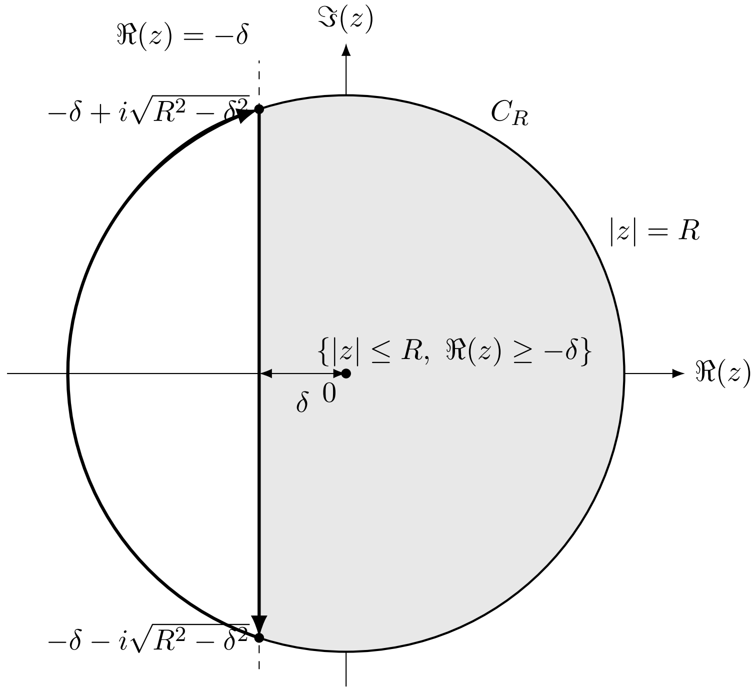
$$C'_- \;:=\; \{\, |z| = R,\; \mathrm{Re}(z) < 0 \,\}$$

(εφόσον ο θύλακας αυτός δεν περιέχει το 0). Άρα, με παραμόρφωση καμπύλης (θεώρημα Cauchy),

$$\int_{C_-} g_T(z) e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{dz}{z} = \int_{C'_-} g_T(z) e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{dz}{z}.$$

Για $z \in C'_-$ έχουμε $\mathrm{Re}(z) < 0$ και

$$|g_T(z)| \leq \int_0^T |f(t)| e^{-(\mathrm{Re}\, z) t} dt \leq M \int_0^T e^{-(\mathrm{Re}\, z) t} dt \leq M \frac{e^{-(\mathrm{Re}\, z) T}}{|\mathrm{Re}\, z|}.$$



Σχήμα 1: Το χωρίο $\{|z| \le R,\ \Re(z) \ge -\delta\}$ (σκιασμένο) και το περίγραμμα C_R: η χορδή $\Re(z) = -\delta$ (κάθοδος) και το τόξο $|z| = R$ στο $\Re(z) \ge -\delta$ (άνοδος).

Άρα, όπως πριν (και πάλι $|z| = R$),

$$\left| g_T(z)e^{zT}\Big(1+\frac{z^2}{R^2}\Big)\frac{1}{z} \right| \le \frac{Me^{-(\operatorname{Re} z)T}}{|\operatorname{Re} z|} \cdot e^{(\operatorname{Re} z)T} \cdot \frac{2|\operatorname{Re} z|}{R^2} = \frac{2M}{R^2}.$$

Έτσι παίρνουμε, ακριβώς όπως στο (16),

$$\left| \frac{1}{2\pi i}\int_{C_-} g_T(z)e^{zT}\Big(1+\frac{z^2}{R^2}\Big)\frac{dz}{z} \right| \le \frac{M}{R}. \tag{17}$$

(ii) Ο όρος με g. Θέτουμε

$$H(z) := g(z)\Big(1+\frac{z^2}{R^2}\Big)\frac{1}{z}.$$

Επειδή το C_- είναι συμπαγές, το $0 \notin C_-$ και η g είναι ολόμορφη (άρα συνεχής) σε γειτονιά του C_-, η H είναι συνεχής στο C_- και συνεπώς ομοιόμορφα φραγμένη εκεί:

$$B := \sup_{z\in C_-} |H(z)| < \infty.$$

Για κάθε $z \in C_-$ έχουμε $\operatorname{Re}(z) < 0$, άρα $e^{zT} \to 0$ καθώς $T \to \infty$ και επίσης

$$|e^{zT}| = e^{(\operatorname{Re} z)T} \le 1 \qquad (T > 0).$$

Επομένως

$$|H(z)e^{zT}| \le B \qquad (z \in C_-,\ T > 0),$$

και επειδή $H(z)e^{zT} \to 0$ σημειακά στο C_-, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης (με μέτρο μήκους πάνω στο C_-) παίρνουμε

$$\lim_{T\to\infty} \int_{C_-} H(z)e^{zT}\,dz = 0,$$

δηλαδή

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_-} g(z)e^{zT}\Big(1+\frac{z^2}{R^2}\Big)\frac{dz}{z} = 0. \tag{18}$$

8) Συμπέρασμα. Από (15) και τις (16), (17), (18) παίρνουμε: για κάθε σταθερό $R > 0$,

$$\limsup_{T\to\infty} |g(0) - g_T(0)| \le \frac{2M}{R}.$$

Δεδομένου $\varepsilon > 0$, επιλέγουμε R τόσο μεγάλο ώστε $2M/R \le \varepsilon/2$. Έπειτα, από (18) παίρνουμε T_0 τέτοιο ώστε για $T \ge T_0$ να ισχύει

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_-} g(z)e^{zT}\Big(1+\frac{z^2}{R^2}\Big)\frac{dz}{z} \right| \le \varepsilon/2.$$

Τότε, για κάθε $T \ge T_0$, από (15) προκύπτει $|g(0) - g_T(0)| \le \varepsilon$. Άρα $g_T(0) \to g(0)$.

Τέλος, επειδή $g_T(0) = \int_0^T f(x)\,dx$, συμπεραίνουμε ότι $\int_0^\infty f(x)\,dx$ συγκλίνει και ισούται με $g(0)$. □

Παρατήρηση 3.2 (Γιατί εισάγουμε το βάρος $e^{zT}\Big(1+\frac{z^2}{R^2}\Big)$). Το βάρος έχει διπλό ρόλο. Πρώτον, για $\mathrm{Re}(z) > 0$ έχουμε

$$(g-g_T)(z) = \int_T^\infty f(x)e^{-zx}\,dx, \qquad \Rightarrow \qquad (g-g_T)(z)e^{zT} = \int_0^\infty f(T+u)e^{-zu}\,du,$$

οπότε $|(g-g_T)(z)e^{zT}| \le M/\mathrm{Re}(z)$ (ομοιόμορφα ως προς T) και για $\mathrm{Re}(z) < 0$ το e^{zT} δίνει εκθετική απόσβεση καθώς $T \to \infty$. Δεύτερον, στον κύκλο $|z| = R$ ισχύει

$$\left|\Big(1+\frac{z^2}{R^2}\Big)\frac{1}{z}\right| = \frac{2|\,\mathrm{Re}(z)|}{R^2},$$

οπότε ο παράγοντας $|\,\mathrm{Re}(z)|$ ακυρώνει το $1/\,\mathrm{Re}(z)$ που προκύπτει από την προηγούμενη εκτίμηση και το ολοκληρωτέο γίνεται τάξης $O(1/R^2)$ πάνω στο τόξο, άρα το ολοκλήρωμα πάνω σε τόξο μήκους $O(R)$ είναι $O(1/R)$. Τέλος, επειδή $e^{zT}\big(1+\frac{z^2}{R^2}\big) = 1 + O(z)$ όταν $z \to 0$, το υπόλοιπο στο $z = 0$ δεν αλλάζει, οπότε η εισαγωγή του βάρους επιτρέπεται (θεώρημα Cauchy/υπολοίπων).

Παρατήρηση 3.3 (Γιατί παραμορφώνουμε από C_- σε C'_-.). Θέλουμε να εκτιμήσουμε

$$\int_{C_-} g_T(z)e^{zT}\Big(1+\frac{z^2}{R^2}\Big)\frac{dz}{z}.$$

Το περίγραμμα C_- περιέχει τμήμα πάνω στη χορδή $\mathrm{Re}(z) = -\delta$. Εκεί μπορεί να ισχύει

$$|g_T(z)| = \left|\int_0^T f(t)e^{-zt}\,dt\right| \le M\int_0^T e^{\delta t}\,dt \asymp \frac{e^{\delta T}}{\delta},$$

οπότε ο παράγοντας e^{zT} απλώς ακυρώνει το $e^{\delta T}$ και μένει μέγεθος τάξης $1/\delta$, δηλαδή δεν παίρνουμε φθορά όταν $T \to \infty$.

Αντίθετα, στο αριστερό ημικύκλιο

$$C'_- := \{\,|z| = R,\ \mathrm{Re}(z) < 0\,\}$$

έχουμε για $\mathrm{Re}(z) < 0$ την εκτίμηση

$$|g_T(z)e^{zT}| \le \frac{M}{|\,\mathrm{Re}(z)|},$$

ενώ πάνω στον κύκλο $|z| = R$ ισχύει

$$\left|\Big(1+\frac{z^2}{R^2}\Big)\frac{1}{z}\right| = \frac{2|\operatorname{Re}(z)|}{R^2}.$$

Άρα το $1/|\operatorname{Re}(z)|$ ακυρώνεται και το ολοκληρωτέο φράσσεται ομοιόμορφα από $O(1/R^2)$, πράγμα που δίνει

$$\int_{C'_-} g_T(z)e^{zT}\Big(1+\frac{z^2}{R^2}\Big)\frac{dz}{z} = O(1/R).$$

Η αντικατάσταση του C_- από το C'_- επιτρέπεται (παραμόρφωση καμπύλης / θεώρημα Cauchy), διότι η συνάρτηση $z \mapsto g_T(z)e^{zT}\big(1+\frac{z^2}{R^2}\big)\frac{1}{z}$ είναι ολόμορφη στην περιοχή ανάμεσα στις C_- και C'_- (ο «αριστερός θύλακας»), η οποία δεν περιέχει το $z = 0$.

Πόρισμα 3.4 (Tauberian). *Έστω $f : [1,\infty) \to \mathbb{C}$ φραγμένη και ολοκληρώσιμη σε κάθε $[1,T]$. Για $\Re(s) > 0$ θέτουμε*

$$g(s) = \int_1^\infty f(x)\, x^{-s}\, \frac{dx}{x}.$$

Αν υπάρχει ανοικτό $U \subset \mathbb{C}$ με $\{\Re(s) \geq 0\} \subset U$ τέτοιο ώστε το g να έχει ολόμορφη επέκταση στο U, τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^\infty f(x)\, \frac{dx}{x}$ συγκλίνει και ισούται με $g(0)$.

Απόδειξη. Θέτουμε $F(t) = f(e^t)$ για $t \geq 0$. Τότε

$$g(s) = \int_0^\infty F(t)e^{-st}\, dt$$

(αλλαγή μεταβλητής $x = e^t$). Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 9.3 στο F και παίρνουμε ότι $\int_0^\infty F(t)\, dt$ υπάρχει και ισούται με $g(0)$. Με την αντίστροφη αλλαγή μεταβλητής,

$$\int_0^\infty F(t)\, dt = \int_1^\infty f(x)\, \frac{dx}{x}.$$

□

3.1 Ένα βοηθητικό λήμμα: σύγκλιση $\int (A(x)-x)/x^2 \Rightarrow A(x) \sim x$

Λήμμα 3.5. *Έστω $A : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ αύξουσα. Αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα*

$$\int_1^\infty \frac{A(t)-t}{t^2}\, dt$$

συγκλίνει, τότε $A(x) \sim x$ όταν $x \to \infty$, δηλαδή $\frac{A(x)}{x} \to 1$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε προς άτοπο ότι $\limsup_{x\to\infty} \frac{A(x)}{x} > \lambda > 1$. Τότε υπάρχουν άπειρα x με $A(x) \geq \lambda x$. Για ένα τέτοιο x και για κάθε $t \in [x, \lambda x]$, από την αύξηση παίρνουμε $A(t) \geq A(x) \geq \lambda x$, άρα

$$\int_x^{\lambda x} \frac{A(t)-t}{t^2}\, dt \geq \int_x^{\lambda x} \frac{\lambda x - t}{t^2}\, dt.$$

Με αλλαγή $t = ux$ (δηλαδή $dt = x\, du$) έχουμε

$$\int_x^{\lambda x} \frac{\lambda x - t}{t^2}\, dt = \int_1^{\lambda} \frac{\lambda - u}{u^2}\, du =: c(\lambda) > 0,$$

σταθερά που εξαρτάται μόνο από λ. Άρα, για άπειρα x ισχύει

$$\left|\int_x^\infty \frac{A(t)-t}{t^2}\, dt - \int_{\lambda x}^\infty \frac{A(t)-t}{t^2}\, dt\right| = \left|\int_x^{\lambda x} \frac{A(t)-t}{t^2}\, dt\right| \geq c(\lambda) > 0.$$

Όμως τα δύο αριστερά ολοκληρώματα είναι *ουρές* ενός συγκλίνοντος ολοκληρώματος, άρα καθώς $x \to \infty$ και τα δύο τείνουν στο 0 και η διαφορά τους πρέπει να τείνει στο 0, άτοπο. Άρα $\limsup_{x\to\infty} A(x)/x \le 1$.

Ομοίως, αν $\liminf_{x\to\infty} A(x)/x < \mu < 1$, τότε για άπειρα x έχουμε $A(x) \le \mu x$ και για $t \in [\mu x, x]$ παίρνουμε $A(t) \le A(x) \le \mu x$, άρα

$$\int_{\mu x}^{x} \frac{A(t)-t}{t^2}\,dt \le \int_{\mu x}^{x} \frac{\mu x - t}{t^2}\,dt = -\int_{\mu}^{1} \frac{u-\mu}{u^2}\,du =: -c'(\mu) < 0,$$

και ξανά παίρνουμε αντίφαση με τη σύγκλιση των ουρών. Άρα $\liminf_{x\to\infty} A(x)/x \ge 1$. Συνεπώς $\frac{A(x)}{x} \to 1$. □

Θεώρημα 3.6. *Έστω* $a_n \ge 0$ *και*

$$A(x) := \sum_{n\le x} a_n.$$

Υποθέτουμε ότι $A(x) = O(x)$. *Θέτουμε τη Dirichlet σειρά*

$$F(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \qquad \Re(s) > 1.$$

Υποθέτουμε ότι η $F(s)$ *έχει αναλυτική συνέχεια στο* $\Re(s) \ge 1$ *εκτός από έναν απλό πόλο στο* $s = 1$ *με υπόλοιπο* 1. *Τότε*

$$A(x) \sim x \qquad (x \to \infty).$$

Απόδειξη. **Βήμα 1: Μερική άθροιση** Για $\Re(s) > 1$ ισχύει η ταυτότητα:

$$\sum_{n\le X} \frac{a_n}{n^s} = \frac{A(X)}{X^s} + s\int_1^X \frac{A(x)}{x^{s+1}}\,dx.$$

Επειδή $A(X) = O(X)$ και $\Re(s) > 1$, έχουμε $A(X)X^{-s} \to 0$ καθώς $X \to \infty$. Άρα, περνώντας στο όριο $X \to \infty$,

$$F(s) = s\int_1^{\infty} \frac{A(x)}{x^{s+1}}\,dx \qquad (\Re(s) > 1). \tag{19}$$

Βήμα 2: Αφαίρεση του πόλου στο $s = 1$ **και αναλυτική συνέχεια στο** $\Re(z) \ge 0$. Θέτουμε $s = 1 + z$ (οπότε $\Re(z) > 0$) και ορίζουμε

$$H(z) := \frac{F(1+z)}{1+z} - \frac{1}{z}.$$

Η υπόθεση "F έχει απλό πόλο στο $s = 1$ με υπόλοιπο 1" ισοδυναμεί με το ότι $F(1+z) = \frac{1}{z} + (\text{ολόμορφος όρος})$ κοντά στο $z = 0$. Άρα ο $H(z)$ είναι ολόμορφος σε γειτονιά του $z = 0$ και επιπλέον έχει αναλυτική συνέχεια στο $\Re(z) \ge 0$.

Βήμα 3: Αναπαράσταση του H. Από (19) με $s = 1 + z$ παίρνουμε, για $\Re(z) > 0$,

$$\frac{F(1+z)}{1+z} = \int_1^{\infty} \frac{A(x)}{x^{2+z}}\,dx = \int_1^{\infty} \frac{A(x)}{x}\,x^{-z}\,\frac{dx}{x}.$$

Επίσης για $\Re(z) > 0$ ισχύει

$$\frac{1}{z} = \int_1^{\infty} x^{-z}\,\frac{dx}{x}.$$

Άρα, για $\Re(z) > 0$,

$$H(z) = \int_1^{\infty} \left(\frac{A(x)}{x} - 1\right) x^{-z}\,\frac{dx}{x}. \tag{20}$$

Βήμα 4: Εφαρμογή του Θεωρήματος. Θέτουμε

$$f(x) := \frac{A(x)}{x} - 1.$$

Από $A(x) = O(x)$ έχουμε ότι f είναι φραγμένη στο $[1, \infty)$, και είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε $[1, X]$. Η σχέση (20) λέει ότι για $\Re(z) > 0$ η Mellin μετασχηματισμένη της f είναι $H(z)$, η οποία (από το Βήμα 2) έχει αναλυτική συνέχεια στο $\Re(z) \geq 0$. Άρα, από το Θεώρημα 9.3, το ολοκλήρωμα

$$\int_1^\infty \left(\frac{A(x)}{x} - 1 \right) \frac{dx}{x} = \int_1^\infty \frac{A(x) - x}{x^2} \, dx$$

συγκλίνει.

Βήμα 5: Συμπέρασμα $A(x) \sim x$. Η $A(x)$ είναι αύξουσα (επειδή $a_n \geq 0$). Επομένως, από το Λήμμα 3.5 συμπεραίνουμε $\frac{A(x)}{x} \to 1$, δηλαδή $A(x) \sim x$. □

Μένει να αποδείξουμε ότι τα παραπάνω μπορούμε να τα εφαρμόσουμε για την συνάρτηση ψ.

