Διακριτά Μαθηματικά

Σημειώσεις από τις Διαλέξεις

Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Κρήτης
Ηράκλειο, 2026

1 Αρχή του Περιστερώνα

Ορισμός 1.1 (Πληθικός αριθμός). Ένα σύνολο S λέγεται πεπερασμένο αν υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ και $f : S \to \{1, \ldots, m\}$ η οποία είναι 1-1 και επί. Ο m λέγεται πληθάριθμος του S και θα τον συμβολίζομυε με $\#S$ ή $|S|$.

Πρόταση 1.2. *Έστω $f : A \to B$, όπου A, B πεπερασμένα σύνολα.*

a) Αν η f είναι 1-1, τότε $\#A \leq \#B$.

b) Αν η f είναι επί, τότε $\#A \geq \#B$.

Πόρισμα 1.3 (Αρχή Περιστερώνα). *Αν $f : A \to B$ και $\#A > \#B$, τότε η f **δεν** είναι 1-1. Άρα υπάρχουν $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$ τέτοια ώστε $f(x_1) = f(x_2)$.*

Γενικότερα, ισχύει το παρακάτω.

Πρόταση 1.4. *Έστω n, m, r θετικοί ακέραιοι με $n > rm$. Αν βάλουμε n μπάλες σε m κουτιά, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα κουτί με τουλάχιστον $r + 1$ μπάλες.*

Εφαρμογή 1. *Μεταξύ $m + 1$ ακεραίων, υπάρχουν δύο που η διαφορά τους διαιρείται με m.*

Απόδειξη. Έστω $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{m+1}\}$ το σύνολο των ακεραίων. Θεωρούμε τα υπόλοιπα της διαίρεσης του κάθε αριθμού με το m. Τα δυνατά υπόλοιπα είναι το σύνολο $B = \{0, 1, \ldots, m-1\}$. Επειδή το πλήθος των αριθμών $(m+1)$ είναι μεγαλύτερο από το πλήθος των δυνατών υπολοίπων (m), από την Αρχή του Περιστερώνα υπάρχουν τουλάχιστον δύο αριθμοί a_i, a_j που έχουν το ίδιο υπόλοιπο. Συνεπώς, $a_i \equiv a_j \pmod{m} \Rightarrow a_i - a_j = k \cdot m$, άρα η διαφορά τους διαιρείται με το m. □

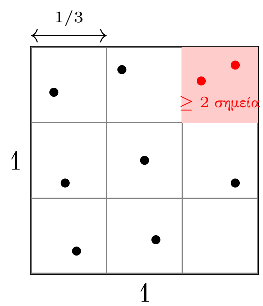
Εφαρμογή 2. *Σε μια συνάντηση m ατόμων, υπάρχουν δύο άτομα με το ίδιο πλήθος γνωστών.*

Απόδειξη. Έστω m άτομα. Ο αριθμός των γνωστών για κάθε άτομο μπορεί να είναι από 0 έως $m - 1$. Παρατηρούμε ότι δεν γίνεται να υπάρχει ταυτόχρονα άτομο με 0 γνωστούς και άτομο με $m - 1$ γνωστούς (αν κάποιος ξέρει όλους, δεν γίνεται κάποιος να μην ξέρει κανέναν). Άρα, οι δυνατές τιμές για το πλήθος των γνωστών είναι είτε $\{0, 1, \ldots, m - 2\}$ είτε $\{1, 2, \ldots, m - 1\}$. Σε κάθε περίπτωση, έχουμε m άτομα (περιστέρια) και $m - 1$ δυνατές τιμές πλήθους γνωστών (φωλιές). Από την Αρχή του Περιστερώνα, τουλάχιστον δύο άτομα θα έχουν το ίδιο πλήθος γνωστών. □

Εφαρμογή 3. *Δίνονται 10 σημεία στο εσωτερικό τετραγώνου πλευράς 1. Τότε υπάρχουν δύο από αυτά σε απόσταση μικρότερη από $0,48$. Επιπλέον, υπάρχουν 3 από αυτά που μπορούν να καλυφθούν από δίσκο ακτίνας $\frac{1}{2}$.*

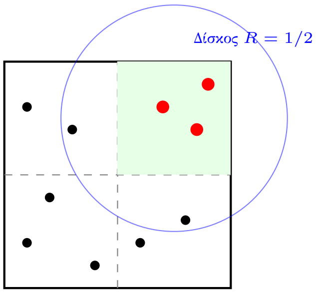
Απόδειξη. **Για την απόσταση:** Χωρίζουμε το τετράγωνο πλευράς 1 σε $3 \times 3 = 9$ ίσα μικρότερα τετράγωνα πλευράς $1/3$. Επειδή έχουμε 10 σημεία και 9 τετραγωνάκια, από την Αρχή του Περιστερώνα, τουλάχιστον 2 σημεία θα βρεθούν στο ίδιο μικρό τετράγωνο. Η μέγιστη απόσταση (διαγώνιος) μέσα στο μικρό τετράγωνο είναι:

$$d = \sqrt{(\frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{3})^2} = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3} < 0,48.$$



Σχήμα: 10 σημεία σε 9 τετράγωνα. Ένα κουτί έχει κόκκινο χρώμα και περιέχει 2 σημεία.

Για τον δίσκο ακτίνας 1/2: Ο δίσκος ακτίνας $1/2$ έχει διάμετρο 1. Ένα τετράγωνο πλευράς 1 μπορεί να καλυφθεί οριακά από κύκλο διαμέτρου $\sqrt{2} \approx 1.41$, οπότε χρειάζεται προσοχή στη διατύπωση. Ωστόσο, μια πιο απλή προσέγγιση για το δεύτερο σκέλος (κάλυψη 3 σημείων). Αν χωρίσουμε το τετράγωνο σε 4 ίσα τετράγωνα πλευράς $1/2$, τότε με 10 σημεία, από την γενικευμένη Αρχή Περιστερώνα ($\lceil 10/4 \rceil = 3$), θα υπάρχουν τουλάχιστον 3 σημεία στο ίδιο τετράγωνο πλευράς $1/2$.



Χωρίζοντας σε 4 κουτιά, με 10 σημεία,
τουλάχιστον ένα έχει $\lceil 10/4 \rceil = 3$ σημεία.

Ένα τετράγωνο πλευράς $1/2$ έχει διαγώνιο $\sqrt{2}/2 \approx 0.707$, άρα καλύπτεται άνετα από δίσκο ακτίνας $1/2$ (που έχει διάμετρο 1). □

Εφαρμογή 4. *Τα τελευταία 1000 χρόνια, καθένας μας είχε έναν πρόγονο A, ώστε υπάρχει άτομο P που ήταν πρόγονος και του πατέρα και της μητέρας του A.*

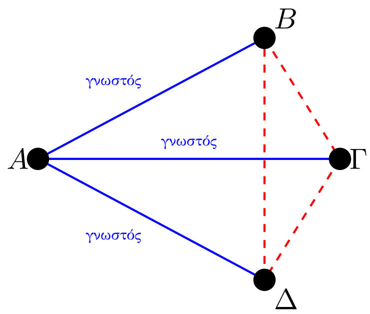
Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι μια γενιά είναι περίπου 30 χρόνια, άρα σε 1000 χρόνια έχουμε περίπου 33 γενιές. Αν όλοι οι πρόγονοι ήταν διαφορετικοί, πριν από n γενιές θα είχαμε 2^n προγόνους. Για $n = 33$, $2^{33} \approx 8.5$ δισεκατομμύρια, αριθμός που υπερβαίνει τον πληθυσμό της Γης εκείνη την εποχή (και σίγουρα τον πληθυσμό της περιοχής καταγωγής). Άρα, αναγκαστικά υπάρχουν επικαλύψεις στο γενεαλογικό δέντρο, δηλαδή άτομα που εμφανίζονται ως πρόγονοι από διαφορετικά κλαδιά (αιμομιξία σε μακρινό βαθμό). □

Εφαρμογή 5. *Σε κάθε πεντάγωνο με ακέραιες συντεταγμένες υπάρχει σημείο στο εσωτερικό του ή στην περίμετρό του με ακέραιες συντεταγμένες.*

Απόδειξη. Οι συντεταγμένες (x, y) μιας κορυφής μπορεί να είναι (άρτιος, άρτιος), (άρτιος, περιττός), (περιττός, άρτιος) ή (περιττός, περιττός). Υπάρχουν δηλαδή 4 δυνατοί συνδυασμοί. Ένα πεντάγωνο έχει 5 κορυφές. Από την Αρχή του Περιστερώνα, τουλάχιστον δύο κορυφές, έστω $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$, έχουν τον ίδιο συνδυασμό. Τότε, τα αθροίσματα $x_1 + x_2$ και $y_1 + y_2$ είναι άρτιοι αριθμοί. Το μέσον M του τμήματος AB έχει συντεταγμένες $(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$, οι οποίες θα είναι ακέραιοι αριθμοί. □

Εφαρμογή 6. *Σε κάθε εξάδα ατόμων μπορούμε να βρούμε είτε τριάδα γνωστών είτε τριάδα αγνώστων.*

Απόδειξη. Θεωρούμε ένα άτομο A. Από τα υπόλοιπα 5 άτομα, τουλάχιστον 3 έχουν την ίδια σχέση με το A (Αρχή Περιστερώνα: 5 αντικείμενα, 2 κουτιά). Έστω ότι το A έχει 3 γνωστούς (B, Γ, Δ).



Αν μία από τις διακεκομμένες ήταν μπλε, σχηματίζεται **μπλε τρίγωνο**. Αν όλες παραμένουν κόκκινες, σχηματίζεται **κόκκινο τρίγωνο** ($B\Gamma\Delta$).

