

Διακριτά Μαθηματικά
5^ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Πρόβλημα 1 Μπορούν να σχεδιαστούν στο επίπεδο 9 ευθύγραμμα τμήματα, έτσι ώστε καθένα από αυτά να τέμνει ακριβώς 3 από τα υπόλοιπα;

Πρόβλημα 2 Έστω G απλό γράφημα με 9 κορυφές. Υποθέτουμε ότι το άθροισμα των βαθμών όλων των κορυφών του G είναι τουλάχιστον 27. Να αποδείξετε ότι το G έχει κάποια κορυφή βαθμού τουλάχιστον 4.

Πρόβλημα 3 Έστω G απλό γράφημα με 10 κορυφές και 28 ακμές. Να αποδείξετε ότι:
(α) Υπάρχουν δύο κορυφές του G που το άθροισμα των βαθμών τους είναι τουλάχιστον 12.
(β) Με την βοήθεια του (α), να αποδείξετε ότι το G περιέχει κύκλο μήκους 4.

Πρόβλημα 4 (α) Ένα σύρμα έχει μήκος 120 cm. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί ολόκληρο, χωρίς να κοπεί, για να σχηματίσει τις ακμές ενός κύβου, καθεμία από τις οποίες έχει μήκος 10 cm;

(β) Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός τομών που πρέπει να κάνουμε στο σύρμα, ώστε να μπορούμε να σχηματίσουμε τον ζητούμενο κύβο;

Πρόβλημα 5 Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει απλό γράφημα με 5 κορυφές των οποίων οι βαθμοί είναι

$$4, 4, 4, 4, 2.$$

Πρόβλημα 6 Να αποδείξετε ότι υπάρχει γράφημα με $2n$ κορυφές του οποίου οι βαθμοί είναι

$$1, 1, 2, 2, \dots, n, n.$$

Πρόβλημα 7 Για κάθε ακέραιο $k \geq 1$, ορίζουμε τον γράφο Q_k , που λέγεται k -διάστατος κύβος ή k -κυβικός γράφος, ως εξής:

- οι κορυφές του Q_k είναι όλες οι δυαδικές ακολουθίες μήκους k , δηλαδή όλες οι ακολουθίες της μορφής

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k), \quad \varepsilon_i \in \{0, 1\},$$

- δύο κορυφές ενώνονται με ακμή αν και μόνο αν οι αντίστοιχες ακολουθίες διαφέρουν σε ακριβώς μία θέση.

Να βρεθούν, ως συναρτήσεις του k ,

- το πλήθος των κορυφών του Q_k ,
- το πλήθος των ακμών του Q_k .

Πρόβλημα 8 Ισχύει ότι δύο απλά γραφήματα είναι υποχρεωτικά ισόμορφα αν:

- και τα δύο έχουν 10 κορυφές και κάθε κορυφή έχει βαθμό 9;
- και τα δύο είναι συνεκτικά, χωρίς κύκλους, και έχουν 6 ακμές;

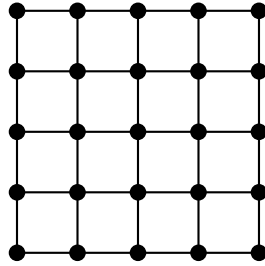
Πρόβλημα 9 Σε ένα συνεκτικό γράφημα οι βαθμοί τεσσάρων κορυφών είναι ίσοι με 3, ενώ οι βαθμοί όλων των άλλων κορυφών είναι ίσοι με 4. Να αποδείξετε ότι δεν μπορούμε να διαγράψουμε μία ακμή με τέτοιο τρόπο ώστε ο γράφος να διασπαστεί σε δύο ισόμορφες συνεκτικές συνιστώσες.

Πρόβλημα 10 Να αποδείξετε ότι ένας συνεκτικός γράφος του οποίου ο αριθμός των κορυφών υπερβαίνει τον αριθμό των ακμών κατά 1 είναι δέντρο.

Πρόβλημα 11 Ένα δίχτυ βόλεϊ έχει τη μορφή ορθογώνιου πλέγματος διαστάσεων 50×600 . Ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός μοναδιαίων νημάτων που μπορούμε να κόψουμε, ώστε το δίχτυ να μη διασπαστεί σε περισσότερα από ένα κομμάτια;

Πρόβλημα 12 Να αποδείξετε ότι σε κάθε πεπερασμένο συνεκτικό γράφο μπορούμε να διαγράψουμε μία κορυφή, μαζί με όλες τις ακμές που προσπίπτουν σε αυτήν, έτσι ώστε ο γράφος που απομένει να παραμείνει συνεκτικός.

Πρόβλημα 13 Είναι δυνατό να σχηματίσουμε το παρακάτω πλέγμα



(α) από 5 τεθλασμένες γραμμές μήκους 8 η καθεμία;

(β) από 8 τεθλασμένες γραμμές μήκους 5 η καθεμία;

(Το μήκος κάθε μοναδιαίου τμήματος του πλέγματος είναι 1.)

Παραδίδετε 6 Προβλήματα έως 31-03-2026.