Θεώρημα 3.7 (Εκτίμηση Chebyshev). *Ορίζουμε τη συνάρτηση von Mangoldt*

$$\Lambda(n) := \begin{cases} \log p, & \text{αν } n = p^k \text{ για κάποιο πρώτο } p \text{ και } k \geq 1, \\ 0, & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

και τη συνάρτηση Chebyshev

$$\psi(x) := \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \qquad (x \geq 1).$$

Τότε ισχύει

$$\psi(x) \asymp x \qquad \text{ομοιόμορφα για } x \geq 2,$$

δηλαδή υπάρχουν σταθερές $c_1, c_2 > 0$ ώστε $c_1 x \leq \psi(x) \leq c_2 x$ για κάθε $x \geq 2$.

Απόδειξη. **1) Ένα λήμμα για εναλλασσόμενες σειρές.** Αν $(a_n)_{n \geq 1}$ είναι ακολουθία μη αρνητικών πραγματικών που φθίνει προς το 0, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1} a_n$ συγκλίνει και ισχύει

$$a_1 - a_2 \ \leq \ \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1} a_n \ \leq \ a_1 - a_2 + a_3. \tag{21}$$

Πράγματι, τα μερικά αθροίσματα γράφονται ως

$$(a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots \geq a_1 - a_2,$$

ενώ

$$(a_1 - a_2 + a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots \leq a_1 - a_2 + a_3,$$

επειδή $a_{2j-1} - a_{2j} \geq 0$ και $a_{2j} - a_{2j+1} \geq 0$.

2) Ορισμός της $T(x)$ και ταύτιση με $\sum_{n \leq x} \log n$. Για $x \geq 1$ θέτουμε

$$T(x) := \sum_{n \leq x} \psi\left(\frac{x}{n}\right).$$

Θα δείξουμε ότι

$$T(x) = \sum_{n \leq x} \log n. \tag{22}$$

Χρησιμοποιούμε την κλασική ταυτότητα

$$\sum_{d\,|\,n} \Lambda(d) = \log n, \tag{23}$$

η οποία προκύπτει από την παραγοντοποίηση $n = \prod p^{\alpha_p}$: το άθροισμα στα $d|n$ με $\Lambda(d) \neq 0$ δίνει $\sum_p \alpha_p \log p = \log n$. Άρα

$$\sum_{n\le x} \log n = \sum_{n\le x} \sum_{d\,|\,n} \Lambda(d) = \sum_{d\le x} \Lambda(d) \sum_{\substack{n\le x\\ d|n}} 1 = \sum_{d\le x} \Lambda(d) \sum_{k\le x/d} 1.$$

Αλλά

$$\sum_{d\le x} \Lambda(d) \sum_{k\le x/d} 1 = \sum_{k\le x} \sum_{d\le x/k} \Lambda(d) = \sum_{k\le x} \psi\Big(\frac{x}{k}\Big) = T(x),$$

οπότε ισχύει (22).

3) Ασύμπτωτη για $\sum_{n\le x} \log n$ και συνέπεια για $T(x)$. Για $x \ge 2$ έχουμε (σύγκριση αθροίσματος με ολοκλήρωμα)

$$\int_1^x \log t\,dt \;\le\; \sum_{n\le x} \log n \;\le\; \int_1^x \log t\,dt + \log x,$$

άρα

$$\sum_{n\le x} \log n = x\log x - x + \mathcal{O}(\log x) \qquad (x \ge 2). \tag{24}$$

Με (22) συμπεραίνουμε

$$T(x) = x\log x - x + \mathcal{O}(\log x) \qquad (x \ge 2). \tag{25}$$

Επομένως

$$T(x) - 2T\Big(\frac{x}{2}\Big) = (\log 2)\,x + \mathcal{O}(\log x) \qquad (x \ge 2). \tag{26}$$

(Πράγματι, αντικαθιστώντας την (25) στα δύο μέλη και απλοποιώντας, παίρνουμε τον κύριο όρο $(\log 2)x$, ενώ τα σφάλματα παραμένουν $\mathcal{O}(\log x)$.)

4) Εναλλασσόμενο άθροισμα για $T(x) - 2T(x/2)$. Από τον ορισμό,

$$T(x) - 2T\Big(\frac{x}{2}\Big) = \sum_{n\le x} \psi\Big(\frac{x}{n}\Big) - 2\sum_{n\le x/2} \psi\Big(\frac{x}{2n}\Big).$$

Επειδή $\psi(y) = 0$ για $0 < y < 1$ (το άθροισμα είναι κενό), έχουμε $\psi(x/(2n)) = 0$ όταν $x/2 < n \le x$, οπότε

$$\sum_{n\le x/2} \psi\Big(\frac{x}{2n}\Big) = \sum_{n\le x} \psi\Big(\frac{x}{2n}\Big).$$

Άρα

$$T(x) - 2T\Big(\frac{x}{2}\Big) = \sum_{n\le x} \psi\Big(\frac{x}{n}\Big) - 2\sum_{n\le x} \psi\Big(\frac{x}{2n}\Big). \tag{27}$$

Με αλλαγή δείκτη $m = 2n$ έχουμε

$$2\sum_{n\le x} \psi\Big(\frac{x}{2n}\Big) = 2\sum_{\substack{m\le x\\ 2|m}} \psi\Big(\frac{x}{m}\Big),$$

και έτσι το δεξί μέλος του (27) γράφεται ως

$$\sum_{\substack{m \le x \\ m \text{ περιττός}}} \psi\Big(\frac{x}{m}\Big) - \sum_{\substack{m \le x \\ m \text{ άρτιος}}} \psi\Big(\frac{x}{m}\Big) = \sum_{n \le x} (-1)^{n-1} \psi\Big(\frac{x}{n}\Big).$$

Επιπλέον, αν $n > x$ τότε $x/n < 1$ και $\psi(x/n) = 0$, άρα

$$T(x) - 2T\Big(\frac{x}{2}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \psi\Big(\frac{x}{n}\Big). \tag{28}$$

5) Εφαρμογή του (21)**.** Για σταθερό $x \ge 2$ θέτουμε $a_n := \psi(x/n)$. Επειδή η ψ είναι μη φθίνουσα ως συνάρτηση του ορίσματος και x/n φθίνει με το n, η ακολουθία (a_n) είναι μη αύξουσα. Επίσης $a_n = 0$ για $n > x$, άρα $a_n \to 0$. Επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε το (21) στη σειρά (28) και παίρνουμε

$$\psi(x) - \psi\Big(\frac{x}{2}\Big) \ \le\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \psi\Big(\frac{x}{n}\Big) \ \le\ \psi(x) - \psi\Big(\frac{x}{2}\Big) + \psi\Big(\frac{x}{3}\Big). \tag{29}$$

Συνδυάζοντας (26) και (28)–(29) παίρνουμε, για κάθε $x \ge 2$,

$$\psi(x) - \psi\Big(\frac{x}{2}\Big) \le (\log 2)\, x + \mathcal{O}(\log x), \tag{30}$$

$$\psi(x) - \psi\Big(\frac{x}{2}\Big) + \psi\Big(\frac{x}{3}\Big) \ge (\log 2)\, x + \mathcal{O}(\log x). \tag{31}$$

6) Άνω φράγμα $\psi(x) \ll x$**.** Θέτουμε r τον μέγιστο ακέραιο με $2^r < x$ (οπότε $x/2^{r+1} < 1$ και $\psi(x/2^{r+1}) = 0$). Γράφουμε τηλεσκοπικά

$$\psi(x) = \sum_{j=0}^{r} \Big(\psi\Big(\frac{x}{2^j}\Big) - \psi\Big(\frac{x}{2^{j+1}}\Big) \Big).$$

Εφαρμόζοντας την (30) στο $x/2^j$, παίρνουμε

$$\psi\Big(\frac{x}{2^j}\Big) - \psi\Big(\frac{x}{2^{j+1}}\Big) \le (\log 2)\, \frac{x}{2^j} + \mathcal{O}\big(\log(x/2^j)\big).$$

Αθροίζοντας για $j = 0, \ldots, r$,

$$\psi(x) \le (\log 2)\, x \sum_{j=0}^{r} \frac{1}{2^j} + \mathcal{O}\left(\sum_{j=0}^{r} \log(x/2^j) \right).$$

Έχουμε $\sum_{j=0}^{r} 2^{-j} \le 2$ και

$$\sum_{j=0}^{r} \log(x/2^j) = (r+1) \log x - (\log 2) \sum_{j=0}^{r} j = \mathcal{O}\big((\log x)^2\big),$$

άρα

$$\psi(x) \le 2(\log 2)\, x + \mathcal{O}\big((\log x)^2\big) \ll x \qquad (x \ge 2). \tag{32}$$

7) Κάτω φράγμα $\psi(x) \gg x$**.** Από (31) και (32) (εφαρμοσμένη στο $x/3$) παίρνουμε

$$\psi(x) - \psi\Big(\frac{x}{2}\Big) \ge (\log 2)\, x - \psi\Big(\frac{x}{3}\Big) + \mathcal{O}(\log x) \ge (\log 2)\, x - \frac{2(\log 2)}{3} x + \mathcal{O}\big((\log x)^2\big),$$

δηλαδή
$$\psi(x) - \psi\Big(\frac{x}{2}\Big) \geq \frac{\log 2}{3}\, x + \mathcal{O}\big((\log x)^2\big). \tag{33}$$
Άρα υπάρχει $x_0 \geq 2$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \geq x_0$ να ισχύει
$$\psi(x) - \psi\Big(\frac{x}{2}\Big) \geq \frac{\log 2}{6}\, x. \tag{34}$$
Τότε, για $x \geq x_0$, τηλεσκοπώντας όπως πριν και εφαρμόζοντας (34) στα $x/2^j$ όσο $x/2^j \geq x_0$, παίρνουμε
$$\psi(x) \geq \sum_{0\leq j\leq J} \Big(\psi\Big(\frac{x}{2^j}\Big) - \psi\Big(\frac{x}{2^{j+1}}\Big)\Big) \geq \frac{\log 2}{6} \sum_{0\leq j\leq J} \frac{x}{2^j} \geq \frac{\log 2}{6}\, x,$$
όπου J είναι ο μέγιστος ακέραιος με $x/2^J \geq x_0$ (οπότε $\sum_{j=0}^{J} 2^{-j} \geq 1$). Τέλος, αν θέσουμε
$$c_1 := \min\Big\{\frac{\log 2}{6},\ \min_{2\leq x\leq x_0} \frac{\psi(x)}{x}\Big\} > 0,$$
τότε $c_1 x \leq \psi(x)$ για όλα τα $x \geq 2$.

Από (32) παίρνουμε επίσης $\psi(x) \leq c_2 x$ για κάποιο $c_2 > 0$ και για όλα τα $x \geq 2$. Άρα $\psi(x) \asymp x$ ομοιόμορφα για $x \geq 2$. □

Παρατήρηση 3.8 (Γιατί η ψ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος 3.6). Θέτουμε $a_n := \Lambda(n) \geq 0$ και
$$A(x) = \sum_{n\leq x} a_n = \sum_{n\leq x} \Lambda(n) = \psi(x).$$
Από την εκτίμηση Chebyshev, Θεώρημα 3.7, που αποδείξαμε προηγουμένως έχουμε $\psi(x) \ll x$, άρα $A(x) = O(x)$. Η αντίστοιχη Dirichlet σειρά είναι
$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$
Για $\Re(s) > 1$ γνωρίζουμε ότι
$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s},$$
δηλαδή $F(s) = -\zeta'(s)/\zeta(s)$ στο ημιεπίπεδο $\Re(s) > 1$.

Από τη σχέση που αποδείχθηκε για τη ζ (αναλυτική συνέχιση της ζ στο $\Re(s) > 0$ με απλό πόλο στο $s = 1$ και υπόλοιπο 1), συμπεραίνουμε ότι:

- Η $\zeta(s)$ είναι ολόμορφη στο $\Re(s) \geq 1$ εκτός από απλό πόλο στο $s = 1$.
- Στο $\Re(s) \geq 1$ δεν υπάρχουν μηδενικά της ζ (η $\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} n^{-s}$ έχει θετική πραγματική τιμή για $s > 1$, και η αναλυτική της συνέχεια στο $\Re(s) \geq 1$ δεν μπορεί να αποκτήσει μηδενικό πάνω στη γραμμή $\Re(s) = 1$ χωρίς να παραβιάζεται η γνωστή μορφή του πόλου στο 1).

Συνεπώς, η συνάρτηση $F(s) = -\zeta'(s)/\zeta(s)$ έχει αναλυτική συνέχεια στο $\Re(s) \geq 1$ εκτός από ενδεχόμενες ιδιομορφίες στα σημεία όπου $\zeta(s) = 0$ και στο $s = 1$. Στο $\Re(s) \geq 1$ όμως δεν έχουμε μηδενικά, άρα η μόνη ιδιομορφία προέρχεται από το $s = 1$.

Τέλος, επειδή κοντά στο $s = 1$ έχουμε
$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + h(s) \qquad \text{με } h \text{ ολόμορφη κοντά στο } 1,$$

παίρνουμε

$$\zeta'(s) = -\frac{1}{(s-1)^2} + h'(s), \qquad -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{1}{s-1} + (\text{ολόμορφος όρος κοντά στο } 1).$$

Άρα η $F(s) = -\zeta'(s)/\zeta(s)$ έχει *απλό πόλο* στο $s = 1$ με *υπόλοιπο* 1.

Με άλλα λόγια, για την ακολουθία $a_n = \Lambda(n)$ ισχύουν όλες οι υποθέσεις του Θεωρήματος 3.6.

4 Το Θεώρημα Dirichlet σε αριθμητικές προόδους

Θεωρούμε $q \geq 2$ και $(a, q) = 1$. Ορίζουμε τη συνάρτηση Chebyshev σε αριθμητική πρόοδο

$$\psi(x; q, a) := \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv a \pmod{q}}} \Lambda(n).$$

Για $\mathrm{Re}(s) > 1$ ορίζουμε τη Dirichlet σειρά

$$F_{q,a}(s) := \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \equiv a \pmod{q}}} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

Επειδή $\Lambda(n) \geq 0$ και $\psi(x; q, a) \leq \psi(x)$, από το Chebyshev φράγμα για την ψ έχουμε $\psi(x; q, a) = O(x)$ και η $F_{q,a}(s)$ συγκλίνει για $\mathrm{Re}(s) > 1$.

Θεώρημα 4.1 (Θεώρημα Dirichlet για πρώτους σε αριθμητικές προόδους (αναλυτική μορφή)). *Έστω $q \geq 2$ και a με $(a, q) = 1$. Ορίζουμε*

$$\psi(x; q, a) := \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv a \pmod{q}}} \Lambda(n), \qquad F_{q,a}(s) := \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \equiv a \pmod{q}}} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \qquad (\mathrm{Re}(s) > 1).$$

Τότε:

1. *Η $F_{q,a}(s)$ επεκτείνεται μερομορφικά στο ημιεπίπεδο $\mathrm{Re}(s) \geq 1$ και έχει εκεί μοναδικό απλό πόλο στο $s = 1$, με υπόλοιπο*

$$\mathrm{Res}_{s=1} F_{q,a}(s) = \frac{1}{\varphi(q)}.$$

2. *Ισχύει η ασυμπτωτική*

$$\psi(x; q, a) \sim \frac{x}{\varphi(q)} \qquad (x \to \infty).$$

Ισοδύναμα, υπάρχουν άπειροι πρώτοι $p \equiv a \pmod{q}$.

Μερική άθροιση Θέτουμε $A(x) := \psi(x; q, a)$. Για $\mathrm{Re}(s) > 1$ ισχύει η κλασική ταυτότητα μερικής άθροισης

$$\sum_{\substack{n \leq X \\ n \equiv a \ (q)}} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = \frac{A(X)}{X^s} + s \int_1^X \frac{A(x)}{x^{s+1}} \, dx.$$

Επειδή $A(X) = O(X)$ και $\mathrm{Re}(s) > 1$, έχουμε $A(X)X^{-s} \to 0$ όταν $X \to \infty$, οπότε περνώντας στο όριο

$$F_{q,a}(s) = s \int_1^\infty \frac{\psi(x; q, a)}{x^{s+1}} \, dx, \tag{35}$$

για $\mathrm{Re}(s) > 1$. Ακριβώς όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος των Πρώτων, για να πάρουμε ασυμπτωτική της $\psi(x; q, a)$ χρειαζόμαστε πληροφορία για την αναλυτική επέκταση της $F_{q,a}(s)$ μέχρι την ευθεία $\mathrm{Re}(s) = 1$.

4.1 Ορθογωνιότητα χαρακτήρων και αναγωγή σε $-L'/L$

Λήμμα 4.2 (Ορθογωνιότητα). *Για $(a,q)=1$ και κάθε ακέραιο n ισχύει*

$$\mathbf{1}_{n\equiv a\ (q)} = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \pmod q} \overline{\chi}(a)\,\chi(n),$$

όπου το άθροισμα τρέχει σε όλους τους Dirichlet χαρακτήρες modulo q (επεκτεινόμενους με $\chi(n)=0$ όταν $(n,q)>1$).