□

Εφαρμογή 7. *Αν πάρουμε 19 αριθμούς από την αριθμητική πρόοδο* $1, 4, \ldots, 100$*, υπάρχουν δύο με άθροισμα 104.*

Απόδειξη. Η πρόοδος είναι $a_n = 3n - 2$. Το 100 είναι ο 34ος όρος ($3 \cdot 34 - 2 = 100$). Το σύνολο S έχει 34 στοιχεία. Ζητάμε ζεύγη με άθροισμα 104. Θεωρούμε τα ζεύγη:

$$\{4, 100\},\ \{7, 97\}, \ldots, \{49, 55\}.$$

Γενικά τα ζεύγη είναι της μορφής $\{k, 104 - k\}$. Επίσης, παρατηρούμε ότι από τους 34 αριθμούς της προόδου:
- Ο αριθμός 1 δεν έχει ταίρι στο σύνολο (θα ήθελε το 103).
- Ο αριθμός 52 δεν έχει ταίρι (θα ήθελε το 52, αλλά παίρνουμε διακριτούς αριθμούς).

Τα υπόλοιπα 32 νούμερα σχηματίζουν 16 ζεύγη με άθροισμα 104.
Δημιουργούμε τις "φωλιές" ως εξής: 16 φωλιές για τα ζεύγη, 1 φωλιά για το $\{1\}$ και 1 φωλιά για το $\{52\}$. Σύνολο 18 φωλιές. Επιλέγουμε 19 αριθμούς (περιστέρια). Από την Αρχή του Περιστερώνα, θα επιλεγούν αναγκαστικά και οι δύο αριθμοί από τουλάχιστον μία φωλιά ζεύγους (αφού οι φωλιές των μονών αριθμών χωράνε μόνο 1). Άρα θα έχουμε άθροισμα 104. □

2 Βασικές Αρχές Απαρίθμησης

Προσθετική Αρχή

Αν $A_1, \ldots, A_n$ πεπερασμένα ξένα ανά δύο, τότε:

$$\#\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} \#A_i$$

Πολλαπλασιαστική Αρχή

Έστω ότι μια διαδικασία μπορεί να χωριστεί σε k διαδοχικά στάδια. Αν το 1ο στάδιο μπορεί να ολοκληρωθεί με n_1 τρόπους, το 2ο στάδιο με n_2 τρόπους, ..., και το k-οστό στάδιο με n_k τρόπους, τότε το πλήθος των συνολικών τρόπων με τους οποίους μπορεί να πραγματοποιηθεί η διαδικασία είναι:

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot \cdots \cdot n_k.$$

Εφαρμογή 8. *Ένα εστιατόριο προσφέρει 3 είδη ορεκτικών, 5 κυρίως πιάτα και 2 επιδόρπια. Με πόσους τρόπους μπορεί ένας πελάτης να σχηματίσει ένα πλήρες γεύμα;*

Απόδειξη. Σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή, έχουμε 3 στάδια επιλογής:

- 1ο στάδιο (Ορεκτικό): $n_1 = 3$ επιλογές
- 2ο στάδιο (Κυρίως): $n_2 = 5$ επιλογές
- 3ο στάδιο (Επιδόρπιο): $n_3 = 2$ επιλογές

Το συνολικό πλήθος των διαφορετικών γευμάτων είναι:

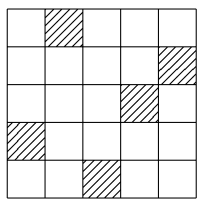
$$3 \cdot 5 \cdot 2 = 30 \text{ τρόποι.}$$

□

Πρόταση 2.1. *Αν $A_1, A_2, \ldots, A_k$ είναι πεπερασμένα σύνολα, τότε ο πληθικός αριθμός του καρτεσιανού γινομένου τους είναι το γινόμενο των πληθικών τους αριθμών:*

$$\#(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k) = \#A_1 \cdot \#A_2 \cdot \cdots \cdot \#A_k$$

Με πόσους τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν n όμοια πιόνια σε μια $n \times n$ σκακιέρα μη αλληλεπιδρώμενα (να μην απειλεί το ένα το άλλο, δηλαδή σε διαφορετικές γραμμές και στήλες); Απάντηση: $n!$. (Η n πύργοι).
Ερώτηση: Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε ένα μαύρο και ένα άσπρο πιόνι αν δεν θέλουμε να είναι σε ίδια γραμμή ή στήλη (σε σκακιέρα 8×8);
Απάντηση: Το πλήθος των αναδιατάξεων είναι $n!$. Ίδιο με τις μη αλληλεπιδρώμενες.
Συγκεκριμένα για την επιλογή 2 πιονιών: Το πρώτο μπαίνει σε 64 θέσεις. Το δεύτερο έχει αποκλειστεί από 1 γραμμή και 1 στήλη (15 θέσεις), άρα $64 - 15 = 49$. 64×49. (Σημείωση: Το κείμενο αναφέρεται γενικά σε αναδιατάξεις $n!$, πιθανώς αναφερόμενο στην τοποθέτηση n πύργων).



Σχήμα: Αντιστοιχία πλέγματος με μετάθεση $(2, 5, 1, 3, 4)$.

Άσκηση 1. *Θέτουμε*

$$X = \{1, 2, \ldots, 200\}$$

και ορίζουμε το σύνολο

$$S = \{(a, b, c) \in X^3 \ : \ a < b \text{ και } a < c\}.$$

Πόσα στοιχεία έχει το S;

Απόδειξη. Η συνθήκη $a < b$ και $a < c$ σημαίνει ότι το a είναι αυστηρά μικρότερο από *και* το b *και* το c. Παρατηρούμε πρώτα ότι δεν μπορεί να είναι $a = 200$, διότι τότε δεν υπάρχει κανένα $b \in X$ με $b > 200$, ούτε κανένα $c \in X$ με $c > 200$. Άρα αναγκαστικά

$$a \in \{1, 2, \ldots, 199\}.$$

Θα διασπάσουμε το S σε ξένα μεταξύ τους υποσύνολα, ανάλογα με την τιμή του a. Για κάθε $k \in \{1, 2, \ldots, 199\}$ ορίζουμε

$$A_k = \{(a, b, c) \in S : \ a = k\}.$$

Τότε τα A_k είναι ξένα ανά δύο και

$$S = \bigsqcup_{k=1}^{199} A_k \quad \Longrightarrow \quad |S| = \sum_{k=1}^{199} |A_k|$$

(αρχή πρόσθεσης).

Σταθεροποιούμε τώρα το $a = k$. Τότε η ανισότητα $a < b$ ισοδυναμεί με $b \in \{k+1, k+2, \ldots, 200\}$, άρα υπάρχουν $200 - k$ επιλογές για το b. Ομοίως, από $a < c$ έχουμε $c \in \{k+1, k+2, \ldots, 200\}$, άρα υπάρχουν $200 - k$ επιλογές και για το c. Οι επιλογές του b και του c είναι ανεξάρτητες (δεν υπάρχει περιορισμός μεταξύ τους· επιτρέπεται ακόμη και $b = c$), οπότε

$$|A_k| = (200 - k)(200 - k) = (200 - k)^2.$$

Άρα

$$|S| = \sum_{k=1}^{199} (200 - k)^2.$$

Θέτοντας $m = 200 - k$, όταν $k = 1$ παίρνουμε $m = 199$ και όταν $k = 199$ παίρνουμε $m = 1$, άρα

$$|S| = \sum_{m=1}^{199} m^2.$$

Χρησιμοποιούμε τον γνωστό τύπο

$$\sum_{m=1}^{n} m^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

με $n = 199$, και βρίσκουμε

$$|S| = \frac{199 \cdot 200 \cdot 399}{6} = \frac{15{,}880{,}200}{6} = 2{,}646{,}700.$$

Άρα το σύνολο S έχει $\boxed{2{,}646{,}700}$ στοιχεία. □

Άσκηση 2. *Πόσοι θετικοί ακέραιοι τετραψήφιοι αριθμοί έχουν τουλάχιστον ένα ψηφίο που είναι 2 ή 3;*

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε την *αρχή του συμπληρώματος*.

Βήμα 1: Μετράμε όλους τους τετραψήφιους θετικούς ακεραίους. Ένας τετραψήφιος αριθμός έχει μορφή $\overline{abcd}$, όπου $a \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ και $b, c, d \in \{0, 1, \ldots, 9\}$. Άρα ο συνολικός αριθμός τετραψήφιων θετικών ακεραίων είναι

$$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000.$$

Βήμα 2: Μετράμε πόσοι *δεν* έχουν κανένα ψηφίο ίσο με 2 ή 3. Δηλαδή, θέλουμε τετραψήφιους $\overline{abcd}$ τέτοιους ώστε

$$a \notin \{2, 3\}, \qquad b \notin \{2, 3\}, \qquad c \notin \{2, 3\}, \qquad d \notin \{2, 3\}.$$

Για το πρώτο ψηφίο a επιτρέπονται οι τιμές $1, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, δηλαδή 7 επιλογές. Για καθένα από τα b, c, d επιτρέπονται όλα τα ψηφία $0, 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, δηλαδή 8 επιλογές (αφαιρούμε τα 2 και 3 από τα 10 ψηφία).

Επομένως, ο αριθμός των τετραψήφιων που *δεν* περιέχουν κανένα 2 ή 3 είναι

$$7 \cdot 8^3 = 7 \cdot 512 = 3584.$$

Βήμα 3: Αφαιρούμε από το σύνολο. Άρα οι τετραψήφιοι που έχουν *τουλάχιστον ένα* ψηφίο ίσο με 2 ή 3 είναι

$$9000 - 3584 = 5416.$$

Συνεπώς, η απάντηση είναι $\boxed{5416}$. □

Άσκηση 3. *Έστω $n \geq 2$ θετικός ακέραιος με*

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k},$$

όπου $p_1, \ldots, p_k$ είναι διαφορετικοί *πρώτοι αριθμοί και $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ θετικοί ακέραιοι. Πόσους θετικούς διαιρέτες έχει ο n;*

Απόδειξη. Θυμίζουμε ότι ένας θετικός ακέραιος d λέγεται *διαιρέτης* του n αν και μόνο αν $d \mid n$, δηλαδή αν υπάρχει ακέραιος q ώστε $n = dq$.

Ιδέα: Κάθε διαιρέτης d του n προκύπτει επιλέγοντας πόσες φορές θα εμφανίζεται κάθε πρώτος p_i στον d, με εκθέτη από 0 μέχρι α_i.