Απόδειξη. Αν $(n,q)>1$, τότε $\chi(n)=0$ για κάθε χ, ενώ $\mathbf{1}_{n\equiv a(q)}=0$ επειδή $(a,q)=1$. Αν $(n,q)=1$, τότε η ταυτότητα είναι ακριβώς η ορθογωνιότητα των χαρακτήρων της ομάδας $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$:

$$\frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi} \overline{\chi}(a)\chi(n) = \begin{cases} 1, & n\equiv a \pmod q, \\ 0, & n\not\equiv a \pmod q. \end{cases}$$

□

Για $\mathrm{Re}(s)>1$, από το Λήμμα 4.2 παίρνουμε

$$F_{q,a}(s) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \pmod q} \overline{\chi}(a) \sum_{n\ge 1} \frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n^s}. \tag{36}$$

Ορισμός $L(s,\chi)$ (ως Dirichlet σειρά, χωρίς Euler προϊόν). Για κάθε χαρακτήρα χ ορίζουμε

$$L(s,\chi) := \sum_{n\ge 1} \frac{\chi(n)}{n^s}, \qquad \mathrm{Re}(s)>1,$$

και επίσης

$$F_\chi(s) := \sum_{n\ge 1} \frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n^s}, \qquad \mathrm{Re}(s)>1.$$

Λήμμα 4.3. *Για κάθε $n\ge 1$ ισχύει $\sum_{d|n}\Lambda(d)=\log n$.*

Απόδειξη. (Όπως στο ΠΘΠ.) Αν $n=p^k$, τότε $\sum_{d|p^k}\Lambda(d) = \Lambda(p)+\cdots+\Lambda(p^k) = \log p = \log(p^k)/k$; αλλά μόνο το $d=p$ συμβάλλει, άρα $\sum_{d|p^k}\Lambda(d) = \log p^k = \log n$. Αν n δεν είναι δύναμη πρώτου, το άθροισμα είναι $0=\log n$; συνολικά παίρνουμε την ταυτότητα. □

Πρόταση 4.4. *Για $\mathrm{Re}(s)>1$ ισχύει η ταυτότητα*

$$-L'(s,\chi) = L(s,\chi)\,F_\chi(s). \tag{37}$$

Απόδειξη. (Ακριβώς όπως στο ΠΘΠ για την ζ, αλλά με χ.) Για $\sigma := \mathrm{Re}(s)>1$ Για $\sigma := \mathrm{Re}(s)>1$ οι σειρές

$$L(s,\chi) = \sum_{m\ge 1}\frac{\chi(m)}{m^s}, \qquad F_\chi(s) = \sum_{n\ge 1}\frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n^s}$$

συγκλίνουν απολύτως, αφού

$$\sum_{m\ge 1}\frac{|\chi(m)|}{m^\sigma} \le \sum_{m\ge 1}\frac{1}{m^\sigma} < \infty, \qquad \sum_{n\ge 1}\frac{|\Lambda(n)\chi(n)|}{n^\sigma} \le \sum_{n\ge 1}\frac{\Lambda(n)}{n^\sigma} < \infty.$$

Επομένως μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε τις δύο σειρές και να αναδιατάξουμε το διπλό άθροισμα (Tonelli/Fubini), οπότε παίρνουμε το Cauchy product:

$$\begin{aligned} L(s,\chi)F_\chi(s) &= \left(\sum_{m\geq 1}\frac{\chi(m)}{m^s}\right)\left(\sum_{n\geq 1}\frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n^s}\right) \\ &= \sum_{m\geq 1}\sum_{n\geq 1}\frac{\chi(m)\Lambda(n)\chi(n)}{(mn)^s}. \end{aligned}$$

Τώρα ομαδοποιούμε τους όρους ως προς $k = mn$: για σταθερό $k \geq 1$ οι λύσεις $mn = k$ αντιστοιχούν ακριβώς στους διαιρέτες $d \mid k$ θέτοντας $n = d$ και $m = k/d$. Άρα

$$\sum_{m\geq 1}\sum_{n\geq 1}\frac{\chi(m)\Lambda(n)\chi(n)}{(mn)^s} = \sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^s}\sum_{d|k}\chi\left(\frac{k}{d}\right)\Lambda(d)\chi(d),$$

δηλαδή

$$L(s,\chi)F_\chi(s) = \sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^s}\sum_{d|k}\chi\left(\frac{k}{d}\right)\chi(d)\Lambda(d).$$

Αν $(k,q) = 1$, τότε $\chi(k/d)\chi(d) = \chi(k)$ και

$$\sum_{d|k}\chi\left(\frac{k}{d}\right)\chi(d)\Lambda(d) = \chi(k)\sum_{d|k}\Lambda(d) = \chi(k)\log k$$

με το Λήμμα 4.3. Αν $(k,q) > 1$, τότε $\chi(k) = 0$ και κάθε όρος στο άθροισμα είναι 0 (επειδή τότε d ή k/d έχει κοινό διαιρέτη με q), άρα πάλι ο συντελεστής είναι $\chi(k)\log k = 0$. Συνεπώς

$$L(s,\chi)F_\chi(s) = \sum_{k\geq 1}\frac{\chi(k)\log k}{k^s}.$$

Τέλος,

$$L'(s,\chi) = \frac{d}{ds}\sum_{k\geq 1}\frac{\chi(k)}{k^s} = -\sum_{k\geq 1}\frac{\chi(k)\log k}{k^s},$$

οπότε παίρνουμε (37). □

Θεώρημα 4.5. *Για κάθε χαρακτήρα χ και κάθε s με $\mathrm{Re}(s) > 1$ ισχύει $L(s,\chi) \neq 0$.*

Απόδειξη. (Ίδια ακριβώς ιδέα με το Θεώρημα 2.7 στο ΠΘΠ.) Έστω προς άτοπο ότι $L(s_0,\chi) = 0$ για κάποιο s_0 με $\mathrm{Re}(s_0) > 1$, και έστω $m \geq 1$ η τάξη του μηδενικού. Τότε $-L'(s,\chi)$ έχει μηδενικό τάξης ακριβώς $m-1$ στο s_0. Όμως από την Πρόταση 4.4 έχουμε $-L'(s,\chi) = L(s,\chi)F_\chi(s)$, όπου F_χ είναι ολόμορφη στο $\mathrm{Re}(s) > 1$ (από απόλυτη σύγκλιση), άρα το δεξί μέλος έχει μηδενικό τάξης τουλάχιστον m στο s_0. Αντίφαση. Άρα $L(s,\chi) \neq 0$ στο $\mathrm{Re}(s) > 1$. □

Πόρισμα 4.6. *Στο $\mathrm{Re}(s) > 1$ ισχύει*

$$-\frac{L'}{L}(s,\chi) = \sum_{n\geq 1}\frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n^s}.$$

Απόδειξη. Διαιρούμε την (37) με $L(s,\chi)$ (επιτρέπεται από το Θεώρημα 4.5). □

Άρα, από (36) και το Κορ. 4.6, παίρνουμε στο $\mathrm{Re}(s) > 1$:

$$F_{q,a}(s) = -\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi \pmod q}\overline{\chi}(a)\,\frac{L'}{L}(s,\chi). \tag{38}$$

4.2 Αναλυτική συνέχεια των $L(s,\chi)$ στο $\mathrm{Re}(s)>0$ (όπως για την ζ)

Λήμμα 4.7. *Αν χ είναι μη κύριος χαρακτήρας modulo q, τότε τα μερικά αθροίσματα*

$$S_\chi(x) := \sum_{n\le x} \chi(n)$$

είναι φραγμένα, δηλαδή $S_\chi(x) = O(1)$.

Απόδειξη. Εφόσον χ είναι μη κύριος, υπάρχει a με $(a,q)=1$ και $\chi(a)\neq 1$. Τότε, επειδή ο πολλαπλασιασμός με a μεταθέτει το πλήρες σύστημα υπολοίπων modulo q, έχουμε

$$\sum_{n=1}^{q} \chi(n) = \sum_{n=1}^{q} \chi(an) = \chi(a)\sum_{n=1}^{q}\chi(n),$$

άρα $\sum_{n=1}^{q}\chi(n)=0$. Γράφοντας $N=kq+r$ με $0\le r<q$ παίρνουμε

$$\sum_{n=1}^{N}\chi(n) = k\sum_{n=1}^{q}\chi(n) + \sum_{n=1}^{r}\chi(n) = \sum_{n=1}^{r}\chi(n),$$

οπότε $\left|\sum_{n=1}^{N}\chi(n)\right| \le \sum_{n=1}^{r}|\chi(n)| \le r \le q$. □

Πρόταση 4.8. *Αν χ είναι μη κύριος χαρακτήρας modulo q, τότε η $L(s,\chi)$ επεκτείνεται ως ολόμορφη συνάρτηση στο ημιεπίπεδο $\mathrm{Re}(s)>0$.*

Απόδειξη. (Όπως το Θεώρημα 2.9.) Για $\mathrm{Re}(s)>1$ εφαρμόζουμε μερική άθροιση στη Dirichlet σειρά του $L(s,\chi)$:

$$L(s,\chi) = \sum_{n\ge 1}\frac{\chi(n)}{n^s} = s\int_1^\infty \frac{S_\chi(x)}{x^{s+1}}\,dx.$$

Από το Λήμμα 4.7 έχουμε $S_\chi(x)=O(1)$, άρα το ολοκλήρωμα συγκλίνει για $\mathrm{Re}(s)>0$. Επιπλέον ο ολοκληρωτέος πυρήνας είναι ολόμορφος ως προς s και η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη σε συμπαγή, οπότε η $L(s,\chi)$ είναι ολόμορφη στο $\mathrm{Re}(s)>0$. □

Πρόταση 4.9. *Για τον κύριο χαρακτήρα χ_0 modulo q ισχύει για $\mathrm{Re}(s)>1$ η ταυτότητα*

$$L(s,\chi_0) = \zeta(s)\sum_{d\mid q}\frac{\mu(d)}{d^s}.$$

Άρα η $L(s,\chi_0)$ έχει μερομορφική συνέχεια στο $\mathrm{Re}(s)>0$ με απλό πόλο στο $s=1$ και υπόλοιπο $\sum_{d\mid q}\mu(d)/d = \prod_{p\mid q}(1-1/p) = \varphi(q)/q$.

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα

$$\mathbf{1}_{(n,q)=1} = \sum_{d\mid (n,q)}\mu(d) = \sum_{d\mid q,\ d\mid n}\mu(d).$$

Τότε για $\mathrm{Re}(s)>1$,

$$L(s,\chi_0) = \sum_{(n,q)=1}\frac{1}{n^s} = \sum_{n\ge 1}\frac{1}{n^s}\sum_{\substack{d\mid q\\ d\mid n}}\mu(d) = \sum_{d\mid q}\mu(d)\sum_{m\ge 1}\frac{1}{(dm)^s} = \zeta(s)\sum_{d\mid q}\frac{\mu(d)}{d^s}.$$

Το συμπέρασμα για τον πόλο και το υπόλοιπο προκύπτει από το αντίστοιχο για την ζ. Πράγματι, θέτουμε

$$h(s) := \sum_{d\mid q}\frac{\mu(d)}{d^s}.$$

Επειδή το q είναι σταθερό, το άθροισμα είναι *πεπερασμένο* (τρέχει σε πεπερασμένο πλήθος διαιρετών d). Κάθε όρος $d^{-s} = e^{-s\log d}$ είναι ολόμορφος σε όλο το $\mathbb{C}$, άρα και το h είναι *ολόμορφο σε όλο το* $\mathbb{C}$.

Αν $\zeta(s)$ έχει απλό πόλο στο $s = 1$ με υπόλοιπο 1 και h είναι ολόμορφη, τότε

$$\mathrm{Res}_{s=1}\big(\zeta(s)h(s)\big) = h(1)\ \mathrm{Res}_{s=1}\,\zeta(s) = h(1).$$

Επομένως, από $L(s,\chi_0) = \zeta(s)\,h(s)$ παίρνουμε

$$\mathrm{Res}_{s=1}\,L(s,\chi_0) = h(1) = \sum_{d|q}\frac{\mu(d)}{d} = \prod_{p|q}\left(1-\frac{1}{p}\right) = \frac{\varphi(q)}{q}.$$

□

4.3 Μη μηδενισμός στη γραμμή $\mathrm{Re}(s) = 1$, $t \neq 0$

Θεώρημα 4.10. *Για κάθε Dirichlet χαρακτήρα χ και κάθε $t \neq 0$ ισχύει*

$$L(1+it,\chi) \neq 0.$$

Απόδειξη. (Όπως στο Θεώρημα των Πρώτων για τη $\zeta(1+it) \neq 0$, με το ίδιο τριγωνομετρικό πολυώνυμο.) Χρησιμοποιούμε την ανισότητα

$$3 + 4\cos\theta + \cos(2\theta) = 2(1+\cos\theta)^2 \geq 0.$$

Για $\sigma > 1$ θέτουμε

$$\mathcal{G}(\sigma) := \zeta(\sigma)^3\,L(\sigma+it,\chi)^4\,L(\sigma+2it,\chi^2).$$

Για $\sigma > 1$ όλα τα μέλη είναι μη μηδενικά (για ζ από το Θεώρημα 2.7 του ΠΘΠ, για L από το Θεώρημα 4.5), άρα η $\log|\mathcal{G}(\sigma)|$ είναι καλά ορισμένη.

Παραγωγίζοντας ως προς σ και χρησιμοποιώντας (α) την ταυτότητα $-\zeta'/\zeta = \sum\Lambda(n)n^{-s}$ από την απόδειξη του Θεωρήματος των Πρώτων, (β) το Πόρισμα 4.6 για $-L'/L$, παίρνουμε για $\sigma > 1$:

$$-\frac{d}{d\sigma}\log|\mathcal{G}(\sigma)| = \sum_{n\geq 1}\frac{\Lambda(n)}{n^\sigma}\Big(3 + 4\ \mathrm{Re}(\chi(n)n^{-it}) + \mathrm{Re}(\chi(n)^2 n^{-2it})\Big)\ \geq\ 0.$$

Για να ελέγξουμε το

$$3 + 4\ \mathrm{Re}\big(\chi(n)n^{-it}\big) + \mathrm{Re}\big(\chi(n)^2n^{-2it}\big),$$

αρκεί να το κάνουμε για n με $\Lambda(n) \neq 0$, δηλαδή για $n = p^k$. Αν $p \nmid q$, τότε $\chi(p)$ είναι ρίζα της μονάδας, άρα υπάρχει $\phi_p \in \mathbb{R}$ με $\chi(p) = e^{i\phi_p}$. Με πλήρη πολλαπλασιαστικότητα παίρνουμε

$$\chi(p^k) = \chi(p)^k = e^{ik\phi_p}, \qquad (p^k)^{-it} = e^{-it\log(p^k)} = e^{-ikt\log p}.$$

Θέτοντας

$$\theta_p := \phi_p - t\log p,$$

έχουμε

$$\chi(p^k)\,p^{-ikt} = e^{ik(\phi_p - t\log p)} = e^{ik\theta_p} \quad\Rightarrow\quad \mathrm{Re}\big(\chi(p^k)p^{-ikt}\big) = \mathrm{Re}(e^{ik\theta_p}) = \cos(k\theta_p),$$

και επίσης

$$\chi(p^k)^2\,p^{-i2kt} = e^{i2k\theta_p} \quad\Rightarrow\quad \mathrm{Re}\big(\chi(p^k)^2p^{-i2kt}\big) = \cos(2k\theta_p).$$

Άρα, για $n = p^k$ με $p \nmid q$,

$$3 + 4\ \mathrm{Re}\big(\chi(n)n^{-it}\big) + \mathrm{Re}\big(\chi(n)^2n^{-2it}\big) = 3 + 4\cos(k\theta_p) + \cos(2k\theta_p).$$

Αν $p \mid q$, τότε $\chi(p^k) = 0$ και οι δύο πραγματικοί όροι μηδενίζονται, οπότε μένει απλώς 3. Άρα $\frac{d}{d\sigma} \log |\mathcal{G}(\sigma)| \le 0$ και η $\log |\mathcal{G}(\sigma)|$ είναι μη αύξουσα στο $(1, \infty)$. Άρα για κάθε $1 < \sigma \le 2$ ισχύει

$$\log |\mathcal{G}(\sigma)| \ge \log |\mathcal{G}(2)|.$$

Επειδή $\mathcal{G}(2) \neq 0$ (όλες οι συναρτήσεις $\zeta(2)$, $L(2 + it, \chi)$, $L(2 + 2it, \chi^2)$ είναι πεπερασμένες και μη μηδενικές), έχουμε $|\mathcal{G}(2)| > 0$. Θέτοντας

$$c := |\mathcal{G}(2)|,$$

παίρνουμε

$$|\mathcal{G}(\sigma)| \ge c \qquad (1 < \sigma \le 2).$$

Έστω προς άτοπο ότι $L(1 + it, \chi) = 0$ για κάποιο $t \neq 0$. Επειδή η $L(s, \chi)$ είναι ολόμορφη σε γειτονιά του $1 + it$, το $1 + it$ είναι μηδενικό κάποιας τάξης $m \ge 1$, δηλαδή υπάρχει ολόμορφη h με $h(1 + it) \neq 0$ ώστε

$$L(s, \chi) = (s - (1 + it))^m h(s) \qquad (\text{για } s \text{ κοντά στο } 1 + it).$$

Θέτοντας $s = \sigma + it$ και αφήνοντας $\sigma \downarrow 1$ παίρνουμε

$$|L(\sigma + it, \chi)| \asymp |\sigma - 1|^m.$$

Επομένως, ο παράγοντας $L(\sigma + it, \chi)^4$ έχει μηδενικό τάξης $4m$ στο $\sigma = 1$.

Από την άλλη, η $\zeta(s)$ έχει απλό πόλο στο $s = 1$, άρα $\zeta(\sigma)^3$ έχει πόλο τάξης 3 στο $\sigma = 1$ και

$$|\zeta(\sigma)^3| \asymp (\sigma - 1)^{-3} \qquad (\sigma \downarrow 1).$$

Τέλος, επειδή $2t \neq 0$, το σημείο $1+2it$ δεν είναι το 1, άρα ο παράγοντας $L(s, \chi^2)$ είναι ολόμορφος σε γειτονιά του $1 + 2it$ και συνεπώς φραγμένος και μη μηδενικός εκεί:

$$|L(\sigma + 2it, \chi^2)| \asymp 1 \qquad (\sigma \downarrow 1).$$

Συνεπώς, για $\sigma \downarrow 1$,

$$|\mathcal{G}(\sigma)| = |\zeta(\sigma)|^3 \, |L(\sigma + it, \chi)|^4 \, |L(\sigma + 2it, \chi^2)| \asymp (\sigma - 1)^{-3} \cdot (\sigma - 1)^{4m} \cdot 1 = (\sigma - 1)^{4m-3}.$$

Επειδή $m \ge 1$, έχουμε $4m - 3 \ge 1$, άρα $(\sigma - 1)^{4m-3} \to 0$ όταν $\sigma \downarrow 1$. Δηλαδή $|\mathcal{G}(\sigma)| \to 0$ καθώς $\sigma \downarrow 1$, σε αντίφαση με το κάτω φράγμα $|\mathcal{G}(\sigma)| \ge c > 0$ για $1 < \sigma \le 2$. $\square$

Παρατήρηση 4.11. Αν $t = 0$ και χ είναι *μη πραγματικός* μη κύριος χαρακτήρας, τότε $\chi^2 \neq \chi_0$ και η ίδια απόδειξη (με $t = 0$) δίνει $L(1, \chi) \neq 0$. Για πραγματικούς μη κυρίους χαρακτήρες έχουμε $\chi^2 = \chi_0$ και τότε εμφανίζεται πόλος στο $L(s, \chi^2)$ στο $s = 1$, οπότε το παραπάνω επιχείρημα δεν αρκεί. Εκεί χρειάζεται το κλασικό θεώρημα του Dirichlet $L(1, \chi) \neq 0$.

4.4 Μη μηδενισμός στο $s = 1$ για πραγματικούς μη κυρίους χαρακτήρες (μέθοδος Lambert)

Θα δώσουμε μια κλασική απόδειξη ότι $L(1, \chi) \neq 0$ όταν χ είναι *πραγματικός* μη κύριος χαρακτήρας. Η απόδειξη βασίζεται σε μια Lambert–σειρά και σε ένα απλό επιχείρημα «φραγμένο/άφραχτο» καθώς $x \to 1^-$.

Λήμμα 4.12. *Έστω χ μη κύριος Dirichlet χαρακτήρας modulo q. Η σειρά $\sum_{n \ge 1} \chi(n)/n$ συγκλίνει και ορίζουμε*

$$L(1, \chi) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n}.$$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε μερική άθροιση:

$$\sum_{n\le N}\frac{\chi(n)}{n}=\frac{S_\chi(N)}{N}+\int_1^N\frac{S_\chi(x)}{x^2}\,dx.$$

Εφόσον $S_\chi(x)=O(1)$, το $\frac{S_\chi(N)}{N}\to 0$ και το ολοκλήρωμα $\int_1^\infty S_\chi(x)x^{-2}\,dx$ συγκλίνει απολύτως. Άρα η $\sum_{n\ge1}\chi(n)/n$ συγκλίνει. □

Θεώρημα 4.13. *Έστω χ πραγματικός και μη κύριος Dirichlet χαρακτήρας modulo q. Τότε*

$$L(1,\chi)\neq 0.$$

Απόδειξη. **Βήμα 1: Ορισμός της Lambert–σειράς και απόλυτη σύγκλιση.** Για $x\in(0,1)$ ορίζουμε

$$f(x):=\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)\frac{x^n}{1-x^n}.$$

Για $0<x<1$ έχουμε $1-x^n\ge 1-x$, άρα

$$\left|\chi(n)\frac{x^n}{1-x^n}\right|\le\frac{x^n}{1-x}.$$

Επομένως η σειρά για το $f(x)$ συγκλίνει απολύτως (και ομοιόμορφα σε κάθε $[0,x_0]$ με $x_0<1$).

Βήμα 2: Ανάπτυγμα $f(x)=\sum_{m\ge1}c_mx^m$ με $c_m\ge0$. Για $0<x<1$ ισχύει

$$\frac{x^n}{1-x^n}=\sum_{j=1}^{\infty}x^{nj}.$$

Λόγω της απόλυτης σύγκλισης μπορούμε να αλλάξουμε τη σειρά αθροίσεως και παίρνουμε

$$f(x)=\sum_{n\ge1}\chi(n)\sum_{j\ge1}x^{nj}=\sum_{m\ge1}\left(\sum_{d\mid m}\chi(d)\right)x^m=:\sum_{m\ge1}c_mx^m,\qquad c_m=\sum_{d\mid m}\chi(d).$$

Θα αποδείξουμε ότι $c_m\ge0$ για κάθε m (εδώ χρησιμοποιούμε ότι χ είναι *πραγματικός*). Επειδή είναι πολλαπλασιαστική συνάρτηση, άρα αρκεί να υπολογίσουμε τα c_{p^k}.

- Αν $p\mid q$, τότε $\chi(p)=0$ και $\chi(p^j)=0$ για $j\ge1$, άρα

  $$c_{p^k}=\sum_{j=0}^{k}\chi(p^j)=\chi(1)=1.$$

- Αν $p\nmid q$ και $\chi(p)=1$, τότε $\chi(p^j)=1$ και

  $$c_{p^k}=\sum_{j=0}^{k}1=k+1\ge0.$$

- Αν $p\nmid q$ και $\chi(p)=-1$, τότε $\chi(p^j)=(-1)^j$ και

  $$c_{p^k}=\sum_{j=0}^{k}(-1)^j=\begin{cases}1, & k \text{ άρτιος},\\ 0, & k \text{ περιττός},\end{cases}$$

  άρα πάλι $c_{p^k}\ge0$.

Άρα $c_m = \prod_p c_{p^{v_p(m)}} \geq 0$ για κάθε m.

Επιπλέον, επειδή $q \geq 2$, υπάρχει πρώτος $p \mid q$ και τότε, όπως είδαμε, $c_{p^k} = 1$ για κάθε $k \geq 1$. Άρα υπάρχουν *άπειροι* δείκτες m με $c_m \geq 1$.

Βήμα 3: Το $f(x)$ τείνει στο άπειρο καθώς $x \to 1^-$. Πάρε έναν πρώτο $p \mid q$. Για κάθε $K \geq 1$,

$$f(x) = \sum_{m\geq 1} c_m x^m \;\geq\; \sum_{k=1}^{K} c_{p^k} x^{p^k} \;=\; \sum_{k=1}^{K} x^{p^k}.$$

Δοθέντος $M > 0$, διάλεξε $K \geq 2M$. Επειδή $x^{p^K} \to 1$ όταν $x \to 1^-$, υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ ώστε $x^{p^K} \geq \frac{1}{2}$ για κάθε $x \in [x_0, 1)$. Τότε για κάθε τέτοιο x και κάθε $1 \leq k \leq K$ ισχύει $x^{p^k} \geq x^{p^K} \geq \frac{1}{2}$, άρα

$$f(x) \geq \sum_{k=1}^{K} x^{p^k} \geq K \cdot \frac{1}{2} \geq M.$$

Άρα $f(x) \to +\infty$ κατά μήκος $x \to 1^-$, δηλαδή η f δεν είναι φραγμένη κοντά στο 1.

Βήμα 4: Αν $L(1,\chi) = 0$, τότε το $f(x)$ είναι φραγμένο κοντά στο 1 (αντίφαση). Για $n \geq 1$ και $x \in (0,1)$ ορίζουμε

$$b_n(x) := \frac{1}{n(1-x)} - \frac{x^n}{1-x^n}.$$

Παρατηρούμε πρώτα ότι $b_n(x) \geq 0$. Πράγματι, $b_n(x) \geq 0$ ισοδυναμεί με

$$\frac{1}{n(1-x)} \geq \frac{x^n}{1-x^n} \iff \frac{1-x^n}{1-x} \geq nx^n \iff (1 + x + \cdots + x^{n-1}) \geq nx^n,$$

και αυτό ισχύει επειδή για $0 < x < 1$ έχουμε $x^k \geq x^{n-1} \geq x^n$ για $k = 0, 1, \ldots, n-1$, άρα $1 + x + \cdots + x^{n-1} \geq nx^n$.

Θα χρειαστούμε επίσης ότι για κάθε σταθερό $x \in (0,1)$ η ακολουθία $n \mapsto b_n(x)$ είναι *φθίνουσα* και τείνει στο 0. Το $b_n(x) \to 0$ είναι άμεσο από

$$0 \leq b_n(x) \leq \frac{1}{n(1-x)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Για τη μονοτονία, θέτουμε

$$A_n(x) := 1 + x + \cdots + x^{n-1}, \qquad B_n(x) := 1 + x + \cdots + x^n.$$

Τότε

$$\frac{x^n}{1-x^n} = \frac{x^n}{(1-x)A_n(x)}, \qquad \frac{x^{n+1}}{1-x^{n+1}} = \frac{x^{n+1}}{(1-x)B_n(x)},$$

και με απλή πράξη παίρνουμε

$$b_n(x) - b_{n+1}(x) = \frac{1}{1-x}\left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{x^n}{A_n(x)B_n(x)}\right).$$

Άρα αρκεί να δείξουμε ότι $A_n(x)B_n(x) \geq n(n+1)x^n$. Με AM–GM,

$$\frac{A_n(x)}{n} \geq \left(x^{0+1+\cdots+(n-1)}\right)^{1/n} = x^{(n-1)/2}, \qquad \frac{B_n(x)}{n+1} \geq \left(x^{0+1+\cdots+n}\right)^{1/(n+1)} = x^{n/2}.$$

Πολλαπλασιάζοντας,

$$A_n(x)B_n(x) \geq n(n+1)x^{(n-1)/2+n/2} = n(n+1)x^{n-1/2} \geq n(n+1)x^n$$

(επειδή $0 < x < 1$ και $x^{n-1/2} \geq x^n$). Άρα $b_n(x) - b_{n+1}(x) \geq 0$, δηλαδή $b_n(x)$ είναι φθίνουσα ως προς n.

Τώρα, για κάθε N έχουμε την ταυτότητα (απλώς από τον ορισμό του b_n)

$$\sum_{n \leq N} \chi(n) \frac{x^n}{1-x^n} = \frac{1}{1-x} \sum_{n \leq N} \frac{\chi(n)}{n} \; - \; \sum_{n \leq N} \chi(n) b_n(x).$$

Περνάμε στο όριο $N \to \infty$. Από το Λήμμα 4.12 το $\sum_{n \leq N} \chi(n)/n \to L(1,\chi)$. Επίσης, για σταθερό $x \in (0,1)$, η σειρά $\sum_{n \geq 1} \chi(n) b_n(x)$ συγκλίνει (Dirichlet test), επειδή τα μερικά αθροίσματα $S_\chi(N)$ είναι φραγμένα και η $b_n(x)$ είναι φθίνουσα προς το 0. Άρα

$$f(x) = \frac{L(1,\chi)}{1-x} - \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) b_n(x).$$

Υποθέτουμε προς άτοπο ότι $L(1,\chi) = 0$. Τότε

$$f(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) b_n(x).$$

Θα δείξουμε ότι το δεξί μέλος είναι *ομοιόμορφα φραγμένο* ως προς $x \in (0,1)$. Θέτουμε $S_\chi(N) = \sum_{n \leq N} \chi(n)$ και $C := \sup_N |S_\chi(N)| < \infty$. Με άθροιση κατά μέρη, για κάθε N,

$$\sum_{n \leq N} \chi(n) b_n(x) = S_\chi(N) b_N(x) + \sum_{n=1}^{N-1} S_\chi(n) \big(b_n(x) - b_{n+1}(x)\big).$$

Παίρνοντας απόλυτες τιμές και χρησιμοποιώντας $|S_\chi(\cdot)| \leq C$ και $b_n(x) - b_{n+1}(x) \geq 0$, παίρνουμε

$$\left| \sum_{n \leq N} \chi(n) b_n(x) \right| \leq C\, b_N(x) + C \sum_{n=1}^{N-1} \big(b_n(x) - b_{n+1}(x)\big) = C\, b_N(x) + C\,(b_1(x) - b_N(x)) \leq C\, b_1(x).$$

Αλλά $b_1(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{x}{1-x} = 1$ για κάθε $x \in (0,1)$. Άρα

$$\left| \sum_{n \leq N} \chi(n) b_n(x) \right| \leq C \qquad \text{για όλα τα } N \in \mathbb{N},\ x \in (0,1).$$

Περνώντας $N \to \infty$, παίρνουμε

$$|f(x)| \leq C \qquad \text{για όλα τα } x \in (0,1),$$

δηλαδή το f είναι φραγμένο κοντά στο 1.

Αυτό αντιφάσκει με το Βήμα 3, όπου δείξαμε ότι $f(x)$ είναι απεριόριστο καθώς $x \to 1^-$. Άρα η υπόθεση $L(1,\chi) = 0$ είναι άτοπη και συνεπώς $L(1,\chi) \neq 0$. □

5 Μη μηδενισμός στο $s = 1$ για πραγματικούς χαρακτήρες (μέθοδος Landau)

Λήμμα 5.1. *Έστω χ πραγματικός Dirichlet χαρακτήρας modulo q. Για* $\mathrm{Re}(s) > 1$ *ισχύει*

$$\zeta(s) L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \qquad a_n = \sum_{d \mid n} \chi(d).$$

Επιπλέον $a_n \geq 0$ για κάθε n και $a_{m^2} \geq 1$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη. (Χωρίς Euler προϊόν: μόνο Cauchy product.) Για $\mathrm{Re}(s) > 1$ οι σειρές $\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} n^{-s}$ και $L(s,\chi) = \sum_{n\geq 1} \chi(n)n^{-s}$ συγκλίνουν απολύτως, άρα

$$\zeta(s)L(s,\chi) = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^s} \sum_{d|k} \chi(d),$$

οπότε $a_k = \sum_{d|k} \chi(d)$.

Η $a = 1 * \chi$ είναι πολλαπλασιαστική, άρα αρκεί να ελέγξουμε a_{p^k}. Αν $p \mid q$, τότε $\chi(p) = 0$ και $a_{p^k} = 1$. Αν $p \nmid q$ και $\chi(p) = 1$, τότε $a_{p^k} = k + 1$. Αν $p \nmid q$ και $\chi(p) = -1$, τότε $a_{p^k} = 1$ για k άρτιο και $a_{p^k} = 0$ για k περιττό. Άρα $a_{p^k} \geq 0$ και για άρτιο εκθέτη $2k$ ισχύει $a_{p^{2k}} \geq 1$. Επομένως $a_n \geq 0$ και $a_{m^2} \geq 1$. □

5.1 Ολοκλήρωση της Απόδειξης με Tauberian

Από (38) βλέπουμε ότι η $F_{q,a}(s)$ γράφεται ως πεπερασμένο άθροισμα λογαριθμικών παραγώγων L-συναρτήσεων. Από την Πρόταση 4.9 ο όρος του κύριου χαρακτήρα χ_0 δίνει απλό πόλο στο $s = 1$, ενώ από τα Θεωρήματα 4.10 και ?? (και το Σχόλιο 4.11) παίρνουμε ότι για κάθε μη κύριο χ η $L(s,\chi)$ είναι ολόμορφη στο $\mathrm{Re}(s) > 0$ και δεν μηδενίζεται στη γραμμή $\mathrm{Re}(s) = 1$, άρα η $-L'/L(s,\chi)$ είναι ολόμορφη σε γειτονιά της $\mathrm{Re}(s) = 1$. Συνεπώς η $F_{q,a}(s)$ έχει μερομορφική συνέχιση στο $\mathrm{Re}(s) \geq 1$ με *μοναδικό* απλό πόλο στο $s = 1$ και υπόλοιπο $1/\varphi(q)$. Πράγματι, θυμίζουμε ότι για $\mathrm{Re}(s) > 1$ (και κατόπιν με αναλυτική συνέχιση) έχουμε την αναπαράσταση μέσω χαρακτήρων

$$F_{q,a}(s) = -\frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \pmod q} \overline{\chi}(a)\, \frac{L'}{L}(s,\chi).$$

Για κάθε *μη κύριο* χαρακτήρα $\chi \neq \chi_0$ έχουμε $L(1,\chi) \neq 0$, άρα η $L(s,\chi)$ είναι ολόμορφη και μη μηδενική σε γειτονιά του $s = 1$, οπότε $\frac{L'}{L}(s,\chi)$ είναι επίσης ολόμορφη εκεί. Συνεπώς αυτοί οι όροι δεν δίνουν πόλο στο $s = 1$.

Ο μοναδικός όρος που μπορεί να δώσει ανωμαλία είναι ο όρος του *κύριου* χαρακτήρα χ_0. Έχουμε (π.χ. από $L(s,\chi_0) = \zeta(s)\sum_{d|q} \mu(d)d^{-s}$) ότι $L(s,\chi_0)$ έχει απλό πόλο στο $s = 1$, άρα γράφεται κοντά στο 1 ως

$$L(s,\chi_0) = \frac{c}{s-1} + h(s), \qquad c \neq 0, \quad h \text{ ολόμορφη.}$$

Τότε

$$\frac{L'}{L}(s,\chi_0) = \frac{d}{ds}\log L(s,\chi_0) = -\frac{1}{s-1} + (\text{ολόμορφος όρος}),$$

άρα

$$\mathrm{Res}_{s=1} \frac{L'}{L}(s,\chi_0) = -1 \qquad \Big(\text{ισοδύναμα } \mathrm{Res}_{s=1}\Big(-\frac{L'}{L}(s,\chi_0)\Big) = 1\Big).$$

Επειδή $\overline{\chi_0}(a) = 1$, το υπόλοιπο της $F_{q,a}(s)$ στο $s = 1$ είναι μόνο η συνεισφορά του χ_0:

$$\mathrm{Res}_{s=1} F_{q,a}(s) = -\frac{1}{\varphi(q)}\, \overline{\chi_0}(a)\ \mathrm{Res}_{s=1} \frac{L'}{L}(s,\chi_0) = -\frac{1}{\varphi(q)} \cdot 1 \cdot (-1) = \frac{1}{\varphi(q)}.$$

Άρα η $F_{q,a}(s)$ έχει *μοναδικό* απλό πόλο στο $s = 1$ και υπόλοιπο $1/\varphi(q)$. Εφαρμόζοντας τώρα το *ίδιο Tauberian θεώρημα* που χρησιμοποιήθηκε στο ΠΘΠ (Wiener–Ikehara) στην $F_{q,a}(s)$ και στο $A(x) = \psi(x;q,a)$ μέσω της Mellin αναπαράστασης (35), καταλήγουμε

$$\psi(x;q,a) \sim \frac{x}{\varphi(q)} \qquad (x \to \infty).$$

Πρόταση 5.2. *Έστω $q \geq 2$ και $(a,q)=1$. Αν ισχύει η ασυμπτωτική*
$$\psi(x;q,a) \sim \frac{x}{\varphi(q)} \qquad (x\to\infty),$$
τότε
$$\sum_{\substack{p\leq x\\ p\equiv a \pmod q}} \frac{\log p}{p} = \frac{1}{\varphi(q)}\log x + O(1) \qquad (x\to\infty).$$

Απόδειξη. Θέτουμε
$$a_n := \Lambda(n)\,\mathbf{1}_{n\equiv a \pmod q}, \qquad A(t) := \sum_{n\leq t} a_n = \psi(t;q,a), \qquad f(t) := \frac{1}{t}.$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 1.1 στο διάστημα $[1,x]$ παίρνουμε
$$\sum_{1<n\leq x} \frac{\Lambda(n)\mathbf{1}_{n\equiv a(q)}}{n} = \frac{\psi(x;q,a)}{x} - \psi(1;q,a) + \int_1^x \frac{\psi(t;q,a)}{t^2}\,dt. \tag{39}$$

Το αριστερό μέλος γράφεται ως
$$\sum_{\substack{n\leq x\\ n\equiv a(q)}} \frac{\Lambda(n)}{n} = \sum_{\substack{p\leq x\\ p\equiv a(q)}} \frac{\log p}{p} + \sum_{\substack{p^k\leq x\\ k\geq 2\\ p^k\equiv a(q)}} \frac{\log p}{p^k}.$$

Ο δεύτερος όρος είναι $O(1)$, διότι
$$0 \leq \sum_{\substack{p^k\leq x\\ k\geq 2}} \frac{\log p}{p^k} \leq \sum_p \sum_{k\geq 2} \frac{\log p}{p^k} = \sum_p \frac{\log p}{p^2}\cdot\frac{1}{1-1/p} \ll \sum_p \frac{\log p}{p^2} < \infty.$$

Άρα από (39) προκύπτει
$$\sum_{\substack{p\leq x\\ p\equiv a(q)}} \frac{\log p}{p} = \frac{\psi(x;q,a)}{x} + \int_1^x \frac{\psi(t;q,a)}{t^2}\,dt + O(1). \tag{40}$$

Τώρα χρησιμοποιούμε την υπόθεση $\psi(t;q,a) \sim t/\varphi(q)$. Τότε $\psi(x;q,a)/x \to 1/\varphi(q)$ και, γράφοντας $\psi(t;q,a) = \frac{t}{\varphi(q)} + o(t)$, έχουμε
$$\int_1^x \frac{\psi(t;q,a)}{t^2}\,dt = \frac{1}{\varphi(q)}\int_1^x \frac{dt}{t} + \int_1^x o\Big(\frac{1}{t}\Big)\,dt = \frac{1}{\varphi(q)}\log x + o(\log x).$$

Επιστρέφοντας στο (40), παίρνουμε
$$\sum_{\substack{p\leq x\\ p\equiv a(q)}} \frac{\log p}{p} = \frac{1}{\varphi(q)}\log x + O(1),$$

όπως θέλαμε. □

Πρόταση 5.3. *Υπό τις ίδιες υποθέσεις, ισχύει*
$$\pi(x;q,a) \sim \frac{x}{\varphi(q)\log x} \qquad (x\to\infty),$$
όπου $\pi(x;q,a) = \#\{p\leq x:\ p\equiv a \pmod q\}$.