Ακριβέστερα: Έστω d θετικός διαιρέτης του n. Στην πρώιμη παραγοντοποίηση του d μπορούν να εμφανίζονται μόνο οι πρώτοι $p_1, \ldots, p_k$ (αφού αν κάποιος άλλος πρώτος r διαιρούσε το d, τότε θα διαιρούσε και το n, άτοπο). Άρα ο d γράφεται μοναδικά στη μορφή

$$d = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}$$

με $\beta_i \geq 0$ ακέραιους.

Επειδή $d \mid n$, για κάθε i πρέπει να ισχύει $\beta_i \leq \alpha_i$: αν είχαμε $\beta_i > \alpha_i$, τότε ο $p_i^{\beta_i}$ θα διαιρούσε τον d και άρα και τον n, όμως αυτό είναι αδύνατο αφού στον n ο p_i εμφανίζεται μόνο με δύναμη α_i. Συνεπώς

$$0 \leq \beta_i \leq \alpha_i \quad \text{για κάθε } i = 1, 2, \ldots, k.$$

Μετράμε τις επιλογές:

- Για τον β_1 έχουμε $\alpha_1 + 1$ επιλογές: $0, 1, 2, \ldots, \alpha_1$.
- Για τον β_2 έχουμε $\alpha_2 + 1$ επιλογές: $0, 1, 2, \ldots, \alpha_2$.
- ...
- Για τον β_k έχουμε $\alpha_k + 1$ επιλογές.

Οι επιλογές αυτές είναι ανεξάρτητες, άρα από τον κανόνα του γινομένου ο συνολικός αριθμός δυνατών k-άδων $(\beta_1, \ldots, \beta_k)$ (και άρα διαιρετών d) είναι

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1).$$

Άρα ο n έχει ακριβώς

$$\boxed{(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)}$$

θετικούς διαιρέτες.

Παράδειγμα: Για $n = 20$ έχουμε $20 = 2^2 \cdot 5^1$. Άρα το πλήθος των διαιρετών είναι $(2+1)(1+1) = 6$. Πράγματι οι θετικοί διαιρέτες είναι

$$1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 10,\ 20.$$

□

Τέσσερις εκδοχές για παγωτά

Υποθέτουμε ότι υπάρχουν n διαθέσιμες γεύσεις και θέλουμε να φτιάξουμε επιλογές με k μπάλες.

- **Χωνάκι**: οι μπάλες έχουν *σειρά* (άρα οι διατάξεις διακρίνονται).
- **κυπελλάκι**: η σειρά *δεν* έχει σημασία (άρα μετράμε σύνολα/πολυσύνολα γεύσεων).

1) (Opening Day) Χωνάκι, επιτρέπονται επαναλήψεις

Άσκηση 4. *Πόσα διαφορετικά χωνάκια με k μπάλες μπορούν να φτιαχτούν από n γεύσεις, αν επιτρέπονται επαναλήψεις (δηλ. μπορεί να επιλεγεί η ίδια γεύση πολλές φορές) και η σειρά των μπαλών στο χωνάκι μετράει;*

Απόδειξη. Για κάθε μία από τις k θέσεις επιλέγουμε μία από τις n γεύσεις, ανεξάρτητα. Άρα, με τον κανόνα του γινομένου,

$$\underbrace{n \cdot n \cdots n}_{k \text{ φορές}} = n^k.$$

□

2) (Second Day) Χωνάκι, δεν επιτρέπονται επαναλήψεις

Άσκηση 5. *Πόσα διαφορετικά χωνάκια με k μπάλες μπορούν να φτιαχτούν από n γεύσεις, αν δεν επιτρέπονται επαναλήψεις (κάθε γεύση το πολύ μία φορά) και η σειρά των μπαλών στο χωνάκι μετράει; (Υποθέτουμε $k \leq n$.)*

Απόδειξη. Για την 1η θέση έχουμε n επιλογές, για τη 2η $n-1$, ..., για την k-οστή $n-k+1$. Άρα

$$n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

□

Ημέρα 3: *αδιάκριτες* μπάλες (δεν έχει σημασία η σειρά), *δεν* επιτρέπονται επαναλήψεις γεύσης

Ύστερα από δύο μέρες συνεχούς εξυπηρέτησης με χωνάκια, οι υπάλληλοι χρειάζονται ένα διάλειμμα. Την 3η μέρα κρατάμε τον περιορισμό «καμία γεύση πάνω από μία φορά», αλλά αντικαθιστούμε τα χωνάκια με *κυπελλάκια*. Τα κυπελλάκια είναι αρκετά μεγάλα ώστε η σειρά των μπαλών να μην έχει σημασία: ένα κυπελλάκι με chocolate και vanilla μετράει *μία* φορά, ανεξάρτητα από το ποια γεύση "είναι από πάνω". Με αυτούς τους κανόνες, πόσα διαφορετικά κυπελλάκια των k μπαλών υπάρχουν;

Απόδειξη. Θα συμβολίσουμε την απάντηση με $\binom{n}{k}$ (διαβάζεται «n choose k»): δηλαδή $\binom{n}{k}$ είναι ο αριθμός των διαφορετικών κυπελλακίων που παίρνουμε διαλέγοντας k μπάλες από n γεύσεις, χωρίς να επαναλαμβάνεται γεύση.

Θυμόμαστε την Ημέρα 2: εκεί δεν επιτρέπαμε επαναλήψεις *αλλά* η σειρά μετρούσε, οπότε είχαμε συνολικά

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

διαφορετικά χωνάκια.

Τώρα, πάρε ένα συγκεκριμένο κυπελλάκι με k μπάλες, όλες διαφορετικών γεύσεων. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να βάλουμε αυτές τις k μπάλες σε χωνάκι (όπου η σειρά μετράει); Αυτό είναι απλώς μια μετάθεση των k διακριτών γεύσεων, άρα υπάρχουν $k!$ τρόποι.

Άρα: (α) πρώτα διαλέγουμε το κυπελλάκι (δηλ. το σύνολο των k γεύσεων) με $\binom{n}{k}$ τρόπους και (β) μετά διατάσσουμε τις k γεύσεις στο χωνάκι με $k!$ τρόπους. Επομένως

$$\binom{n}{k} \cdot k! \; = \; \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Άρα

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Το $\binom{n}{k}$ ονομάζεται *διωνυμικός συντελεστής*. □

Ημέρα 4: *αδιάκριτες* μπάλες (δεν έχει σημασία η σειρά), επιτρέπονται επαναλήψεις γεύσης

Την τελευταία μέρα, το κατάστημα αφαιρεί τον περιορισμό και επιτρέπει να πάρουμε όσες μπάλες θέλουμε από μια γεύση. Υπάρχουν ακόμα n γεύσεις. Πόσα k-μπαλα κυπελλάκια υπάρχουν;

Είναι δελεαστικό να σκεφτούμε «από την Ημέρα 1 είχαμε n^k χωνάκια και τώρα δεν μας νοιάζει η σειρά, άρα να διαιρέσουμε με $k!$». Όμως αυτό είναι λάθος: το $k!$ μετράει διατάξεις *διαφορετικών* αντικειμένων. Αν υπάρχουν επαναλήψεις, δεν αντιστοιχούν $k!$ διαφορετικά χωνάκια στην ίδια επιλογή γεύσεων (π.χ. όταν όλες οι μπάλες είναι ίδια γεύση, υπάρχει μόνο *ένα* χωνάκι, άρα η διαίρεση με $k!$ δεν βγάζει νόημα).

Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο *αστέρια και μπάρες* (stars and bars). Χρησιμοποιούμε k αστέρια, κάθε ένα αντιστοιχεί σε μία μπάλα παγωτού, και $n-1$ μπάρες ως διαχωριστικά ανάμεσα στις γεύσεις. Όσα αστέρια εμφανίζονται πριν από την 1η μπάρα είναι μπάλες της 1ης γεύσης, όσα είναι ανάμεσα στην 1η και 2η μπάρα είναι της 2ης, κ.ο.κ. Έτσι επιτρέπεται και «πολλές μπάλες της ίδιας γεύσης» (πολλά αστέρια ανάμεσα σε δύο μπάρες) και «καμία μπάλα μιας γεύσης» (δύο μπάρες κολλητά).

Παράδειγμα: για 3 γεύσεις coffee, mint chip, chocolate και $k = 5$, το κυπελλάκι με 2 coffee, 2 mint chip, 1 chocolate γράφεται ως

$$\underbrace{**}_{coffee} \;\Big|\; \underbrace{**}_{mintchip} \;\Big|\; \underbrace{*}_{chocolate}.$$

Δύο μπάρες αρκούν για 3 γεύσεις.

Για παράδειγμα, τα διαγράμματα

$$* * * * \mid * * \mid * * * \qquad \text{και} \qquad * \mid\mid * *$$

αντιστοιχούν αντίστοιχα σε

$$\underbrace{* * **}_{coffee} \;\Big|\; \underbrace{**}_{mintchip} \;\Big|\; \underbrace{* * *}_{chocolate} \qquad \text{και} \qquad \underbrace{*}_{coffee} \;\Big|\; \underbrace{\quad}_{mintchip} \;\Big|\; \underbrace{**}_{chocolate},$$

δηλαδή στο πρώτο έχουμε 4 μπάλες coffee, 2 mint chip, 3 chocolate, ενώ στο δεύτερο 1 coffee, 0 mint chip, 2 chocolate.