Απόδειξη. Το επιχείρημα είναι ακριβώς το ίδιο όπως στο Θεώρημα των Πρώτων, με αντικατάσταση

$$\psi(x) \rightsquigarrow \psi(x;q,a), \qquad \theta(x) \rightsquigarrow \theta(x;q,a), \qquad \pi(x) \rightsquigarrow \pi(x;q,a).$$

Πρώτα δείχνουμε ότι $\psi(x;q,a) \sim x/\varphi(q)$ συνεπάγεται $\theta(x;q,a) \sim x/\varphi(q)$, επειδή η διαφορά $\psi - \theta$ προέρχεται μόνο από δυνάμεις p^k με $k \geq 2$ και είναι $O(\sqrt{x}\log x)$. Έπειτα εφαρμόζουμε άθροιση κατά Abel στην ταυτότητα

$$\theta(x;q,a) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv a(q)}} \log p$$

με $A(t) = \pi(t;q,a)$ και $f(t) = \log t$, και καταλήγουμε στο $\pi(x;q,a) \sim x/(\varphi(q)\log x)$ όπως στο κλασικό ΠΘΠ. □

Λήμμα 5.4 (Συνέπεια Dirichlet για $q = 4$). *Ισχύει*

$$\sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv 3 \mod (4)}} \frac{\log p}{p} = \frac{1}{2}\log x + O(1), \qquad \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv 1 \mod (4)}} \frac{\log p}{p} = \frac{1}{2}\log x + O(1).$$

Επίσης

$$\sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv 1 \ (4)}} \frac{\log p}{p-1} = \frac{1}{2}\log x + O(1).$$

Απόδειξη. Οι δύο πρώτες σχέσεις είναι η ειδική περίπτωση $q = 4$, $a = 3$ ή $a = 1$ της γενικής συνέπειας

$$\sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv a \ (q)}} \frac{\log p}{p} = \frac{1}{\varphi(q)}\log x + O(1) \qquad ((a,q) = 1).$$

Για την τρίτη, γράφουμε

$$\frac{\log p}{p-1} = \frac{\log p}{p} + O\left(\frac{\log p}{p^2}\right).$$

Επειδή $\sum_p \frac{\log p}{p^2} < \infty$, το σφάλμα αθροίζει σε $O(1)$ και παίρνουμε

$$\sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv 1 \ (4)}} \frac{\log p}{p-1} = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv 1 \ (4)}} \frac{\log p}{p} + O(1) = \frac{1}{2}\log x + O(1).$$

□

Πρόταση 5.5. *Η εξίσωση*

$$x^8 = n! + 1$$

έχει μόνο πεπερασμένες λύσεις σε μη αρνητικούς ακεραίους (x, n).

Απόδειξη. Έστω (x,n) λύση. Τότε

$$n! = x^8 - 1 = (x^2-1)(x^2+1)(x^4+1).$$

Επειδή $x^2 + 1 \geq x^2 - 1$ και $x^4 + 1 \geq (x^2-1)^2$, παίρνουμε

$$n! \ \geq \ (x^2-1)\,(x^2-1)\,(x^2-1)^2 = (x^2-1)^4,$$

άρα

$$x^2 - 1 \ \leq \ (n!)^{1/4}. \tag{41}$$

Θέτουμε

$$A_n := \{\, p \le n : \ p \text{ πρώτος και } p \equiv 3 \pmod 4 \,\}.$$

Από το Λήμμα ??, για κάθε $p \in A_n$ ισχύει $p \nmid (x^2+1)(x^4+1)$, άρα όλη η δύναμη του p μέσα στο $n!$ διαιρεί τον παράγοντα x^2-1:

$$p^{v_p(n!)} \mid (x^2-1) \qquad (p \in A_n).$$

Επομένως

$$x^2 - 1 \ \ge \ \prod_{p \in A_n} p^{v_p(n!)}.$$

Παίρνοντας λογαρίθμους και χρησιμοποιώντας την (41) παίρνουμε

$$\frac{1}{4}\log(n!) \ \ge \ \sum_{p \in A_n} v_p(n!) \log p.$$

Με το Λήμμα ?? έχουμε $v_p(n!) \ge n/p - 1$, άρα

$$\frac{1}{4}\log(n!) \ \ge \ \sum_{p\in A_n} \Big(\frac{n}{p} - 1\Big) \log p = n \sum_{p \in A_n} \frac{\log p}{p} \ - \ \sum_{p \in A_n} \log p.$$

Άρα

$$\sum_{p \in A_n} \frac{\log p}{p} \ \le \ \frac{1}{4n}\log(n!) \ + \ \frac{1}{n} \sum_{p \in A_n} \log p. \tag{42}$$

Όμως, $\log(n!) = n\log n + O(n)$, επομένως

$$\frac{1}{4n}\log(n!) = \frac{1}{4}\log n + O(1).$$

Επίσης από την εκτίμηση Chebyshev, Θεώρημα 3.7, παίρνουμε $\sum_{p \in A_n} \log p \le \sum_{p \le n} \log p = O(n)$, άρα ο δεύτερος όρος του (42) είναι $O(1)$. Συμπεραίνουμε

$$\sum_{\substack{p \le n \\ p \equiv 3 \ (4)}} \frac{\log p}{p} \ \le \ \frac{1}{4}\log n + O(1). \tag{43}$$

Όμως από το Λήμμα 5.4 έχουμε

$$\sum_{\substack{p \le n \\ p \equiv 3 \ (4)}} \frac{\log p}{p} = \frac{1}{2}\log n + O(1),$$

που αντιφάσκει με (43) για $n \to \infty$ (διότι $\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$). Άρα τα n που επιτρέπουν λύση είναι φραγμένα, δηλαδή υπάρχουν μόνο πεπερασμένες λύσεις. □

Λήμμα 5.6. *Για* $P_n := \prod_{k=1}^{n}(k^2+1)$ *ισχύει*

$$v_2(P_n) = \#\{1 \le k \le n : \ k \text{ περιττός}\} = \Big\lfloor \frac{n+1}{2} \Big\rfloor.$$

Απόδειξη. Αν k είναι περιττός, τότε $k^2 \equiv 1 \pmod 4$, άρα $k^2+1 \equiv 2 \pmod 4$ και $v_2(k^2+1) = 1$. Αν k είναι άρτιος, τότε k^2+1 είναι περιττός και $v_2(k^2+1) = 0$. Άρα $v_2(P_n)$ ισούται με το πλήθος των περιττών $k \le n$. □

Λήμμα 5.7. *Θέτουμε* $P_n = \prod_{k=1}^{n}(k^2+1)$. *Για κάθε περιττό πρώτο* p *ισχύει*

$$v_p(P_n) \ \le\ 2\big\lfloor \log_p(n^2+1)\big\rfloor \ +\ \frac{2n}{p-1}.$$

Απόδειξη. Για $i \ge 1$ θέτουμε

$$n_i := \#\{1 \le k \le n:\ p^i \mid k^2+1\}.$$

Τότε (κλασικά)

$$v_p(P_n) = \sum_{k=1}^{n} v_p(k^2+1) = \sum_{i\ge 1} n_i,$$

και ο όρος n_i μηδενίζεται για $i > \log_p(n^2+1)$, διότι $p^i \le k^2+1 \le n^2+1$. Άρα

$$v_p(P_n) = \sum_{i=1}^{\lfloor \log_p(n^2+1)\rfloor} n_i.$$

Μένει να φράξουμε τα n_i. Για σταθερό i, η ισοτιμία $k^2 \equiv -1 \pmod{p^i}$ έχει *το πολύ* 2 λύσεις modulo p^i (αν $u^2 \equiv v^2 \equiv -1 \pmod{p^i}$ τότε $p^i \mid (u-v)(u+v)$ και επειδή p είναι περιττός, δεν μπορεί να διαιρεί ταυτόχρονα και τους δύο παράγοντες χωρίς να αναγκάζει $u \equiv \pm v \pmod{p^i}$). Άρα, στο διάστημα $\{1,2,\dots,n\}$, κάθε πλήρες σύστημα υπολοίπων modulo p^i δίνει το πολύ 2 λύσεις, οπότε

$$n_i \le 2\Big(\frac{n}{p^i}+1\Big) = \frac{2n}{p^i}+2.$$

Συνεπώς

$$v_p(P_n) \le \sum_{i=1}^{\lfloor \log_p(n^2+1)\rfloor} \Big(\frac{2n}{p^i}+2\Big) \le \frac{2n}{p-1} + 2\lfloor \log_p(n^2+1)\rfloor.$$

□

Πρόταση 5.8. *Για κάθε* $c>0$ *υπάρχουν άπειρα* m *τέτοια ώστε ο μέγιστος πρώτος διαιρέτης του* m^2+1 *ικανοποιεί*

$$P^+(m^2+1) > c\,m.$$

Απόδειξη. Θέτουμε

$$P_n := \prod_{k=1}^{n}(k^2+1), \qquad f(n) := P^+(P_n)\ \ (\text{ο μέγιστος πρώτος διαιρέτης του } P_n).$$

Θα δείξουμε ότι

$$\frac{f(n)}{n} \longrightarrow \infty. \tag{44}$$

Αυτό αρκεί: αν η (44) ισχύει, τότε για κάθε $c>0$ υπάρχουν άπειρα n με $f(n) > cn$. Για τέτοιο n, ο πρώτος $f(n)$ διαιρεί κάποιον παράγοντα k^2+1 με $1 \le k \le n$, άρα $P^+(k^2+1) \ge f(n) > cn \ge ck$. Έτσι παίρνουμε άπειρα $m := k$.

1) Κάτω φράγμα για $\log P_n$. Επειδή $k^2+1 > k^2$, έχουμε

$$P_n = \prod_{k=1}^{n}(k^2+1) \ >\ \prod_{k=1}^{n} k^2 = (n!)^2,$$

άρα

$$\log P_n \ >\ 2\log(n!). \tag{45}$$

2) Ποιους πρώτους μπορεί να έχει το P_n. Αν p είναι περιττός πρώτος και $p \mid (k^2+1)$, τότε $k^2 \equiv -1 \pmod p$, άρα -1 είναι τετραγωνικό υπόλοιπο mod p, οπότε $p \equiv 1 \pmod 4$. Συνεπώς όλοι οι περιττοί πρώτοι διαιρέτες του P_n είναι $\equiv 1 \pmod 4$, και επιπλέον είναι $\le f(n)$ από τον ορισμό του $f(n)$.

Άρα, γράφοντας την παραγοντοποίηση,

$$\log P_n = v_2(P_n)\log 2 + \sum_{\substack{p\le f(n)\\ p\equiv 1\ (4)}} v_p(P_n)\,\log p.$$

3) Άνω φράγμα για $\log P_n$ μέσω των $v_p(P_n)$. Από το Λήμμα 5.6 έχουμε $v_2(P_n) = \lfloor (n+1)/2\rfloor$, άρα $v_2(P_n)\log 2 = O(n)$.

Για κάθε περιττό p εφαρμόζουμε το Λήμμα 5.7:

$$v_p(P_n)\log p \le 2\lfloor \log_p(n^2+1)\rfloor \log p + \frac{2n}{p-1}\log p.$$

Αλλά $\lfloor \log_p(n^2+1)\rfloor \log p \le \log(n^2+1) \le 3\log n$ για $n \ge 2$. Άρα

$$\sum_{\substack{p\le f(n)\\ p\equiv 1\ (4)}} \lfloor \log_p(n^2+1)\rfloor \log p \le 3\log n \cdot \pi(f(n)),$$

όπου π είναι η συνάρτηση πλήθους πρώτων.

Συνεπώς, για $n \ge 2$,

$$\log P_n \le 6\log n\cdot \pi(f(n)) + 2n \sum_{\substack{p\le f(n)\\ p\equiv 1\ (4)}} \frac{\log p}{p-1} + O(n). \tag{46}$$

4) Χρήση των γνωστών εκτιμήσεων (Chebyshev + Dirichlet). Από την κλασική εκτίμηση Chebyshev ισχύει

$$\pi(x) \ll \frac{x}{\log x} \qquad (x \ge 2).$$

Επίσης, από το Λήμμα 5.4 έχουμε

$$\sum_{\substack{p\le y\\ p\equiv 1\ (4)}} \frac{\log p}{p-1} = \frac{1}{2}\log y + O(1).$$

Εφαρμόζοντας τα στο (46) (με $y = f(n)$) παίρνουμε

$$\log P_n \le 6\log n \cdot O\Big(\frac{f(n)}{\log f(n)}\Big) + 2n\Big(\frac{1}{2}\log f(n) + O(1)\Big) + O(n).$$

Δηλαδή

$$\log P_n \le O\Big(\frac{f(n)\log n}{\log f(n)}\Big) + n\log f(n) + O(n). \tag{47}$$

Συνδυάζοντας (45) και (47) και διαιρώντας με $n\log n$, χρησιμοποιώντας $\log(n!) = n\log n - n + O(\log n)$, παίρνουμε

$$2 \le O\Big(\frac{f(n)}{n\log f(n)}\Big) + \frac{\log f(n)}{\log n} + o(1).$$

5) Συμπέρασμα. Αν υπήρχε $C > 0$ ώστε $f(n) \le Cn$ για όλα τα μεγάλα n, τότε $\frac{\log f(n)}{\log n} \to 1$ και $\frac{f(n)}{n\log f(n)} = O(1/\log n) \to 0$, άρα από την προηγούμενη ανισότητα θα παίρναμε $2 \le 1$, άτοπο. Άρα το $f(n)/n$ δεν μπορεί να είναι φραγμένο, δηλαδή ισχύει (44), και συνεπώς ολοκληρώνεται η απόδειξη του ισχυρισμού. □

6 Ανασκόπηση των άπειρων γινομένων

Η έννοια των άπειρων γινομένων μπορεί να οριστεί με τρόπο παρόμοιο με εκείνον των άπειρων αθροισμάτων. Θεωρούμε το άπειρο γινόμενο

$$\prod_{n=1}^{\infty} x_n,$$

όπου (x_n) είναι ακολουθία μιγαδικών αριθμών. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$, θέτουμε

$$P_k = \prod_{n=1}^{k} x_n = x_1 x_2 x_3 \cdots x_k,$$

το οποίο ονομάζεται *μερικό γινόμενο* του $\prod_{n=1}^{\infty} x_n$.

Ένας προφανής τρόπος να ορίσουμε τη σύγκλιση του άπειρου γινομένου $\prod_{n=1}^{\infty} x_n$ είναι να πούμε ότι η ακολουθία (P_k) των μερικών γινομένων συγκλίνει. Ωστόσο, για τεχνικούς λόγους, είναι χρησιμότερος ένας ελαφρώς διαφορετικός ορισμός.

Ορισμός 6.1. Λέμε ότι το άπειρο γινόμενο $\prod_{n=1}^{\infty} x_n$ *συγκλίνει* αν ισχύουν τα εξής:

(i) υπάρχει θετικός ακέραιος k τέτοιος ώστε $x_n \neq 0$ για κάθε $n \geq k$,

(ii) υπάρχει το όριο

$$\lim_{m\to\infty} \prod_{n=k}^{m} x_n$$

και είναι μη μηδενικό.

Αν το $\prod_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει, ορίζουμε την τιμή του ως

$$\prod_{n=1}^{\infty} x_n = \left(\prod_{n=1}^{k-1} x_n\right)\left(\lim_{m\to\infty} \prod_{n=k}^{m} x_n\right).$$

Από τον παραπάνω ορισμό βλέπουμε ότι το $\prod_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει στο 0 αν και μόνο αν υπάρχει τουλάχιστον ένας θετικός ακέραιος n τέτοιος ώστε $x_n = 0$, και υπάρχουν μόνο πεπερασμένοι τέτοιοι n. Για παράδειγμα, το άπειρο γινόμενο

$$(0)(1)(1)(1)(1)(1)\cdots$$

συγκλίνει στο 0, ενώ τα άπειρα γινόμενα

$$(0)(1)(0)(1)(0)(1)\cdots, \qquad (1)\left(\frac{1}{2}\right)(1)\left(\frac{1}{2}\right)(1)\left(\frac{1}{2}\right)\cdots, \qquad \text{και} \qquad (0)(1)(2)(3)(4)(5)\cdots$$

αποκλίνουν.