Γενικά, για να χωρίσουμε σε n περιοχές (γεύσεις) χρειαζόμαστε $n-1$ μπάρες και για k μπάλες χρειαζόμαστε k αστέρια. Άρα έχουμε συνολικά $n+k-1$ θέσεις που θα γεμίσουν με k αστέρια και $n-1$ μπάρες. Επιλέγουμε ποιες k από αυτές τις $n+k-1$ θέσεις θα καταληφθούν από αστέρια (τα αστέρια είναι όμοια, άρα η σειρά δεν μετράει), οπότε έχουμε

$$\binom{n+k-1}{k}$$

διαφορετικές διατάξεις *αστεριών και μπαρών*. Κάθε τέτοια διάταξη αντιστοιχεί μοναδικά σε ένα κυπελλάκι, και αντίστροφα. Άρα ο αριθμός των k-μπαλων κυπελλακίων, όταν επιτρέπονται επαναλήψεις γεύσης, είναι

$$\boxed{\binom{n+k-1}{k}}.$$

Άσκηση 6. *Έχουμε 3 γεύσεις παγωτού: βανίλια, σοκολάτα και φράουλα. Θέλουμε να φτιάξουμε ένα χωνάκι με συνολικά k μπάλες, έτσι ώστε*

v μπάλες να είναι βανίλια, $\quad$ c μπάλες να είναι σοκολάτα, $\quad$ s μπάλες να είναι φράουλα,

όπου $v, c, s \geq 0$ και $v + c + s = k$. Πόσα διαφορετικά χωνάκια υπάρχουν (δηλαδή πόσες διαφορετικές σειρές γεύσεων μήκους k με αυτές τις πληθικότητες);

Απόδειξη. Οι k μπάλες στο χωνάκι έχουν θέσεις (κάτω–πάνω), άρα η σειρά μετράει. Θα επιλέξουμε σε ποιες θέσεις μπαίνει κάθε γεύση.

Πρώτα διαλέγουμε ποιες v από τις k θέσεις θα είναι βανίλια: αυτό γίνεται με

$$\binom{k}{v}$$

τρόπους.

Απομένουν $k - v$ θέσεις. Από αυτές διαλέγουμε ποιες c θα είναι σοκολάτα: αυτό γίνεται με

$$\binom{k-v}{c}$$

τρόπους.

Οι υπόλοιπες θέσεις είναι αναγκαστικά φράουλα, και είναι

$$k - v - c = s$$

θέσεις.

Άρα, με τον κανόνα του γινομένου,

$$\binom{k}{v}\binom{k-v}{c} = \frac{k!}{v!(k-v)!} \cdot \frac{(k-v)!}{c!\,s!} = \frac{k!}{v!\,c!\,s!}.$$

Επομένως ο αριθμός των χωνάκων είναι

$$\boxed{\frac{k!}{v!\,c!\,s!}}.$$

□

Άσκηση 7. *Ένας φοιτητής Ιατρικής πρέπει να εργαστεί σε ένα νοσοκομείο για 5 ημέρες μέσα στον Ιανουάριο (ο Ιανουάριος έχει 31 ημέρες). Δεν επιτρέπεται να εργαστεί δύο διαδοχικές ημέρες. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να επιλέξει τις 5 ημέρες εργασίας του;*

Ας γράψουμε τις ημέρες που επιλέγει (σε αύξουσα σειρά) ως

$$1 \leq a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 \leq 31.$$

Ο περιορισμός «όχι δύο διαδοχικές ημέρες» ισοδυναμεί με

$$a_{i+1} \geq a_i + 2 \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Θέτουμε τώρα

$$b_i := a_i - (i-1) \qquad (i = 1,2,3,4,5).$$

Τότε για κάθε $i = 1,2,3,4$ έχουμε

$$b_{i+1} - b_i = \big(a_{i+1} - i\big) - \big(a_i - (i-1)\big) = (a_{i+1} - a_i) - 1 \geq 1,$$

άρα

$$b_1 < b_2 < b_3 < b_4 < b_5.$$

Επίσης, από $a_1 \geq 1$ παίρνουμε $b_1 \geq 1$, ενώ από $a_5 \leq 31$ παίρνουμε

$$b_5 = a_5 - 4 \leq 31 - 4 = 27.$$

Άρα η 5-άδα $(b_1, \ldots, b_5)$ είναι απλώς επιλογή 5 διαφορετικών αριθμών από το σύνολο $\{1,2,\ldots,27\}$.

Αντίστροφα, αν πάρουμε οποιαδήποτε $1 \leq b_1 < b_2 < b_3 < b_4 < b_5 \leq 27$ και ορίσουμε

$$a_i := b_i + (i-1),$$

τότε $1 \leq a_1 < \cdots < a_5 \leq 31$ και

$$a_{i+1} - a_i = (b_{i+1} - b_i) + 1 \geq 2,$$

άρα οι a_i δεν είναι διαδοχικοί. Επομένως έχουμε μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των επιτρεπτών επιλογών ημερών και των 5-υποσυνόλων του $\{1,\ldots,27\}$.

Συνεπώς ο αριθμός των τρόπων είναι

$$\binom{27}{5}.$$

Αριθμητικά,

$$\binom{27}{5} = \frac{27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23}{5!} = \frac{9\,687\,600}{120} = 80\,730.$$

Άρα οι τρόποι είναι $\boxed{\binom{27}{5} = 80\,730}$.

Άσκηση 8. *Σε N καρέκλες τοποθετημένες σε μια σειρά, θέλουμε να καθίσουν k διακριτοί μαθητές, με την προϋπόθεση ότι κάθε καρέκλα χωράει το πολύ έναν μαθητή. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να καθίσουν;*

Απόδειξη. Η διαδικασία γίνεται σε δύο ανεξάρτητα βήματα.

Βήμα 1: Επιλογή των k καρεκλών που θα καταληφθούν. Επιλέγουμε k καρέκλες από τις N:

$$\binom{N}{k} \text{ τρόποι.}$$

Βήμα 2: Ανάθεση των μαθητών στις επιλεγμένες καρέκλες. Αφού έχουν επιλεγεί οι k καρέκλες, οι k διακριτοί μαθητές μπορούν να τοποθετηθούν σε αυτές με $k!$ τρόπους (όλες οι μεταθέσεις).

Άρα συνολικά οι τρόποι είναι

$$\boxed{\binom{N}{k} k!}.$$

Ισοδύναμα, αυτό είναι ο αριθμός των διατάξεων k στοιχείων από N, δηλαδή

$$\binom{N}{k} k! = \frac{N!}{(N-k)!}.$$

$\square$

Άσκηση 9. *Σε N καρέκλες τοποθετημένες σε μια σειρά κάθονται k διακεκριμένοι μαθητές (κάθε καρέκλα χωράει το πολύ έναν μαθητή). Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν, ώστε κανένας μαθητής να μην κάθεται ακριβώς δίπλα σε άλλον;*

Απόδειξη. **Βήμα 1: Επιλογή των θέσεων.** Αρχικά αγνοούμε *ποιος* κάθεται πού και μετράμε μόνο *ποιες* k καρέκλες θα καταληφθούν, με την προϋπόθεση να μην είναι γειτονικές. Αν οι επιλεγμένες θέσεις είναι

$$1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_k \leq N,$$

η συνθήκη «όχι γειτονικές» ισοδυναμεί με $a_{i+1} \geq a_i + 2$ για $i = 1, \ldots, k-1$. Θέτουμε $b_i := a_i - (i-1)$. Τότε $1 \leq b_1 < b_2 < \cdots < b_k \leq N - k + 1$. Άρα οι τρόποι επιλογής των θέσεων είναι

$$\binom{N-k+1}{k}.$$

Βήμα 2: Ανάθεση μαθητών στις θέσεις. Αφού επιλεγούν οι k θέσεις, οι k διακριτοί μαθητές μπορούν να τοποθετηθούν σε αυτές με $k!$ τρόπους.

Άρα συνολικά οι τρόποι είναι

$$\boxed{\binom{N-k+1}{k} k!}.$$

□

Δεύτερος Τρόπος. Θεωρούμε πρώτα μόνο *ποιες* καρέκλες καταλαμβάνονται.

Για να μη κάθονται δύο μαθητές δίπλα-δίπλα, ανάμεσα σε κάθε δύο *διαδοχικούς* (από αριστερά προς τα δεξιά) μαθητές πρέπει να υπάρχει τουλάχιστον μία άδεια καρέκλα. Άρα δεσμεύουμε προκαταβολικά $k-1$ άδειες καρέκλες, μία ανάμεσα σε κάθε ζεύγος μαθητών, σχηματίζοντας το πρότυπο

$$M \square M \square \cdots \square M,$$

που περιέχει k μαθητές και $k-1$ δεσμευμένες άδειες καρέκλες, άρα καταλαμβάνει συνολικά $2k-1$ καρέκλες.

Αν $N < 2k-1$, δεν υπάρχει καμία διάταξη. Υποθέτουμε λοιπόν $N \geq 2k-1$. Τότε οι συνολικές άδειες καρέκλες είναι $N-k$, από τις οποίες έχουμε ήδη δεσμεύσει $k-1$. Επομένως απομένουν

$$r = (N-k) - (k-1) = N - 2k + 1$$

ελεύθερες άδειες καρέκλες που μπορούμε να τοποθετήσουμε οπουδήποτε κάποιον μαθητή.

Οι r αυτές άδειες καρέκλες μοιράζονται σε $k+1$ "θήκες": πριν από τον πρώτο μαθητή, ανάμεσα σε κάθε ζεύγος μαθητών (επιπλέον πάνω από την ήδη δεσμευμένη άδεια), και μετά τον τελευταίο μαθητή. Αυτό γίνεται με συνδυασμούς με επανάληψη, όπως ακριβώς την τέταρτη ημέρα με τα παγωτά. Το πλήθος είναι

$$\binom{r+k+1-1}{k} = \binom{N-2k+1+k}{k} = \binom{N-k+1}{k}.$$

Άρα αυτός είναι ο αριθμός τρόπων επιλογής των k θέσεων.

Τέλος, αν οι k μαθητές είναι *διακριτοί*, τότε για κάθε επιλογή θέσεων μπορούν να καθίσουν με $k!$ τρόπους. Συνεπώς ο συνολικός αριθμός καθισμάτων είναι

$$\boxed{\binom{N-k+1}{k} k!}.$$

□

Άσκηση 10. *Σε κυκλικό τραπέζι με $n = 10$ θέσεις κάθονται $k = 3$ διακριτοί μαθητές, ώστε κανένας να μην κάθεται δίπλα σε άλλον (και η θέση 10 είναι γειτονική με τη θέση 1). Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν;*

Απόδειξη. Μετράμε πρώτα τις *επιλογές θέσεων* και στο τέλος πολλαπλασιάζουμε επί $k!$.