Για να δικαιολογήσουμε εύκολα τη σύγκλιση γινομένων όπως

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\cdots$$

και

$$\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\left(1+\frac{1}{4^2}\right)\left(1+\frac{1}{5^2}\right)\cdots, \tag{48}$$

είναι χρήσιμο να υπενθυμίσουμε τα ακόλουθα γνωστά αποτελέσματα.

Θεώρημα 6.2. *Αν το $\prod_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει, τότε $x_n \to 1$.*

Απόδειξη. Έστω $N \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $x_n \neq 0$ για κάθε $n \geq N$. Τότε, για κάθε $n > N$, έχουμε

$$x_n = \frac{\prod_{i=N}^{n} x_i}{\prod_{i=N}^{n-1} x_i}.$$

Εφόσον τα $\prod_{i=N}^{n} x_i$ και $\prod_{i=N}^{n-1} x_i$ συγκλίνουν στο ίδιο μη μηδενικό όριο όταν $n \to \infty$, παίρνουμε $x_n \to 1$, όπως θέλαμε. □

Ως συνέπεια αυτού του θεωρήματος, είναι συνηθισμένο να γράφουμε άπειρα γινόμενα στην ειδική μορφή

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$$

και να θυμόμαστε ότι, σε ένα συγκλίνον γινόμενο, η ακολουθία (a_n) συγκλίνει στο 0. Επιπλέον, επιτρέπουμε να είναι $a_n = -1$ μόνο για πεπερασμένους δείκτες n. Η απόλυτη σύγκλιση είναι επίσης εύκολο να θυμόμαστε.

Ορισμός 6.3. Έστω (a_n) ακολουθία μιγαδικών αριθμών. Το άπειρο γινόμενο

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$$

λέγεται *απολύτως συγκλίνον* αν το

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$$

συγκλίνει.

Στη συνέχεια δίνουμε το κριτήριο Cauchy για άπειρα γινόμενα, το οποίο είναι ανάλογο με το κριτήριο Cauchy για άπειρα αθροίσματα. Στην πραγματικότητα, και οι δύο εκδοχές αποδεικνύονται με παρόμοιο τρόπο, όπως θα δούμε στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 6.4 (Κριτήριο Cauchy). *Υποθέτουμε ότι $a_n \neq -1$ για κάθε n. Τότε το άπειρο γινόμενο*

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$$

συγκλίνει αν και μόνο αν

$$\lim_{m,k\to\infty}\left(\prod_{n=k}^{m}(1+a_n)\right) = 1,$$

δηλαδή αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $m \geq k \geq N$

$$\left|\prod_{n=k}^{m}(1+a_n) - 1\right| < \varepsilon.$$

Απόδειξη. Θέτουμε

$$P_k = \prod_{n=1}^{k}(1+a_n).$$

Υποθέτουμε πρώτα ότι το $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ συγκλίνει. Τότε η ακολουθία (P_k) συγκλίνει σε κάποιον μη μηδενικό αριθμό x. Άρα υπάρχει $N_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$|P_n| > \frac{|x|}{2} \qquad \text{για κάθε } n \geq N_1.$$

Έστω τώρα $\varepsilon > 0$. Επειδή η (P_k) είναι ακολουθία Cauchy, υπάρχει $N > N_1$ τέτοιο ώστε

$$|P_{k-1} - P_m| < \frac{\varepsilon|x|}{2} \qquad \text{για κάθε } m \geq k \geq N.$$

Τότε, για κάθε $m \geq k \geq N$, έχουμε

$$\frac{\varepsilon|x|}{2} > |P_{k-1} - P_m| = |P_{k-1}| \left| \frac{P_m}{P_{k-1}} - 1 \right| \geq \frac{|x|}{2} \left| \prod_{n=k}^{m} (1 + a_n) - 1 \right|,$$

οπότε

$$\left| \prod_{n=k}^{m} (1 + a_n) - 1 \right| < \varepsilon,$$

όπως θέλαμε.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση, υποθέτουμε ότι

$$\prod_{n=k}^{m} (1 + a_n) = \frac{P_m}{P_{k-1}}$$

συγκλίνει στο 1 όταν $m, k \to \infty$ και $m \geq k$. Θα δείξουμε ότι η (P_k) συγκλίνει.

Θέτοντας $\varepsilon = 1$ και χρησιμοποιώντας το ίδιο επιχείρημα όπως στα άπειρα αθροίσματα, βλέπουμε ότι η (P_k) είναι φραγμένη. Άρα υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε

$$|P_k| \leq M \qquad \text{για κάθε } k \in \mathbb{N}.$$

Για να δείξουμε ότι η (P_k) συγκλίνει, έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\left| \frac{P_m}{P_{k-1}} - 1 \right| < \frac{\varepsilon}{M} \qquad \text{για κάθε } m \geq k \geq N.$$

Πολλαπλασιάζοντας και τις δύο πλευρές με $|P_{k-1}|$, παίρνουμε

$$|P_m - P_{k-1}| < \varepsilon \qquad \text{για κάθε } m \geq k \geq N.$$

Άρα η (P_k) είναι ακολουθία Cauchy και επομένως συγκλίνει.

Μένει να δείξουμε ότι το όριό της δεν είναι 0. Θέτουμε $\varepsilon = \frac{1}{2}$, οπότε υπάρχει $M \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\left| \prod_{n=M}^{m} (1 + a_n) - 1 \right| < \frac{1}{2} \qquad \text{για κάθε } m \geq M.$$

Άρα, ειδικότερα,

$$\left| \prod_{n=M}^{m} (1 + a_n) \right| > \frac{1}{2} \qquad \text{για κάθε } m \geq M.$$

Θέτουμε

$$c := \prod_{n=1}^{M-1} (1 + a_n).$$

Τότε το c είναι μη μηδενική σταθερά και

$$\left| \prod_{n=1}^{m} (1 + a_n) \right| = |c| \left| \prod_{n=M}^{m} (1 + a_n) \right| > \frac{|c|}{2} \qquad \text{για κάθε } m \geq M.$$

Αυτό δείχνει ότι το όριο της (P_k) δεν μπορεί να είναι 0. □

Στη συνέχεια δίνουμε μια σύνδεση ανάμεσα στο

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) \qquad \text{και} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Θα δούμε ότι η διάκριση ανάμεσα σε σύγκλιση και απόκλιση ενός άπειρου γινομένου μπορεί να γίνει εξετάζοντας το αντίστοιχο άπειρο άθροισμα. Ξεκινάμε με ένα λήμμα.

Λήμμα 6.5. *Αν $x \in [0,1]$, τότε*

$$1+x \leq e^x \leq 1+2x.$$

Απόδειξη. Ορίζουμε τις συναρτήσεις $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = e^x - x - 1 \qquad \text{και} \qquad g(x) = 1 + 2x - e^x,$$

και εφαρμόζουμε τη συνηθισμένη τεχνική του απειροστικού λογισμού για να βρούμε τα απόλυτα ακρότατα των f και g. Έχουμε $f(x) \geq f(0)$ και $g(x) \geq g(0)$ για όλα τα $x \in [0,1]$, πράγμα που δίνει την επιθυμητή ανισότητα. □

Θεώρημα 6.6. *Έστω (a_n) ακολουθία μιγαδικών αριθμών. Τότε το άπειρο γινόμενο*

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$$

συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$$

συγκλίνει.

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας το προηγούμενο λήμμα, παίρνουμε

$$\prod_{n=N}^{m}(1+|a_n|) \leq \exp\left(\sum_{n=N}^{m}|a_n|\right),$$

και

$$\exp\left(\frac{1}{2}\sum_{n=N}^{m}|a_n|\right) \leq \prod_{n=N}^{m}(1+|a_n|),$$

όπου N είναι αρκετά μεγάλος ώστε $|a_n| \leq 1$ για όλα τα $n \geq N$. Έπειτα χρησιμοποιούμε το θεώρημα μονοτονικής σύγκλισης για να πάρουμε το ζητούμενο. Οι λεπτομέρειες αφήνονται στον αναγνώστη. □

Θεώρημα 6.7. *Αν το*

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$$

συγκλίνει, τότε και το

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$$

συγκλίνει. Με άλλα λόγια, αν το $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ συγκλίνει απολύτως, τότε συγκλίνει.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι το
$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$$
συγκλίνει. Από το προηγούμενο θεώρημα έπεται ότι $|a_n| \to 0$, άρα υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $a_n \neq -1$ για όλα τα $n \geq N$. Άρα η πρώτη προϋπόθεση του ορισμού της σύγκλισης του $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ ικανοποιείται.

Θέτουμε
$$P_k = \prod_{n=N}^{k}(1+a_n) \qquad \text{και} \qquad Q_k = \prod_{n=N}^{k}(1+|a_n|) \qquad \text{για κάθε } k \geq N.$$
Παρατηρούμε πρώτα ότι
$$P_k = 1 + f,$$
όπου f είναι πολυώνυμο ως προς $a_N, a_{N+1}, \ldots, a_k$, ενώ
$$Q_k = 1 + f^*,$$
όπου κάθε όρος του f^* είναι η απόλυτη τιμή του αντίστοιχου όρου του f. Επομένως
$$|P_k - 1| = |f| \leq f^* = Q_k - 1 \qquad \text{για κάθε } k \geq N.$$
Γενικότερα, για οποιοδήποτε πεπερασμένο γινόμενο, ισχύει
$$\left|\prod(1+a_n) - 1\right| \leq \prod(1+|a_n|) - 1. \tag{49}$$
Τώρα, για $m > k \geq N$, από την (49) παίρνουμε
$$\left|\frac{P_m}{P_k} - 1\right| \leq \frac{Q_m}{Q_k} - 1,$$
και συνεπώς
$$\begin{aligned}|P_m - P_k| &= |P_k|\left|\frac{P_m}{P_k} - 1\right| \\ &\leq Q_k\left(\frac{Q_m}{Q_k} - 1\right) \\ &= Q_m - Q_k.\end{aligned}$$
Εφόσον η (Q_k) συγκλίνει, είναι ακολουθία Cauchy, άρα
$$Q_m - Q_k \to 0 \qquad \text{όταν } m, k \to \infty.$$
Άρα και η (P_k) είναι ακολουθία Cauchy, επομένως συγκλίνει. Μένει μόνο να παρατηρήσουμε ότι, όπως και πριν, το όριό της δεν μπορεί να είναι 0, επειδή τα μερικά ουραία γινόμενα είναι τελικά κοντά στο 1. Άρα το $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ συγκλίνει. □

Απόδειξη. Εφόσον η $(Q_k)_{k\geq N}$ συγκλίνει, η $(P_k)_{k\geq N}$ είναι επίσης συγκλίνουσα. Μένει να δείξουμε ότι
$$\lim_{k\to\infty} P_k \neq 0.$$
Από το κριτήριο Cauchy, υπάρχουν ακέραιοι $M > N > 0$ τέτοιοι ώστε
$$\left|\prod_{n=m}^{k}(1+|a_n|) - 1\right| < \frac{1}{2} \qquad \text{για κάθε } k > m \geq M.$$

Άρα, από την (49), παίρνουμε

$$\left|\prod_{n=m}^{k}(1+a_n)-1\right|<\frac{1}{2} \qquad \text{για κάθε } k>m\geq M.$$

Επομένως

$$\left|\prod_{n=m}^{k}(1+a_n)\right|>\frac{1}{2} \qquad \text{για κάθε } k>m\geq M.$$

Ειδικότερα,

$$\left|\prod_{n=M+1}^{k}(1+a_n)\right|>\frac{1}{2} \qquad \text{για κάθε } k>M+1.$$

Τότε

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty}|P_k| &= \lim_{k\to\infty}\left|\prod_{n=N}^{k}(1+a_n)\right| \\
&= \lim_{k\to\infty}\left|\left(\prod_{n=N}^{M}(1+a_n)\right)\left(\prod_{n=M+1}^{k}(1+a_n)\right)\right| \\
&= \left|\prod_{n=N}^{M}(1+a_n)\right|\lim_{k\to\infty}\left|\prod_{n=M+1}^{k}(1+a_n)\right| \\
&\geq \frac{1}{2}\left|\prod_{n=N}^{M}(1+a_n)\right|>0.
\end{aligned}$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Πόρισμα 6.8. *Αν η σειρά*

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$$

συγκλίνει, τότε το γινόμενο

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$$

συγκλίνει.

Απόδειξη. Αυτό ακολουθεί αμέσως από τα προηγούμενα δύο θεωρήματα. □

Από το παραπάνω πόρισμα, είναι τώρα εύκολο να δούμε ότι τα άπειρα γινόμενα στο (48) συγκλίνουν.

7 Τύπος γινομένου του Euler

Είμαστε τώρα έτοιμοι να δώσουμε την απόδειξη του τύπου γινομένου του Euler, ο οποίος συνδέει ένα άπειρο άθροισμα μιας πολλαπλασιαστικής συνάρτησης με ένα άπειρο γινόμενο. Διαισθητικά, ο λόγος πίσω από αυτόν τον τύπο είναι το θεμελιώδες θεώρημα της αριθμητικής.

Θεώρημα 7.1 (Τύπος γινομένου του Euler). *Έστω f μια πολλαπλασιαστική συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η σειρά*

$$\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$$

συγκλίνει απολύτως. Τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_p \big(1 + f(p) + f(p^2) + \cdots\big),$$

όπου το γινόμενο λαμβάνεται πάνω σε όλους τους πρώτους αριθμούς και είναι απολύτως συγκλίνον. Αν, επιπλέον, η f είναι πλήρως πολλαπλασιαστική, τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_p (1 - f(p))^{-1}.$$

Απόδειξη. Θυμόμαστε από τα προηγούμενα αποτελέσματα ότι το

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$$

συγκλίνει απολύτως αν το

$$\sum |a_n|$$

συγκλίνει.

Επομένως εξετάζουμε

$$\sum_p |f(p) + f(p^2) + \cdots| \leq \sum_p |f(p)| + \sum_p |f(p^2)| + \cdots \leq \sum_{n=2}^{\infty} |f(n)|.$$

Άρα το γινόμενο

$$\prod_p \big(1 + f(p) + f(p^2) + \cdots\big)$$

συγκλίνει απολύτως.

Θέτουμε τώρα

$$P(x) := \prod_{p \leq x} \big(1 + f(p) + f(p^2) + \cdots\big).$$

Για σταθερό x, ο αριθμός των παραγόντων του $P(x)$ είναι πεπερασμένος και κάθε παράγοντας είναι απολύτως συγκλίνουσα σειρά, αφού η $\sum |f(n)|$ συγκλίνει. Άρα, από το θεώρημα του Cauchy για γινόμενα σειρών, μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε τους όρους και να τους αναδιατάξουμε με οποιονδήποτε τρόπο θέλουμε, και το αποτέλεσμα θα εξακολουθεί να συγκλίνει απολύτως.

Από την πολλαπλασιαστικότητα της f, ένας τυπικός όρος έχει τη μορφή

$$f(p_1^{a_1}) f(p_2^{a_2}) \cdots f(p_k^{a_k}) = f(p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}),$$

όπου

$$2 = p_1 < p_2 < \cdots < p_k \leq x$$

είναι οι πρώτοι μικρότεροι ή ίσοι του x και οι $a_1, a_2, \ldots, a_k$ είναι μη αρνητικοί ακέραιοι. Εφόσον κάθε $n > 1$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γινόμενο πρώτων, παίρνουμε

$$P(x) = \sum_{n \in A} f(n),$$

όπου A είναι το σύνολο όλων των θετικών ακεραίων των οποίων όλοι οι πρώτοι παράγοντες είναι μικρότεροι ή ίσοι του x.

Τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) - P(x) = \sum_{n \in B} f(n),$$

όπου B είναι το σύνολο όλων των θετικών ακεραίων που έχουν κάποιο πρώτο παράγοντα μεγαλύτερο του x. Επομένως

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} f(n) - P(x)\right| \leq \sum_{n\in B} |f(n)| \leq \sum_{n>x} |f(n)| = \sum_{n=1}^{\infty} |f(n)| - \sum_{n\leq x} |f(n)|,$$

και το τελευταίο τείνει στο 0 όταν $x \to \infty$. Άρα

$$P(x) \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \qquad \text{όταν } x \to \infty.$$

Αν η f είναι πλήρως πολλαπλασιαστική, τότε

$$f(p^n) = f(p)^n \qquad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N},$$

και το γινόμενο γράφεται

$$\prod_p \big(1 + f(p) + f(p)^2 + f(p)^3 + \cdots\big) = \prod_p (1 - f(p))^{-1}.$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε ήδη εξασφαλίσει τη σύγκλιση της γεωμετρικής σειράς

$$1 + f(p) + f(p)^2 + f(p)^3 + \cdots .$$

Άρα $|f(p)| < 1$ και ο τύπος

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(p)^n = (1 - f(p))^{-1}$$

που εφαρμόζουμε παραπάνω είναι έγκυρος. □

Εφαρμόζοντας τον τύπο γινομένου του Euler σε απολύτως συγκλίνουσες Dirichlet σειρές, παίρνουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 7.2. *Υποθέτουμε ότι η σειρά*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) n^{-s}$$

συγκλίνει απολύτως για $\sigma > \sigma_a$. Αν η f είναι πολλαπλασιαστική και το $s \in \mathbb{C}$ έχει πραγματικό μέρος $\sigma > \sigma_a$, τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) n^{-s} = \prod_p \big(1 + f(p)p^{-s} + f(p^2)p^{-2s} + \cdots\big).$$

Επιπλέον, αν η f είναι πλήρως πολλαπλασιαστική, τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) n^{-s} = \prod_p (1 - f(p)p^{-s})^{-1} \qquad \text{για } \sigma > \sigma_a.$$

Επιπρόσθετα, κάθε ένα από αυτά τα γινόμενα συγκλίνει απολύτως για $\sigma > \sigma_a$.

Απόδειξη. Αυτό ακολουθεί αμέσως από το προηγούμενο θεώρημα. □

Αντικαθιστώντας στο προηγούμενο θεώρημα τις

$$f(n) = 1,\ \mu(n),\ \varphi(n),\ d(n),\ \sigma(n),\ \lambda(n),\ \chi(n),$$

παίρνουμε τους ακόλουθους τύπους.