Χωρίζουμε σε δύο περιπτώσεις ανάλογα με το αν η θέση 1 είναι κενή ή κατειλημμένη.

Περίπτωση Α: Η θέση 1 είναι *κενή*. Τότε οι θέσεις $2, 3, \dots, 10$ σχηματίζουν γραμμή 9 θέσεων και θέλουμε 3 μη-γειτονικές:

$$\binom{9-3+1}{3} = \binom{7}{3} = 35.$$

Περίπτωση Β: Η θέση 1 είναι *κατειλημμένη*. Τότε οι θέσεις 2 και 10 αποκλείονται. Μένουν οι $3, 4, \dots, 9$ (γραμμή 7 θέσεων) και πρέπει να διαλέξουμε ακόμη 2 μη-γειτονικές:

$$\binom{7-2+1}{2} = \binom{6}{2} = 15.$$

Άρα οι επιλογές θέσεων είναι $35 + 15 = 50$. Τέλος, για κάθε επιλογή θέσεων οι 3 διακριτοί μαθητές κάθονται με $3! = 6$ τρόπους. Συνεπώς οι συνολικοί τρόποι είναι

$$\boxed{50 \cdot 3! = 300}.$$

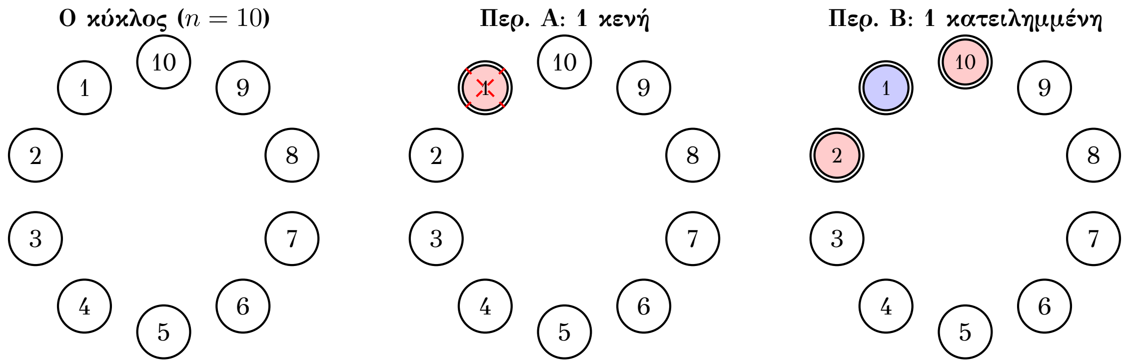
Γενικά: για n θέσεις σε κύκλο και k μαθητές (με $n \geq 2k$),

$$\#\{\text{επιλογές θέσεων}\} = \binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1} = \frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k},$$

άρα

$$\#\{\text{τοποθέτησης μαθητών}\} = \boxed{k!\left(\binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1}\right)} = \boxed{k!\,\frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}}.$$

□



Σχήμα 1: Διάσπαση σε δύο περιπτώσεις ανάλογα με τη θέση 1.

Κυκλικές αναδιατάξεις

Με πόσους τρόπους μπορούν να κάτσουν σε ένα τραπέζι n ιππότες;

Απάντηση: $(n-1)!$. (Αυτό συμβαίνει διότι σε κυκλική διάταξη η σχετική θέση μετράει και όχι η απόλυτη, οπότε "καρφώνουμε" τον έναν και μεταθέτουμε τους υπόλοιπους $n-1$).

Άσκηση 11. *Μοιράζουμε 15 (ίδιες) μπάλες του τένις σε 6 παιδιά.*

(α) Να βρεθεί ο αριθμός n_1 όλων των δυνατών μοιρασιών.

(β) Να βρεθεί ο αριθμός n_2 των μοιρασιών στις οποίες κάθε παιδί παίρνει τουλάχιστον μία μπάλα.

Απόδειξη. Αν θεωρήσουμε όλες τις μπάλες ως αδιαχώριστες, τότε δύο μοιρασιές είναι διαφορετικές αν κάποιο παιδί πάρει διαφορετικό πλήθος μπαλών. Για άλλη μία φορά κωδικοποιούμε κάθε μοίρασμα με μια ακολουθία από μηδενικά και μονάδες: γράφουμε τόσες 1 όσες μπάλες παίρνει το πρώτο παιδί έπειτα, χωρισμένες με ένα και μόνο 0, γράφουμε τόσες 1 όσες μπάλες παίρνει το δεύτερο παιδί, κ.ο.κ. Με αυτόν τον τρόπο παίρνουμε μία 20-άδα που αποτελείται από 15 άσους και 5 μηδενικά άρα υπάρχουν ακριβώς

$$n_1 = \binom{20}{5}$$

τέτοιες ακολουθίες.

Για να βρούμε τον αριθμό n_2 των πιο «δίκαιων» μοιρασιών, όπου κανένα παιδί δεν μένει χωρίς μπάλα, χρησιμοποιούμε το ακόλουθο τρικ: πρώτα δίνουμε σε όλα τα παιδιά από μία μπάλα και μετά μοιράζουμε τις υπόλοιπες 9 μπάλες χωρίς κανέναν περιορισμό. Χρησιμοποιώντας το εύκολο μέρος του (α), συμπεραίνουμε ότι αυτό μπορεί να γίνει με

$$n_2 = P_0(9,5) = \binom{14}{5}$$

τρόπους. □

Παράδειγμα 2.2. Να βρεθεί το πλήθος των ακέραιων λύσεων της εξίσωσης

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$$

με περιορισμούς

$$x_i \geq 0 \quad (i = 1, \ldots, k).$$

Απόδειξη. Θεωρούμε n αστέρια σε σειρά και θέλουμε να τα χωρίσουμε σε k ομάδες (όπου επιτρέπεται μια ομάδα να είναι κενή). Για να δημιουργήσουμε k ομάδες, τοποθετούμε $k-1$ μπάρες ανάμεσα από τα αστέρια. Έτσι παίρνουμε μια 1-1 αντιστοιχία ανάμεσα σε λύσεις $(x_1, \ldots, x_k)$ και σε διατάξεις με n αστέρια και $k-1$ μπάρες.

Συνολικά υπάρχουν $n+k-1$ θέσεις αντικειμένων, από τις οποίες επιλέγουμε τις $k-1$ θέσεις των μπαρών. Άρα ο αριθμός λύσεων είναι

$$\binom{n+k-1}{k-1}.$$

□

Παράδειγμα 2.3. Να βρεθεί το πλήθος των ακέραιων λύσεων της εξίσωσης

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$$

με περιορισμούς

$$x_i \geq 1 \quad (i = 1, \ldots, k).$$

Απόδειξη. Θέτουμε $y_i = x_i - 1 \geq 0$. Τότε

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_k = n - k, \qquad y_i \geq 0.$$

Με τη μέθοδο *αστέρια και μπάρες* ο αριθμός λύσεων είναι

$$\binom{(n-k)+k-1}{k-1} = \binom{n-1}{k-1}.$$

Άρα το πλήθος λύσεων είναι $\boxed{\binom{n-1}{k-1}}$. □

Παράδειγμα 2.4. Ο Α, ο Β, ο Γ και ο Δ θέλουν να ιδρύσουν μια εταιρεία και έχουν να μοιράσουν 16 ίδιες μετοχές ανάμεσα στα 4 άτομα. Ισχύουν οι περιορισμοί:

- Κάθε άτομο πρέπει να πάρει *θετικό* ακέραιο αριθμό μετοχών και όλες οι 16 μετοχές να μοιραστούν.
- Κανένα άτομο δεν μπορεί να έχει περισσότερες μετοχές από τους άλλους τρεις *μαζί*.

Με δεδομένο ότι οι μετοχές είναι αδιαχώριστες αλλά τα άτομα διακριτά, με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει το μοίρασμα;

Απόδειξη. Χωρίς τον δεύτερο περιορισμό, μετράμε τις τετράδες θετικών ακεραίων

$$(x_1, x_2, x_3, x_4), \qquad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 16, \qquad x_i \geq 1.$$

Με *αστέρια και μπάρες*: γράφουμε 16 αστέρια και τοποθετούμε 3 μπάρες ώστε να χωρίσουμε τα αστέρια σε 4 μη κενά κομμάτια. Οι μπάρες δεν επιτρέπεται να μπουν στα άκρα ούτε δίπλα-δίπλα. Άρα επιλέγουμε 3 θέσεις από τις 15 διαθέσιμες (ανάμεσα σε διαδοχικά αστέρια), οπότε

$$\#\{\text{όλα τα μοιράσματα με } x_i \geq 1\} = \binom{15}{3} = 455.$$

Τώρα αφαιρούμε τα "κακά" μοιράσματα όπου κάποιο άτομο έχει περισσότερες μετοχές από τους άλλους τρεις μαζί. Αν, π.χ., ο Α έχει x_1 μετοχές, ο περιορισμός παραβιάζεται όταν

$$x_1 > x_2 + x_3 + x_4 = 16 - x_1 \iff x_1 > 8 \iff x_1 \geq 9.$$

Άρα μετράμε πόσα μοιράσματα έχουν $x_1 \geq 9$. Θέτουμε $x_1' = x_1 - 8$, τότε $x_1' \geq 1$ και

$$x_1' + x_2 + x_3 + x_4 = 8, \qquad x_1', x_2, x_3, x_4 \geq 1.$$

Άρα ο αριθμός τους είναι

$$\binom{7}{3} = 35.$$

Το ίδιο πλήθος ισχύει αν το άτομο με τις πολλές μετοχές είναι ο Β ή ο Γ ή ο Δ, δηλαδή $4\binom{7}{3}$ συνολικά.

Τέλος, δεν μπορεί να υπάρχουν *δύο* άτομα με ≥ 9 μετοχές ταυτόχρονα (θα χρειαζόταν τουλάχιστον 18 μετοχές), άρα δεν υπάρχει διπλομέτρηση. Συνεπώς το ζητούμενο πλήθος είναι

$$\binom{15}{3} - 4\binom{7}{3} = 455 - 4 \cdot 35 = 315.$$

□

Εφαρμογή 9. *Η κηπουρός θέλει να φυτέψει 5 ίδια κόκκινα, 3 ίδια κίτρινα και 2 ίδια λευκά λουλούδια σε μια σειρά. Με πόσους τρόπους μπορεί;*

Απόδειξη. Πρόκειται για μεταθέσεις με επανάληψη. Το πλήθος δίνεται από τον τύπο:

$$A = \frac{10!}{5! \cdot 3! \cdot 2!}$$

Υπολογισμός:

$$\frac{3.628.800}{120 \cdot 6 \cdot 2} = \frac{3.628.800}{1.440} = 2.520 \text{ τρόποι.}$$

□

Παράδειγμα 2.5. Αναπτύσσουμε και απλοποιούμε την παράσταση $(x+y+z)^{10}$.

(α) Πόσοι *διαφορετικοί* όροι (μονώνυμα) εμφανίζονται στην τελική ανάπτυξη;

(β) Ποιος είναι ο συντελεστής του μονωνύμου $x^4y^3z^3$ στην ανάπτυξη του $(x+y+z)^{10}$;

Απόδειξη. **(α)** Κάθε όρος στην ανάπτυξη του $(x+y+z)^{10}$ είναι της μορφής

$$k\, x^a y^b z^c,$$

όπου k είναι κάποια σταθερά και οι εκθέτες a, b, c είναι μη αρνητικοί ακέραιοι με

$$a+b+c = 10.$$

Άρα το ζητούμενο πλήθος ισούται με το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $a+b+c=10$ σε μη αρνητικούς ακεραίους. Με τη μέθοδο *αστέρια και μπάρες* (10 αστέρια και 2 μπάρες) αυτό είναι

$$\binom{10+3-1}{3-1} = \binom{12}{2} = 66.$$

(β) Στο πολυωνυμικό ανάπτυγμα του $(x+y+z)^{10}$, ο συντελεστής του $x^ay^bz^c$ (με $a+b+c=10$) δίνεται από τον τριωνυμικό συντελεστή

$$\binom{10}{a,b,c} = \frac{10!}{a!\,b!\,c!}.$$

Για $a=4$, $b=3$, $c=3$ παίρνουμε

$$\binom{10}{4,3,3} = \frac{10!}{4!\,3!\,3!} = \frac{3628800}{24 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{3628800}{864} = 4200.$$

Άρα ο συντελεστής του $x^4y^3z^3$ είναι $\boxed{4200}$. □

Παράδειγμα 2.6. Σε ένα ορθογώνιο πλέγμα, από το $(0,0)$ θέλουμε να φτάσουμε στο (a,b) κάνοντας μόνο κινήσεις *δεξιά* $(1,0)$ και *πάνω* $(0,1)$. Πόσες τέτοιες διαδρομές υπάρχουν;

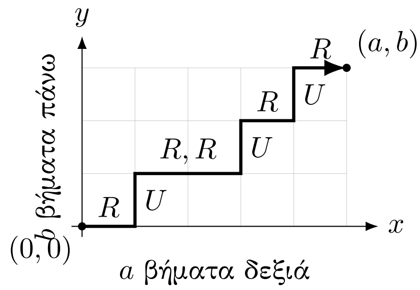
Απόδειξη. Κάθε διαδρομή αποτελείται από ακριβώς a κινήσεις δεξιά και b κινήσεις πάνω, άρα συνολικά από $a+b$ κινήσεις.

Αν κωδικοποιήσουμε τη διαδρομή ως λέξη μήκους $a+b$ πάνω στο αλφάβητο $\{R, U\}$, όπου R σημαίνει "δεξιά" και U σημαίνει "πάνω", τότε κάθε επιτρεπτή διαδρομή αντιστοιχεί 1-1 σε μια τέτοια λέξη που έχει ακριβώς a γράμματα R (και άρα b γράμματα U).

Επομένως, αρκεί να επιλέξουμε σε ποιες a από τις $a+b$ θέσεις της λέξης θα μπουν τα R. Ο αριθμός επιλογών είναι

$$\binom{a+b}{a}.$$

Άρα το πλήθος διαδρομών είναι $\boxed{\binom{a+b}{a}}$. □



Σχήμα 2: Παράδειγμα διαδρομής από $(0,0)$ στο (a,b) με κινήσεις μόνο δεξιά (R) και πάνω (U).

Άσκηση 12. *Για θετικό ακέραιο n, πόσες δυαδικές συμβολοσειρές μήκους n (δηλαδή λέξεις μήκους n πάνω στο αλφάβητο $\{0,1\}$) δεν περιέχουν δύο συνεχόμενα 1; Συμβολίζουμε τον αριθμό με a_n.*

Απόδειξη. Θα βρούμε αναδρομή για το a_n χωρίζοντας τις επιτρεπτές συμβολοσειρές ανάλογα με το πρώτο σύμβολο.

Περίπτωση 1: Η συμβολοσειρά αρχίζει με 0. Τότε τα υπόλοιπα $n-1$ ψηφία σχηματίζουν οποιαδήποτε επιτρεπτή συμβολοσειρά μήκους $n-1$. Άρα οι συμβολοσειρές αυτής της μορφής είναι a_{n-1}.

Περίπτωση 2: Η συμβολοσειρά αρχίζει με 1. Για να μην υπάρχουν δύο συνεχόμενα 1, το δεύτερο ψηφίο πρέπει αναγκαστικά να είναι 0. Άρα η συμβολοσειρά αρχίζει με 10, και τα υπόλοιπα $n-2$ ψηφία σχηματίζουν οποιαδήποτε επιτρεπτή συμβολοσειρά μήκους $n-2$. Άρα οι συμβολοσειρές αυτής της μορφής είναι a_{n-2}.

Οι δύο περιπτώσεις είναι ασυμβίβαστες και καλύπτουν όλες τις επιτρεπτές συμβολοσειρές, οπότε

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \qquad (n \geq 3).$$

Απομένει να δώσουμε αρχικές τιμές:

$$a_1 = 2 \quad (\text{οι } 0,1), \qquad a_2 = 3 \quad (\text{οι } 00, 01, 10).$$

Άρα το a_n ορίζεται από την αναδρομή

$$\boxed{a_1 = 2, \quad a_2 = 3, \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \ (n \geq 3).}$$

(Ισοδύναμα, $a_n = F_{n+2}$ όπου F_m οι αριθμοί Fibonacci με $F_1 = F_2 = 1$.) □

Άσκηση 13. *Θεωρούμε τους n-ψήφιους (δεκαδικούς) αριθμούς, δηλαδή ακολουθίες ψηφίων $d_1 d_2 \cdots d_n$ με $d_1 \in \{1,2,\ldots,9\}$ και $d_i \in \{0,1,\ldots,9\}$ για $i \geq 2$. Θέλουμε να μετρήσουμε όσους έχουν την ιδιότητα ότι κανένα δύο διαδοχικά ψηφία δεν είναι ίσα (δηλαδή $d_i \neq d_{i+1}$ για κάθε $i = 1, \ldots, n-1$).*

Ορίζουμε:

$E_n := \#\{$*τέτοιους n-ψήφιους που τελειώνουν σε άρτιο ψηφίο*$\}$, $\qquad O_n := \#\{$*τέτοιους n-ψήφιους που τελειώνο*

1. *Να αποδειχθούν οι αναδρομές*

$$E_{n+1} = 4E_n + 5O_n, \qquad O_{n+1} = 5E_n + 4O_n,$$

   με αρχικές τιμές $E_1 = 4$, $O_1 = 5$.

2. *Χρησιμοποιώντας πίνακες, να υπολογιστούν κλειστοί τύποι για E_n και O_n, υπολογίζοντας τη δύναμη του πίνακα που εμφανίζεται.*

Απόδειξη. **(1) Οι αναδρομές.** Για να φτιάξουμε έναν επιτρεπτό $(n+1)$-ψήφιο, κοιτάμε το τελευταίο ψηφίο.

Για E_{n+1}: Θέλουμε το τελευταίο ψηφίο να είναι άρτιο (0,2,4,6,8).

- Αν το προηγούμενο (δηλαδή το n-οστό) ψηφίο είναι άρτιο, τότε υπάρχουν 5 άρτια ψηφία αλλά απαγορεύεται να επαναλάβουμε το ίδιο, άρα 4 επιλογές για το τελευταίο ψηφίο. Αυτό δίνει $4E_n$.
- Αν το n-οστό ψηφίο είναι περιττό, τότε μπορούμε να διαλέξουμε *οποιοδήποτε* από τα 5 άρτια ψηφία, άρα παίρνουμε $5O_n$.

Άρα $E_{n+1} = 4E_n + 5O_n$.

Ομοίως για O_{n+1}: Αν το n-οστό ψηφίο είναι περιττό, έχουμε 4 επιλογές περιττού ψηφίου (όχι το ίδιο), ενώ αν είναι άρτιο, έχουμε 5 επιλογές περιττού. Άρα $O_{n+1} = 5E_n + 4O_n$.