Πόρισμα 7.3. *Για $s \in \mathbb{C}$ με πραγματικό μέρος σ, ισχύουν οι παρακάτω τύποι:*

(i)
$$\zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1} \qquad \text{αν } \sigma > 1.$$

(ii)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \prod_p (1 - p^{-s}) = \frac{1}{\zeta(s)} \qquad \text{αν } \sigma > 1.$$

(iii)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s} = \prod_p (1 + p^{-s})^{-1} = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} \qquad \text{αν } \sigma > 1.$$

(iv)
$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_p (1 - \chi(p)p^{-s})^{-1} \qquad \text{αν } \sigma > 1.$$

Επιπλέον, κάθε ένα από τα γινόμενα στα (i)–(iv) συγκλίνει απολύτως.

Απόδειξη. Θυμόμαστε ότι η
$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$
συγκλίνει απολύτως για $\sigma > 1$. Άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε το προηγούμενο θεώρημα στη ζ και να πάρουμε το (i).

Επίσης,
$$|\mu(n)n^{-s}| \le n^{-\sigma} \qquad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N},$$
και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\sigma}$ συγκλίνει για $\sigma > 1$. Άρα η σειρά στο (ii) συγκλίνει απολύτως για $\sigma > 1$. Ομοίως, επειδή
$$|\lambda(n)| \le 1 \qquad \text{και} \qquad |\chi(n)| \le 1 \qquad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N},$$
οι σειρές στα (iii) και (iv) συγκλίνουν επίσης απολύτως για $\sigma > 1$. Εφόσον οι συναρτήσεις λ και χ είναι πλήρως πολλαπλασιαστικές, παίρνουμε τα (ii), (iii) και (iv) από το προηγούμενο θεώρημα. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Στη συνέχεια δίνουμε ένα ακόμη αποτέλεσμα που βοηθά στον υπολογισμό γινομένων Euler για Dirichlet σειρές.

Θεώρημα 7.4. *Υποθέτουμε ότι οι Dirichlet σειρές*
$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s} \qquad \text{και} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} g(n)n^{-s}$$
συγκλίνουν απολύτως για $\sigma > a$ και $\sigma > b$, αντιστοίχως. Τότε για
$$\sigma > \max\{a, b\}$$
ισχύει
$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} g(n)n^{-s}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} h(n)n^{-s},$$
όπου
$$h = f * g$$

είναι το γινόμενο Dirichlet των f και g, δηλαδή

$$h(n) = \sum_{d|n} f(d)\, g\Big(\frac{n}{d}\Big).$$

Απόδειξη. Έστω $\sigma > \max\{a, b\}$. Εφόσον και οι δύο σειρές

$$\sum f(n)n^{-s} \qquad \text{και} \qquad \sum g(n)n^{-s}$$

συγκλίνουν απολύτως, μπορούμε να τις πολλαπλασιάσουμε και να αναδιατάξουμε τους όρους όπως θέλουμε. Έχουμε

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty} g(m)m^{-s}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} f(n)g(m)(nm)^{-s}.$$

Ομαδοποιώντας τώρα τους όρους για τους οποίους $nm = k$, η παραπάνω έκφραση γίνεται

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{nm=k} f(n)g(m)\right)k^{-s} = \sum_{k=1}^{\infty} h(k)k^{-s},$$

όπου

$$h(k) = \sum_{nm=k} f(n)g(m) = \sum_{d|k} f(d)\, g\Big(\frac{k}{d}\Big).$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Πόρισμα 7.5. *Για $s \in \mathbb{C}$ με πραγματικό μέρος σ, ισχύουν οι ακόλουθοι τύποι:*

(i)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} = \prod_p (1-p^{-s})(1-p^{1-s})^{-1} \qquad \text{αν } \sigma > 2.$$

(ii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^s} = \zeta^2(s) = \prod_p (1-p^{-s})^{-2} \qquad \text{αν } \sigma > 1.$$

(iii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(n)}{n^s} = \zeta(s-1)\zeta(s) = \prod_p (1-p^{1-s})^{-1}(1-p^{-s})^{-1} \qquad \text{αν } \sigma > 2.$$

Απόδειξη. Εφόσον η συνάρτηση πλήθους διαιρετών ικανοποιεί

$$d = 1 * 1$$

και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s),$$

παίρνουμε από το Θεώρημα ?? και το Πόρισμα ?? ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(n)n^{-s} = \zeta(s)\zeta(s) = \zeta^2(s) = \prod_p (1-p^{-s})^{-2} \qquad \text{για } \sigma > 1.$$

Άρα αποδείχθηκε το (ii).

Στη συνέχεια, επειδή
$$|\varphi(n)| \leq n,$$
έχουμε
$$|\varphi(n)n^{-s}| \leq n^{1-\sigma}.$$
Εφόσον η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n^{1-\sigma}$ συγκλίνει για $\sigma > 2$, η σειρά
$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n)n^{-s}$$
συγκλίνει απολύτως όταν $\sigma > 2$.

Επιπλέον, αν $N(n) = n$ είναι η ταυτοτική αριθμητική συνάρτηση, τότε
$$1 * \varphi = N.$$
Άρα, από το Θεώρημα ??, παίρνουμε για $\sigma > 2$:
$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^s} = \zeta(s-1).$$
Δηλαδή
$$\zeta(s)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \zeta(s-1),$$
και επομένως
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}.$$
Χρησιμοποιώντας τώρα το Πόρισμα ??, παίρνουμε
$$\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} = \frac{\prod_p (1-p^{1-s})^{-1}}{\prod_p (1-p^{-s})^{-1}} = \prod_p (1-p^{-s})(1-p^{1-s})^{-1},$$
οπότε αποδείχθηκε το (i).

Ομοίως, επειδή
$$\sigma = N * 1,$$
παίρνουμε από το Θεώρημα ?? ότι, για $\sigma > 2$,
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(n)}{n^s} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{N(n)}{n^s}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}\right) = \zeta(s-1)\zeta(s).$$
Και πάλι, από το Πόρισμα ??,
$$\zeta(s-1)\zeta(s) = \prod_p (1-p^{1-s})^{-1}(1-p^{-s})^{-1}.$$
Άρα αποδείχθηκε και το (iii). □

Πόρισμα 7.6. *Για $s \in \mathbb{C}$ με $\sigma > 1$, ισχύουν:*

(i) $\zeta(s) \neq 0$,

(ii)
$$\log \zeta(s) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\log n}\, n^{-s},$$

(iii)

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)\, n^{-s}.$$

Εδώ ο κλάδος του $\log \zeta(s)$ *επιλέγεται έτσι ώστε να είναι πραγματικός πάνω στον πραγματικό άξονα.*

Απόδειξη. Έστω $\sigma > 1$. Από το Πόρισμα ??, γνωρίζουμε ότι

$$\zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}$$

και ότι το γινόμενο αυτό συγκλίνει απολύτως και δεν έχει κανέναν μηδενικό παράγοντα. Άρα

$$\zeta(s) \neq 0.$$

Αυτό αποδεικνύει το (i).

Έστω τώρα $s \in \mathbb{R}$ με $s > 1$. Παίρνοντας λογάριθμο και στις δύο πλευρές του γινομένου Euler για τη $\zeta(s)$, παίρνουμε

$$\log \zeta(s) = \sum_p \log(1 - p^{-s})^{-1}.$$

Για κάθε πρώτο p, επειδή $|p^{-s}| < 1$, έχουμε

$$\log(1 - p^{-s})^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p^{-ks}}{k}.$$

Άρα

$$\log \zeta(s) = \sum_p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p^{-ks}}{k}.$$

Τώρα παρατηρούμε ότι ο όρος $\frac{p^{-ks}}{k}$ είναι ακριβώς

$$\frac{\Lambda(p^k)}{\log(p^k)} (p^k)^{-s},$$

αφού $\Lambda(p^k) = \log p$ και $\log(p^k) = k \log p$. Επομένως

$$\log \zeta(s) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\log n}\, n^{-s}.$$

Έτσι αποδείχθηκε ο τύπος του (ii) για πραγματικά $s > 1$.

Παρατηρούμε τώρα ότι

$$\left| \frac{\Lambda(n)}{\log n} n^{-s} \right| \leq n^{-\sigma} \qquad (n \geq 2),$$

οπότε η δεξιά πλευρά του (ii) ορίζει αναλυτική συνάρτηση στο ημιεπίπεδο $\sigma > 1$. Και η αριστερή πλευρά, ως $\log \zeta(s)$ με τον επιλεγμένο κλάδο, είναι επίσης αναλυτική στο ίδιο ημιεπίπεδο, αφού από το (i) η $\zeta(s)$ δεν μηδενίζεται εκεί. Επειδή οι δύο αναλυτικές συναρτήσεις συμφωνούν για όλα τα πραγματικά $s > 1$, συμφωνούν παντού στο ημιεπίπεδο $\sigma > 1$. Άρα το (ii) ισχύει για κάθε s με $\sigma > 1$.

Για το (iii), θυμόμαστε την ταυτότητα

$$\Lambda * 1 = \log,$$

δηλαδή
$$\sum_{d|n} \Lambda(d) = \log n.$$
Άρα, από το Θεώρημα ??, παίρνουμε
$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-s} \right) \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (\log n)\, n^{-s}.$$
Αλλά
$$\zeta'(s) = \frac{d}{ds} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = -\sum_{n=1}^{\infty} (\log n)\, n^{-s},$$
οπότε
$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-s} \right) \zeta(s) = -\zeta'(s).$$
Διαιρώντας με $\zeta(s) \neq 0$, παίρνουμε
$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)\, n^{-s},$$
όπως θέλαμε.

Εναλλακτικά, μπορούμε να διαφορίσουμε τον τύπο του (ii) και να πάρουμε
$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_{p} \sum_{k=1}^{\infty} (\log p)\, p^{-ks} = -\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)\, n^{-s}.$$
Η απόδειξη ολοκληρώθηκε. $\square$

8 Η εξίσωση του Pell

Ένα γεγονός που όλοι επιμένουν να σου λένε για την εξίσωση του Pell είναι ότι ο Pell δεν είχε καμία σχέση με αυτήν. Ο Euler, απ' ό,τι φαίνεται, έκανε το λάθος να αποδώσει το έργο του Brouckner στον Pell. Ωστόσο, το όνομα εξακολουθεί να χρησιμοποιείται για τη μελέτη των ακέραιων λύσεων (x, y) της εξίσωσης

$$x^2 - Ny^2 = 1$$

για διάφορους ακεραίους N. Αν το N είναι τέλειο τετράγωνο, ή αν $N < 0$, δεν είναι δύσκολο να δει κανείς ότι υπάρχουν μόνο οι τετριμμένες λύσεις $(\pm 1, 0)$. Η εξίσωση του Pell με $N = 8$ εμφανίστηκε στην Άσκηση 1.1.3, σε σχέση με το ερώτημα ποιοι τριγωνικοί αριθμοί είναι επίσης τετράγωνα.

Ο Fermat ήταν ο πρώτος μαθηματικός που διατύπωσε την εικασία ότι για $N > 0$, όταν το N δεν είναι τέλειο τετράγωνο, υπάρχουν άπειρες πολλές λύσεις. Έθεσε στους συναδέλφους του τις ειδικές περιπτώσεις $N = 61$ και $N = 109$, λέγοντας ότι είχε διαλέξει αρκετά μικρούς αριθμούς *pour ne vous donner pas trop de peine* ("ώστε να μη σας δώσει υπερβολικό κόπο"). Στην πραγματικότητα όμως επιδεικνυόταν, αφού οι ελάχιστες λύσεις είναι

$$1766319049^2 - 61 \cdot 226153980^2 = 1 \qquad \text{και} \qquad 158070671986249^2 - 109 \cdot 15140424455100^2 = 1.$$

Στην πραγματικότητα, η μελέτη των εξισώσεων του Pell είναι πολύ παλαιότερη. Ο Αρχιμήδης, στο έργο *Η μέτρηση του κύκλου*, χρησιμοποίησε το γεγονός ότι το $1351/780$ είναι μια πολύ καλή προσέγγιση του $\sqrt{3}$. Ο λόγος είναι ότι

$$1351^2 - 3 \cdot 780^2 = 1, \qquad \text{οπότε} \qquad \frac{1351^2}{780^2} - 3 = \frac{1}{780^2}.$$

Πόσα γνώριζε ο Αρχιμήδης για την εξίσωση του Pell; Το 1773 ανακαλύφθηκε ένα χειρόγραφο στη βιβλιοθήκη του Wolfenbüttel. Περιέγραφε ένα πρόβλημα που είχε θέσει ο Αρχιμήδης στους συναδέλφους του Ερατοσθένη και Απολλώνιο, γραμμένο ως ποίημα σε 22 δίστιχα:

> Αν είσαι επιμελής και σοφός, ω ξένε, υπολόγισε τον αριθμό των βοδιών του Ήλιου, τα οποία κάποτε έβοσκαν στα λιβάδια της Θρινακίας, χωρισμένα σε τέσσερα κοπάδια διαφορετικών χρωμάτων, το ένα γαλακτόλευκο, το άλλο στιλπνό μαύρο ...

Η Θρινακία είναι η Σικελία, το "τριγωνικό" νησί. Το πρόβλημα συνεχίζει περιγράφοντας τις σχέσεις ανάμεσα στα μεγέθη των κοπαδιών διαφορετικών χρωμάτων. Συνολικά, υπάρχουν επτά γραμμικές εξισώσεις και οκτώ άγνωστοι: ο αριθμός των αγελάδων και των ταύρων κάθε χρώματος. Μέχρι εδώ, πρόκειται για ένα απλό πρόβλημα γραμμικής άλγεβρας, αν και οι αριθμοί που εμφανίζονται είναι μεγάλοι. Η μικρότερη λύση είναι ένα κοπάδι από 50389082 ζώα. Ο Αρχιμήδης λέει ότι, αν μπορέσεις να λύσεις μέχρι εδώ, τότε

> ... δεν θα σε αποκαλέσουν αμαθή ή αδαή στους αριθμούς, αλλά ακόμη δεν θα συγκαταλεγείς ανάμεσα στους σοφούς.

Στη συνέχεια προσθέτει ακόμη δύο συνθήκες: ότι ο αριθμός των λευκών και των μαύρων ταύρων να είναι τετράγωνος αριθμός και ότι ο αριθμός των κίτρινων και των στικτών ταύρων να είναι τριγωνικός αριθμός.

> Αν είσαι ικανός, ω ξένε, να βρεις όλα αυτά ... τότε θα φύγεις στεφανωμένος με δόξα και γνωρίζοντας ότι έχεις κριθεί τέλειος σε αυτό το είδος σοφίας.

Ύστερα από κάποιους αλγεβρικούς μετασχηματισμούς, οι πρόσθετες συνθήκες απαιτούν τη λύση της εξίσωσης του Pell

$$x^2 - 4729494y^2 = 1,$$

με την πρόσθετη συνθήκη ότι το y να είναι διαιρετό από το 9314. Μια αναπαράσταση της λύση, που περιγράφεται παρακάτω, βρέθηκε από τον Amthor το 1880. Το μέγεθος του κοπαδιού είναι περίπου

$$7.76 \cdot 10^{206544}$$

ζώα. Το 1895, η Μαθηματική Λέσχη του Hillsboro, στο Illinois, έδωσε μια απάντηση με προσέγγιση έως 32 δεκαδικά ψηφία. Αφιέρωσαν τέσσερα χρόνια στον υπολογισμό και ανακοίνωσαν με περηφάνια (Bell, 1895) ότι η τελική απάντηση είχε μήκος μισό μίλι. Η ακριβής λύση βρέθηκε από τους Williams, German και Zarnke το 1965 (Williams, German, Zarnke, 1965), σε έναν IBM 7040 με μνήμη μόλις 32K. Για μια καλή συζήτηση του προβλήματος, βλ. Vardi (1998). Το βιβλίο του Weil (Weil, 1983) περιέχει περισσότερα για την ιστορία της εξίσωσης του Pell.

Αλγεβρική ερμηνεία των λύσεων

Οι λύσεις της εξίσωσης του Pell μπορούν να ιδωθούν γεωμετρικά ως σημεία πλέγματος πάνω σε μια υπερβολή. Όμως μια αλγεβρική ερμηνεία είναι επίσης πολύ χρήσιμη. Μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε την εξίσωση του Pell ως

$$(x + \sqrt{N}\, y)(x - \sqrt{N}\, y) = 1.$$

Αυτό υποδεικνύει να εξετάσουμε αριθμούς της μορφής $x + \sqrt{N}\, y$, όπου x και y είναι ακέραιοι. Κατά κάποιον τρόπο, αυτοί μοιάζουν με μιγαδικούς αριθμούς, με το $\sqrt{N}$ να παίζει τον ρόλο του i. Μπορούμε να πολλαπλασιάζουμε τέτοιους αριθμούς με τον προφανή κανόνα:

$$\begin{aligned}(x + \sqrt{N}\, y) \cdot (a + \sqrt{N}\, b) &= ax + \sqrt{N}\, ay + \sqrt{N}\, bx + Nby \\ &= (ax + Nby) + \sqrt{N}\,(bx + ay).\end{aligned}$$

Άσκηση Να δείξετε ότι αν (x, y) είναι μία λύση της εξίσωσης του Pell και αν (a, b) είναι μία άλλη, τότε ορίζοντας

$$(a, b) \cdot (x, y) = (ax + Nby,\ bx + ay)$$

παίρνουμε μια νέα λύση. Παρατηρήστε ότι η πράξη $\cdot$ είναι ένας νέος τρόπος συνδυασμού ζευγών σημείων.

Με αυτή την παρατήρηση, μπορούμε να πούμε ότι οι λύσεις της εξίσωσης του Pell σχηματίζουν μια ομάδα. Ο κανόνας πολλαπλασιασμού για τον συνδυασμό δύο λύσεων είναι αυτός που δόθηκε παραπάνω με το $\cdot$. Το ουδέτερο στοιχείο της ομάδας είναι η τετριμμένη λύση $(1, 0)$, που αντιστοιχεί στον αριθμό

$$1 = 1 + \sqrt{N}\, 0,$$

και το αντίστροφο της λύσης (x, y) είναι η λύση $(x, -y)$.