Οι αρχικές τιμές είναι:

$$E_1 = 4 \quad (2,4,6,8), \qquad O_1 = 5 \quad (1,3,5,7,9).$$

(2) Μέθοδος πινάκων και υπολογισμός δύναμης. Γράφουμε το σύστημα σε μορφή πίνακα:

$$\begin{pmatrix} E_{n+1} \\ O_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} E_n \\ O_n \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} E_1 \\ O_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Άρα

$$\begin{pmatrix} E_n \\ O_n \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Υπολογίζουμε το A^m διαγωνιοποιώντας τον A. Ο χαρακτηριστικός πολυώνυμος είναι

$$\det(A - \lambda I) = (4-\lambda)^2 - 25 = \lambda^2 - 8\lambda - 9 = (\lambda - 9)(\lambda + 1),$$

άρα οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 9$ και $\lambda_2 = -1$. Εύκολα βρίσκουμε ιδιοδιανύσματα:

$$\lambda_1 = 9 : \ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_2 = -1 : \ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Θέτουμε

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Τότε $A = PDP^{-1}$ και (ελέγχεται άμεσα) $P^{-1} = \frac{1}{2}P$. Άρα για κάθε $m \geq 0$,

$$A^m = PD^mP^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9^m & 0 \\ 0 & (-1)^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Κάνοντας τον πολλαπλασιασμό παίρνουμε τον κλειστό τύπο

$$A^m = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 9^m + (-1)^m & 9^m - (-1)^m \\ 9^m - (-1)^m & 9^m + (-1)^m \end{pmatrix}.$$

Θέτοντας $m = n-1$ και πολλαπλασιάζοντας με $\binom{4}{5}$,

$$\begin{pmatrix} E_n \\ O_n \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 9^{n-1} + (-1)^{n-1} & 9^{n-1} - (-1)^{n-1} \\ 9^{n-1} - (-1)^{n-1} & 9^{n-1} + (-1)^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Υπολογίζοντας τα δύο μέλη:

$$E_n = \frac{1}{2}\Big((9^{n-1} + (-1)^{n-1}) \cdot 4 + (9^{n-1} - (-1)^{n-1}) \cdot 5\Big) = \frac{9^n + (-1)^n}{2},$$

$$O_n = \frac{1}{2}\Big((9^{n-1} - (-1)^{n-1}) \cdot 4 + (9^{n-1} + (-1)^{n-1}) \cdot 5\Big) = \frac{9^n - (-1)^n}{2}.$$

Άρα

$$\boxed{E_n = \frac{9^n + (-1)^n}{2}}, \qquad \boxed{O_n = \frac{9^n - (-1)^n}{2}}.$$

(Συνεπώς $E_n + O_n = 9^n$, όπως αναμένεται.) □

Παράδειγμα 2.7. Πόσοι ακέραιοι αριθμοί μεταξύ 1 και 240 (συμπεριλαμβανομένων) είναι πολλαπλάσια του 4 ή του 6;

Απόδειξη. Υπάρχουν $\frac{240}{4} = 60$ πολλαπλάσια του 4 μεταξύ 1 και 240, και $\frac{240}{6} = 40$ πολλαπλάσια του 6 μεταξύ 1 και 240.

Αν προσθέσουμε $60 + 40$, τότε έχουμε μετρήσει δύο φορές τους αριθμούς που είναι πολλαπλάσια και του 4 και του 6, δηλαδή τα πολλαπλάσια του $\mathrm{lcm}(4, 6) = 12$. Τα πολλαπλάσια του 12 μεταξύ 1 και 240 είναι $\frac{240}{12} = 20$.

Άρα, με την αρχή της εγκλεισμού–αποκλεισμού, το ζητούμενο πλήθος είναι

$$60 + 40 - 20 = 80.$$

□

Παράδειγμα 2.8. Τα τέσσερα σύνολα A, B, C, D έχουν από 400 στοιχεία το καθένα. Η τομή οποιωνδήποτε δύο από αυτά έχει 115 στοιχεία, η τομή οποιωνδήποτε τριών έχει 53 στοιχεία, και η τομή και των τεσσάρων έχει 28 στοιχεία. Πόσα στοιχεία έχει η ένωση $A \cup B \cup C \cup D$;

Απόδειξη. Με την αρχή της εγκλεισμού–αποκλεισμού,

$$|A \cup B \cup C \cup D| = \sum |A_i| - \sum |A_i \cap A_j| + \sum |A_i \cap A_j \cap A_k| - |A \cap B \cap C \cap D|.$$

Έχουμε $\sum |A_i| = 4 \cdot 400 = 1600$. Υπάρχουν $\binom{4}{2} = 6$ ζεύγη, άρα $\sum |A_i \cap A_j| = 6 \cdot 115 = 690$. Υπάρχουν $\binom{4}{3} = 4$ τριάδες, άρα $\sum |A_i \cap A_j \cap A_k| = 4 \cdot 53 = 212$. Τέλος, $|A \cap B \cap C \cap D| = 28$. Άρα

$$|A \cup B \cup C \cup D| = 1600 - 690 + 212 - 28 = 1094.$$

□

Παράδειγμα 2.9. Να βρεθεί το πλήθος των μη αρνητικών ακεραίων μικρότερων του 10^6 που περιέχουν *και τα τέσσερα* ψηφία $1, 2, 3, 4$ στη δεκαδική τους αναπαράσταση.

Απόδειξη. Έστω N το ζητούμενο πλήθος, και n το πλήθος των μη αρνητικών ακεραίων μικρότερων του 10^6 που *δεν* περιέχουν ένα ή περισσότερα από τα ψηφία $1, 2, 3, 4$. Επειδή κάθε αριθμός με λιγότερα από 6 ψηφία μπορεί να γραφεί ως «εξαψήφιος» με πρόσθεση αρχικών μηδενικών, έχουμε συνολικά 10^6 εξαψήφιες ακολουθίες ψηφίων και άρα

$$N = 10^6 - n.$$

Για $i = 1, 2, 3, 4$ θέτουμε M_i το σύνολο όλων των (το πολύ) εξαψήφιων ακεραίων που *δεν* περιέχουν το ψηφίο i. Τότε

$$n = \big|M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4\big|.$$

Για κάθε μη κενό υποσύνολο $\{j_1,\dots,j_r\} \subseteq \{1,2,3,4\}$ ισχύει

$$|M_{j_1} \cap \cdots \cap M_{j_r}| = (10-r)^6,$$

αφού απαγορεύουμε r ψηφία και μένουν $10-r$ επιλογές σε καθεμία από τις 6 θέσεις. Άρα, με εγκλεισμό–αποκλεισμό,

$$n = \binom{4}{1}9^6 - \binom{4}{2}8^6 + \binom{4}{3}7^6 - \binom{4}{4}6^6 = 976840.$$

Επομένως

$$N = 1000000 - 976840 = 23160.$$

□

Άσκηση 14. Δίνονται τέσσερα δοχεία A, B, Γ, Δ και εννέα *διαφορετικά* μολύβια. (Δεν υπάρχει περιορισμός στη χωρητικότητα των δοχείων.)

(α) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν τα εννέα μολύβια στα δοχεία;

(β) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν τα εννέα μολύβια στα δοχεία αυτά, ώστε κάθε δοχείο να περιέχει τουλάχιστον ένα μολύβι;

(γ) Όπως στο (β), αλλά τώρα τα μολύβια είναι *όμοια*. Με πόσους τρόπους;

Απόδειξη. (α) Κάθε ένα από τα 9 διαφορετικά μολύβια μπορεί να τοποθετηθεί ανεξάρτητα σε ένα από τα 4 δοχεία. Άρα, με τον κανόνα γινομένου, οι τρόποι είναι

$$4^9.$$

(β) Θέλουμε όλες οι θέσεις A, B, Γ, Δ να είναι μη κενές. Δηλαδή ζητάμε το πλήθος των *επί* συναρτήσεων από το σύνολο των 9 μολυβιών στο σύνολο των 4 δοχείων.

Με εγκλεισμό–αποκλεισμό: από τις 4^9 κατανομές αφαιρούμε όσες αφήνουν κάποιο δοχείο κενό.

- Αν ένα συγκεκριμένο δοχείο είναι κενό, τότε τα 9 μολύβια μπαίνουν στα άλλα 3 δοχεία: 3^9 τρόποι. Υπάρχουν $\binom{4}{1}$ επιλογές για το κενό δοχείο.
- Αν δύο συγκεκριμένα δοχεία είναι κενά, τότε τα 9 μολύβια μπαίνουν στα άλλα 2 δοχεία: 2^9 τρόποι. Υπάρχουν $\binom{4}{2}$ επιλογές για τα δύο κενά δοχεία.
- Αν τρία δοχεία είναι κενά, τότε όλα τα μολύβια μπαίνουν στο μοναδικό υπόλοιπο δοχείο: $1^9 = 1$ τρόπος. Υπάρχουν $\binom{4}{3}$ επιλογές για τα τρία κενά δοχεία.

Άρα

$$4^9 - \binom{4}{1}3^9 + \binom{4}{2}2^9 - \binom{4}{3}1^9.$$

(Ισοδύναμα: $4!\,S(9,4)$, όπου $S(9,4)$ αριθμός Stirling 2ου είδους.)

(γ) Τώρα τα 9 μολύβια είναι *όμοια* και κάθε δοχείο πρέπει να πάρει τουλάχιστον ένα. Αν $x_A, x_B, x_\Gamma, x_\Delta$ είναι τα πλήθη μολυβιών σε κάθε δοχείο, τότε ζητάμε τα θετικά ακέραια

$$x_A + x_B + x_\Gamma + x_\Delta = 9, \qquad x_A, x_B, x_\Gamma, x_\Delta \ge 1.$$

Θέτουμε $y_A = x_A - 1$, $y_B = x_B - 1$, $y_\Gamma = x_\Gamma - 1$, $y_\Delta = x_\Delta - 1$. Τότε

$$y_A + y_B + y_\Gamma + y_\Delta = 5, \qquad y_A, y_B, y_\Gamma, y_\Delta \ge 0.$$

Με «αστέρια και μπάρες», το πλήθος λύσεων είναι

$$\binom{5+4-1}{4-1} = \binom{8}{3} = 56.$$

□

Άσκηση 15. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, θεωρούμε $2n$ στοιχεία τα οποία χωρίζονται σε n τύπους, και από κάθε τύπο υπάρχουν *ακριβώς δύο όμοια* στοιχεία. Να βρεθεί το πλήθος a_n των διαφορετικών διατάξεων (σε μια σειρά) αυτών των $2n$ στοιχείων, με την ιδιότητα ότι κανένα δύο στοιχεία του ίδιου τύπου δεν είναι γειτονικά.