Λύσεις modulo p

Επειδή σε πρώτη φάση είναι δύσκολο να βρεθούν ακέραιες λύσεις της εξίσωσης του Pell, μπορούμε να αλλάξουμε το πρόβλημα σε ένα διαφορετικό αλλά συγγενικό. Αν σταθεροποιήσουμε έναν πρώτο αριθμό p, υπάρχουν λύσεις modulo p; Πιο ενδιαφέρον όμως είναι το ερώτημα πόσες λύσεις υπάρχουν modulo p.

Στην πραγματικότητα, σε αυτή την ενότητα θα αποδείξουμε το εξής:

Θεώρημα 8.1. *Αν p είναι περιττός πρώτος που δεν διαιρεί το N, τότε ο αριθμός των λύσεων της ισοτιμίας*
$$x^2 - Ny^2 \equiv 1 \pmod p$$
είναι
$$\#\{(x,y) \mid x^2 - Ny^2 \equiv 1 \pmod p\} = \begin{cases} p-1, & \textit{αν υπάρχει } a \textit{ με } a^2 \equiv N \pmod p, \\ p+1, & \textit{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Χρειαζόμαστε πρώτα ένα λήμμα.

Λήμμα 8.2. *Υπάρχουν $p-1$ λύσεις της εξίσωσης*
$$z^2 - w^2 \equiv N \pmod p.$$

Απόδειξη. Μπορούμε να εισαγάγουμε νέες μεταβλητές u και v, που συνδέονται με τα z και w με τις εξισώσεις (modulo p)
$$u = z - w, \qquad v = z + w \qquad \Longleftrightarrow \qquad z = \frac{u+v}{2}, \qquad w = \frac{u-v}{2}.$$
(Μπορούμε να διαιρέσουμε με το 2, επειδή το p είναι περιττό.) Τότε
$$u \cdot v \equiv N \pmod p \qquad \Longleftrightarrow \qquad z^2 - w^2 \equiv N \pmod p.$$

Όμως η εξίσωση ως προς u και v έχει ακριβώς $p-1$ λύσεις, διότι για κάθε κλάση υπολοίπων
$$u = 1, 2, \ldots, p-1$$
παίρνουμε μια λύση θέτοντας
$$v \equiv \frac{N}{u} \pmod p.$$
□

Απόδειξη του Θεωρήματος. Έστω πρώτα ότι
$$N \equiv a^2 \pmod p.$$
Από το λήμμα γνωρίζουμε ότι η εξίσωση
$$x^2 - w^2 \equiv 1 \pmod p$$
έχει ακριβώς $p-1$ λύσεις (x, w). (Εδώ ο αριθμός 1 παίζει τον ρόλο του N στο λήμμα.) Θέτοντας
$$y = \frac{w}{a},$$
παίρνουμε $p-1$ λύσεις (x, y) της εξίσωσης
$$x^2 - Ny^2 \equiv 1 \pmod p.$$
(Γνωρίζουμε ότι $a \not\equiv 0 \pmod p$, αφού το p δεν διαιρεί το N.) Αυτό αποδεικνύει την πρώτη περίπτωση.

Στη συνέχεια, ας υποθέσουμε ότι το N δεν είναι ισότιμο με κανένα τετράγωνο modulo p. Ξέρουμε από το λήμμα ότι υπάρχουν $p-1$ λύσεις (z, w) της εξίσωσης
$$z^2 - w^2 \equiv N \pmod p.$$

Επιπλέον, κανένα από τα w δεν είναι ισότιμο με 0 modulo p, γιατί διαφορετικά θα είχαμε

$$N \equiv z^2 \pmod{p}.$$

Γράφουμε την εξίσωση ως

$$\frac{z^2}{w^2} - \frac{N}{w^2} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Με την αλλαγή μεταβλητών

$$x = \frac{z}{w}, \qquad y = \frac{1}{w},$$

παίρνουμε $p-1$ λύσεις της εξίσωσης

$$x^2 - Ny^2 \equiv \frac{z^2}{w^2} - \frac{N}{w^2} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Επιπλέον, κανένα από τα y δεν είναι ίσο με 0, αφού είναι της μορφής $1/w$. Υπάρχουν ακριβώς δύο ακόμη λύσεις που έχουν

$$y \equiv 0 \pmod{p},$$

δηλαδή οι

$$(\pm 1, 0).$$

Άρα συνολικά υπάρχουν $p+1$ λύσεις. □

Θεώρημα 8.3 (Νόμος της τετραγωνικής αντιστροφής). *Έστω p, q δύο διαφορετικοί περιττοί πρώτοι. Τότε*

$$\left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}}.$$

Το βασικό λήμμα του Eisenstein

Στο εξής, p θα είναι περιττός πρώτος και $a \in \mathbb{Z}$ με $p \nmid a$.

Λήμμα 8.4. *Ισχύει*

$$\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^{\sum_{k=1}^{(p-1)/2} \left\lfloor \frac{2ak}{p} \right\rfloor}.$$

Απόδειξη. Για κάθε άρτιο ακέραιο u με

$$1 \le u \le p-1,$$

έστω $r(u)$ το ελάχιστο θετικό υπόλοιπο του au modulo p. Άρα

$$r(u) \in \{1, 2, \ldots, p-1\} \qquad \text{και} \qquad r(u) \equiv au \pmod{p}.$$

Θεωρούμε τώρα τους αριθμούς

$$(-1)^{r(u)}\, r(u)$$

ως κλάσεις modulo p, γραμμένες πάλι με το ελάχιστο θετικό υπόλοιπό τους.

Ισχυρισμός 1: Οι αριθμοί αυτοί είναι όλοι άρτιοι.

Πράγματι, αν $r(u)$ είναι άρτιος, τότε

$$(-1)^{r(u)} r(u) = r(u)$$

είναι άρτιος. Αν $r(u)$ είναι περιττός, τότε

$$(-1)^{r(u)} r(u) \equiv -r(u) \equiv p - r(u) \pmod{p},$$

και ο $p - r(u)$ είναι άρτιος, αφού p και $r(u)$ είναι περιττοί.

Ισχυρισμός 2: Οι αριθμοί
$$(-1)^{r(u)} r(u)$$
είναι ανά δύο διαφορετικοί καθώς το u διατρέχει τους άρτιους αριθμούς $2, 4, \ldots, p-1$.

Έστω
$$(-1)^{r(u)} r(u) \equiv (-1)^{r(v)} r(v) \pmod{p}.$$
Τότε
$$r(u) \equiv \pm r(v) \pmod{p}.$$
Επειδή
$$r(u) \equiv au, \qquad r(v) \equiv av \pmod{p},$$
και a είναι αντιστρέψιμος modulo p, παίρνουμε
$$u \equiv \pm v \pmod{p}.$$
Αν ίσχυε $u \equiv -v \pmod{p}$, τότε
$$u + v \equiv 0 \pmod{p}.$$
Αλλά $u, v \in \{2, 4, \ldots, p-1\}$, άρα
$$2 \leq u + v \leq 2p - 2.$$
Η μόνη δυνατότητα για να είναι πολλαπλάσιο του p είναι
$$u + v = p,$$
πράγμα αδύνατο, αφού το αριστερό μέλος είναι άρτιο ενώ το δεξί περιττό. Άρα αναγκαστικά
$$u \equiv v \pmod{p}.$$
Επειδή $1 \leq u, v \leq p-1$, συμπεραίνουμε ότι $u = v$.

Υπάρχουν ακριβώς $(p-1)/2$ τέτοιοι άρτιοι αριθμοί, και βρήκαμε ότι οι
$$(-1)^{r(u)} r(u)$$
είναι $(p-1)/2$ διαφορετικοί άρτιοι αριθμοί modulo p. Άρα αποτελούν αναδιάταξη των άρτιων αριθμών
$$2, 4, 6, \ldots, p-1.$$
Επομένως, πολλαπλασιάζοντάς τους, παίρνουμε
$$\prod_{\substack{1 \leq u \leq p-1 \\ u \text{ άρτιος}}} (-1)^{r(u)} r(u) \equiv \prod_{\substack{1 \leq u \leq p-1 \\ u \text{ άρτιος}}} u \pmod{p}.$$
Δηλαδή
$$(-1)^{\sum r(u)} \prod r(u) \equiv \prod u \pmod{p}.$$
Επειδή $r(u) \equiv au \pmod{p}$, έχουμε
$$\prod r(u) \equiv a^{(p-1)/2} \prod u \pmod{p}.$$
Άρα
$$(-1)^{\sum r(u)} a^{(p-1)/2} \prod u \equiv \prod u \pmod{p}.$$

Κανένας από τους άρτιους u δεν διαιρείται από p, άρα μπορούμε να απλοποιήσουμε το γινόμενο $\prod u$, και παίρνουμε
$$a^{(p-1)/2} \equiv (-1)^{\sum r(u)} \pmod p,$$
όπου το άθροισμα εκτείνεται σε όλα τα άρτια $u \in \{2, 4, \ldots, p-1\}$.

Από τον ορισμό του $r(u)$,
$$au = p \left\lfloor \frac{au}{p} \right\rfloor + r(u).$$
Επειδή ο u είναι άρτιος, το au είναι άρτιο. Επειδή ο p είναι περιττός, αν πάρουμε την παραπάνω σχέση modulo 2, παίρνουμε
$$0 \equiv \left\lfloor \frac{au}{p} \right\rfloor + r(u) \pmod 2.$$
Άρα
$$r(u) \equiv \left\lfloor \frac{au}{p} \right\rfloor \pmod 2.$$
Συνεπώς
$$\sum r(u) \equiv \sum \left\lfloor \frac{au}{p} \right\rfloor \pmod 2.$$
Θέτοντας $u = 2k$, $k = 1, \ldots, (p-1)/2$, βρίσκουμε
$$a^{(p-1)/2} \equiv (-1)^{\sum_{k=1}^{(p-1)/2} \left\lfloor \frac{2ak}{p} \right\rfloor} \pmod p.$$
Τώρα, από το κριτήριο του Euler,
$$a^{(p-1)/2} \equiv \left(\frac{a}{p}\right) \pmod p.$$
Και τα δύο μέλη είναι ίσα με ± 1, άρα η σύγκριση modulo p συνεπάγεται ισότητα:
$$\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^{\sum_{k=1}^{(p-1)/2} \left\lfloor \frac{2ak}{p} \right\rfloor}.$$
□

Πόρισμα 8.5. *Για κάθε περιττό πρώτο p,*
$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}.$$

Απόδειξη. Θέτουμε
$$a = \frac{p+1}{2}.$$
Τότε a είναι ακέραιος και
$$a \equiv 2^{-1} \pmod p.$$
Επειδή ένας αριθμός είναι τετραγωνικό υπόλοιπο modulo p αν και μόνον αν το αντίστροφό του είναι τετραγωνικό υπόλοιπο, έχουμε
$$\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{2}{p}\right).$$
Από το Λήμμα 8.4,
$$\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^{\sum_{k=1}^{(p-1)/2} \left\lfloor \frac{2ak}{p} \right\rfloor}.$$

Αλλά
$$2a = p + 1,$$
άρα
$$\left\lfloor \frac{2ak}{p} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(p+1)k}{p} \right\rfloor = \left\lfloor k + \frac{k}{p} \right\rfloor = k,$$
διότι $1 \leq k \leq (p-1)/2 < p$. Επομένως
$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\sum_{k=1}^{(p-1)/2} k} = (-1)^{\frac{(p-1)/2\,((p-1)/2+1)}{2}} = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}.$$

□

3. Η βολική μορφή του Eisenstein για περιττό a

Πρόταση 8.6. *Έστω p περιττός πρώτος και a περιττός ακέραιος με $p \nmid a$. Τότε*
$$\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^{\sum_{k=1}^{(p-1)/2} \left\lfloor \frac{ak}{p} \right\rfloor}.$$

Απόδειξη. Θέτουμε
$$b = \frac{p+a}{2}.$$
Επειδή p και a είναι περιττοί, ο b είναι ακέραιος. Επιπλέον
$$b \equiv a \cdot 2^{-1} \pmod{p}.$$
Άρα
$$\left(\frac{b}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{2^{-1}}{p}\right).$$
Και όπως πριν,
$$\left(\frac{2^{-1}}{p}\right) = \left(\frac{2}{p}\right).$$
Έτσι
$$\left(\frac{b}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{2}{p}\right).$$
Από το Λήμμα 8.4,
$$\left(\frac{b}{p}\right) = (-1)^{\sum_{k=1}^{(p-1)/2} \left\lfloor \frac{2bk}{p} \right\rfloor}.$$
Επειδή
$$2b = p + a,$$
παίρνουμε
$$\left\lfloor \frac{2bk}{p} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(p+a)k}{p} \right\rfloor = \left\lfloor k + \frac{ak}{p} \right\rfloor = k + \left\lfloor \frac{ak}{p} \right\rfloor.$$
Άρα
$$\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\sum_{k=1}^{(p-1)/2} k} (-1)^{\sum_{k=1}^{(p-1)/2} \left\lfloor \frac{ak}{p} \right\rfloor}.$$
Από το Πόρισμα 8.5,
$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\sum_{k=1}^{(p-1)/2} k}.$$
Απλοποιώντας τον κοινό παράγοντα $\left(\frac{2}{p}\right)$, καταλήγουμε
$$\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^{\sum_{k=1}^{(p-1)/2} \left\lfloor \frac{ak}{p} \right\rfloor}.$$

□

4. Η ταυτότητα των lattice points

Πρόταση 8.7. *Αν p, q είναι διαφορετικοί περιττοί πρώτοι, τότε*

$$\sum_{x=1}^{(p-1)/2} \left\lfloor \frac{qx}{p} \right\rfloor + \sum_{y=1}^{(q-1)/2} \left\lfloor \frac{py}{q} \right\rfloor = \frac{(p-1)(q-1)}{4}.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο

$$R = \left\{ (x,y) \in \mathbb{Z}^2 : 1 \le x \le \frac{p-1}{2},\ 1 \le y \le \frac{q-1}{2} \right\}.$$

Είναι φανερό ότι

$$|R| = \frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2} = \frac{(p-1)(q-1)}{4}.$$

Θεωρούμε επίσης την ευθεία

$$L:\ y = \frac{q}{p}x.$$

Θα δείξουμε ότι κανένα lattice point του R δεν ανήκει στην L. Πράγματι, αν $(x,y) \in R$ ικανοποιούσε

$$y = \frac{q}{p}x,$$

τότε

$$py = qx.$$

Επειδή p, q είναι πρώτοι και διαφορετικοί, θα είχαμε $p \mid x$ και $q \mid y$, κάτι αδύνατο αφού

$$1 \le x \le \frac{p-1}{2} < p, \qquad 1 \le y \le \frac{q-1}{2} < q.$$

Άρα κάθε σημείο του R είναι είτε αυστηρά κάτω είτε αυστηρά πάνω από την L.

Για κάθε σταθερό $x \in \{1, \dots, (p-1)/2\}$, ο αριθμός των ακεραίων y με

$$1 \le y < \frac{qx}{p}$$

είναι ακριβώς

$$\left\lfloor \frac{qx}{p} \right\rfloor.$$

Άρα ο συνολικός αριθμός των σημείων του R κάτω από την L είναι

$$\sum_{x=1}^{(p-1)/2} \left\lfloor \frac{qx}{p} \right\rfloor.$$

Αντίστοιχα, για κάθε σταθερό $y \in \{1, \dots, (q-1)/2\}$, ο αριθμός των ακεραίων x με

$$1 \le x < \frac{py}{q}$$

είναι

$$\left\lfloor \frac{py}{q} \right\rfloor.$$

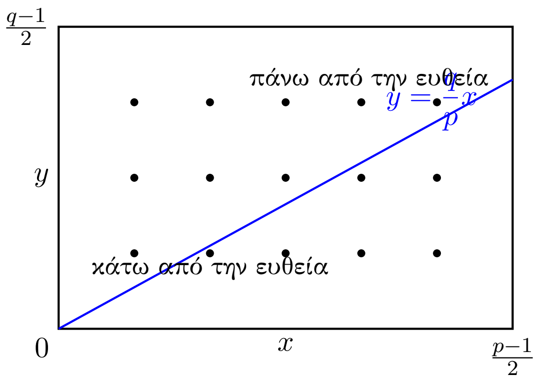
Αυτός είναι ο αριθμός των σημείων του R πάνω από την L στη συγκεκριμένη οριζόντια γραμμή. Άρα ο συνολικός αριθμός των σημείων του R πάνω από την L είναι

$$\sum_{y=1}^{(q-1)/2} \left\lfloor \frac{py}{q} \right\rfloor.$$

Προσθέτοντας τους δύο αριθμούς, παίρνουμε όλο το R. Επομένως

$$\sum_{x=1}^{(p-1)/2} \left\lfloor \frac{qx}{p} \right\rfloor + \sum_{y=1}^{(q-1)/2} \left\lfloor \frac{py}{q} \right\rfloor = |R| = \frac{(p-1)(q-1)}{4}.$$

$\square$



Σχήμα 2: Η ταυτότητα των lattice points στην απόδειξη του Eisenstein.

Θεώρημα 8.8 (Νόμος της τετραγωνικής αντιστροφής). *Έστω p, q διαφορετικοί περιττοί πρώτοι. Τότε*

$$\left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}}.$$

Απόδειξη. Από την Πρόταση 8.6, επειδή ο q είναι περιττός,

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\sum_{x=1}^{(p-1)/2} \left\lfloor \frac{qx}{p} \right\rfloor}.$$

Αντίστοιχα,

$$\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\sum_{y=1}^{(q-1)/2} \left\lfloor \frac{py}{q} \right\rfloor}.$$

Πολλαπλασιάζοντας,

$$\left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\sum_{x=1}^{(p-1)/2} \left\lfloor \frac{qx}{p} \right\rfloor + \sum_{y=1}^{(q-1)/2} \left\lfloor \frac{py}{q} \right\rfloor}.$$

Τώρα εφαρμόζουμε την Πρόταση 8.7:

$$\sum_{x=1}^{(p-1)/2} \left\lfloor \frac{qx}{p} \right\rfloor + \sum_{y=1}^{(q-1)/2} \left\lfloor \frac{py}{q} \right\rfloor = \frac{(p-1)(q-1)}{4}.$$

Άρα

$$\left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}}.$$

$\square$