Απόδειξη. Θέτουμε a_n το ζητούμενο πλήθος. Για $i = 1, 2, \ldots, n$, έστω M_i το σύνολο όλων των διατάξεων στις οποίες τα δύο στοιχεία του i-οστού τύπου είναι γειτονικά. Τότε

$$a_n = \frac{(2n)!}{(2!)^n} - \left|M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_n\right| = \frac{(2n)!}{2^n} - \left|M_1 \cup \cdots \cup M_n\right|.$$

Για να υπολογίσουμε $\left|M_1 \cup \cdots \cup M_n\right|$ εφαρμόζουμε την αρχή εγκλεισμού–αποκλεισμού. Πάρτε ένα μη κενό υποσύνολο $J = \{j_1, \ldots, j_r\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$. Τότε $M_{j_1} \cap \cdots \cap M_{j_r}$ είναι το σύνολο των διατάξεων όπου, για κάθε τύπο του J, τα δύο όμοια στοιχεία είναι γειτονικά. Για κάθε τέτοιο τύπο μπορούμε να *ενώσουμε* το ζεύγος σε ένα «μπλοκ» (ένα νέο αντικείμενο). Έτσι, αντί για $2r$ στοιχεία παίρνουμε r μπλοκ, άρα συνολικά έχουμε $2n - r$ αντικείμενα.

Από αυτά, τα r μπλοκ είναι διακριτά (διαφορετικών τύπων), ενώ για κάθε έναν από τους $n - r$ υπόλοιπους τύπους έχουμε ακόμη δύο όμοια στοιχεία. Άρα το πλήθος διατάξεων είναι

$$m(r) := \left|M_{j_1} \cap \cdots \cap M_{j_r}\right| = \frac{(2n-r)!}{2^{\,n-r}},$$

και εξαρτάται μόνο από το r, όχι από την επιλογή του J.

Επομένως, με εγκλεισμό–αποκλεισμό,

$$\left|M_1 \cup \cdots \cup M_n\right| = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r+1} \binom{n}{r} m(r) = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r+1} \binom{n}{r} \frac{(2n-r)!}{2^{\,n-r}}.$$

Τελικά,

$$a_n = \frac{(2n)!}{2^n} - \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r+1} \binom{n}{r} \frac{(2n-r)!}{2^{\,n-r}} = \sum_{r=0}^{n} (-1)^{r} \binom{n}{r} \frac{(2n-r)!}{2^{\,n-r}}.$$

□

Παράδειγμα 2.10. Έστω $m \geq 1$ ακέραιος και έστω ότι οι *διαφορετικοί* πρώτοι διαιρέτες του είναι

$$p_1, p_2, \ldots, p_n, \qquad \text{δηλαδή} \qquad m = p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n}.$$

Να υπολογιστεί (με την αρχή εγκλεισμού–αποκλεισμού) το πλήθος των ακεραίων $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ που είναι πρώτοι προς το m.

Απόδειξη. Θέτουμε $M = \{1, 2, \ldots, m\}$. Για κάθε $i = 1, \ldots, n$ ορίζουμε

$$M_i = \{\, k \in M : \; p_i \mid k \,\}.$$

Τότε ένας ακέραιος $k \in M$ *δεν* είναι πρώτος προς το m αν και μόνο αν έχει κοινό πρώτο διαιρέτη με το m, δηλαδή αν και μόνο αν ανήκει στο $M_1 \cup \cdots \cup M_n$. Άρα το ζητούμενο πλήθος είναι

$$m - \left|M_1 \cup \cdots \cup M_n\right|.$$

Εφαρμόζουμε εγκλεισμό–αποκλεισμό:

$$\left|M_1 \cup \cdots \cup M_n\right| = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r+1} \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_r \le n} \left|M_{j_1} \cap \cdots \cap M_{j_r}\right|.$$

Για ένα σύνολο δεικτών $j_1 < \cdots < j_r$, έχουμε

$$M_{j_1} \cap \cdots \cap M_{j_r} = \{\, k \in M : \ p_{j_1} \cdots p_{j_r} \mid k \,\}.$$

Επειδή $p_{j_1} \cdots p_{j_r} \mid m$, ακριβώς τα πολλαπλάσια του $p_{j_1} \cdots p_{j_r}$ στο $\{1, \ldots, m\}$ είναι $\frac{m}{p_{j_1} \cdots p_{j_r}}$ πολλά, δηλαδή

$$\left|M_{j_1} \cap \cdots \cap M_{j_r}\right| = \frac{m}{p_{j_1} \cdots p_{j_r}}.$$

Άρα

$$\left|M_1 \cup \cdots \cup M_n\right| = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r+1} \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_r \le n} \frac{m}{p_{j_1} \cdots p_{j_r}}.$$

Τελικά, το πλήθος των $k \in \{1, \ldots, m\}$ με $\gcd(k, m) = 1$ είναι

$$m - \left|M_1 \cup \cdots \cup M_n\right| = m \left(1 + \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r} \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_r \le n} \frac{1}{p_{j_1} \cdots p_{j_r}} \right).$$

Ισοδύναμα, αναγνωρίζοντας την ανάπτυξη γινομένου,

$$m - \left|M_1 \cup \cdots \cup M_n\right| = m \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

□

Ορισμός 2.11. Μια *διαμέριση* του συνόλου $[n]$ είναι μια συλλογή από μη κενά μπλοκ έτσι ώστε κάθε στοιχείο του $[n]$ να ανήκει σε ακριβώς ένα από αυτά τα μπλοκ.

Ο αριθμός των διαμερίσεων του $[n]$ σε k μη κενά μπλοκ συμβολίζεται με $S(n, k)$. Οι αριθμοί $S(n, k)$ ονομάζονται *αριθμοί Stirling δεύτερου είδους*.

Παράδειγμα 2.12. Για κάθε $n \ge 1$, έχουμε $S(n, 1) = S(n, n) = 1$. Για κάθε $n \ge 2$, η ισότητα $S(n, n-1) = \binom{n}{2}$ ισχύει, καθώς μια διαμέριση του $[n]$ σε $n - 1$ μπλοκ πρέπει να αποτελείται από ένα υποσύνολο με δύο στοιχεία (ζεύγος) και $n - 2$ μονοσύνολα.

Παράδειγμα 2.13. Το σύνολο $[4]$ έχει επτά διαμερίσεις σε δύο μη κενά μπλοκ, συγκεκριμένα $\{1, 2, 3\}\{4\}$; $\{1, 2, 4\}\{3\}$; $\{1, 3, 4\}\{2\}$; $\{2, 3, 4\}\{1\}$, και επίσης $\{1, 2\}\{3, 4\}$; $\{1, 3\}\{2, 4\}$; και $\{1, 4\}\{2, 3\}$. Επομένως, $S(4, 2) = 7$.

Αρχικά, θα αποδείξουμε μια αναδρομική σχέση.

Θεώρημα 2.14. *Για όλους τους θετικούς ακεραίους $k \le n$,*

$$S(n, k) = S(n-1, k-1) + k \cdot S(n-1, k). \tag{1}$$

Απόδειξη. Όπως και πριν, μπορούμε να λάβουμε μια συνδυαστική απόδειξη εξετάζοντας προσεκτικά ένα συγκεκριμένο στοιχείο, ας πούμε το μέγιστο στοιχείο n. Αν αυτό το στοιχείο σχηματίζει ένα μπλοκ από μόνο του (μονοσύνολο), τότε τα υπόλοιπα $n - 1$ στοιχεία έχουν ακριβώς $S(n-1, k-1)$ τρόπους για να ολοκληρώσουν τη διαμέριση. Αυτές οι διαμερίσεις απαριθμούνται από το πρώτο μέλος της δεξιάς πλευράς. Αν, από την άλλη πλευρά, το στοιχείο n δεν σχηματίζει ένα μπλοκ από μόνο του, τότε τα υπόλοιπα $n-1$ στοιχεία πρέπει να σχηματίσουν μια διαμέριση με k μπλοκ με έναν από τους $S(n-1,k)$ τρόπους. Στη συνέχεια, μπορούμε να προσθέσουμε το n σε οποιοδήποτε από τα k μπλοκ που σχηματίζονται από αυτήν τη διαμέριση, πολλαπλασιάζοντας τον αριθμό όλων των πιθανοτήτων μας επί k. Αυτές οι διαμερίσεις απαριθμούνται από το δεύτερο μέλος της δεξιάς πλευράς. Καθώς η αριστερή πλευρά απαριθμεί όλες τις διαμερίσεις του $[n]$ σε k μπλοκ, ο ισχυρισμός αποδεικνύεται. □

Πόρισμα 2.15. *Ο αριθμός όλων των συναρτήσεων $f : [n] \to [k]$ που είναι επί είναι $k! \cdot S(n,k)$.*

Απόδειξη. Μια τέτοια συνάρτηση ορίζει μια διαμέριση του $[n]$. Τα μπλοκ είναι τα υποσύνολα των στοιχείων που απεικονίζονται στο ίδιο στοιχείο $i \in [k]$. Επομένως, τα μπλοκ φέρουν ετικέτες, και υπάρχουν ακριβώς k από αυτά. □

Μια ενδιαφέρουσα συνέπεια αυτού είναι το ακόλουθο απροσδόκητο πόρισμα. Είναι εκπληκτικό καθώς δείχνει ότι το x^n, είναι στην πραγματικότητα ένα άθροισμα $n+1$ όρων που περιλαμβάνουν αριθμούς Stirling.

Πόρισμα 2.16. *Για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x, και όλους τους μη αρνητικούς ακεραίους n,*

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)(x)_k. \tag{2}$$

Απόδειξη. Και οι δύο πλευρές είναι πολυώνυμα του x βαθμού n. Επομένως, αν μπορέσουμε να δείξουμε ότι συμφωνούν για περισσότερες από n τιμές του x, η απόδειξη θα έχει ολοκληρωθεί. Θα αποδείξουμε μια ακόμη ισχυρότερη πρόταση, συγκεκριμένα ότι οι δύο πλευρές συμφωνούν για *όλους τους θετικούς ακεραίους* x.

Έστω λοιπόν x ένας θετικός ακέραιος. Τότε η αριστερή πλευρά είναι ο αριθμός όλων των συναρτήσεων από το $[n]$ στο $[x]$. Ισχυριζόμαστε ότι η δεξιά πλευρά είναι η ίδια, απαριθμημένη σύμφωνα με το *μέγεθος της εικόνας*. Πράγματι, αν η εικόνα μιας τέτοιας συνάρτησης έχει μέγεθος k, τότε υπάρχουν $\binom{x}{k}$ επιλογές για την εικόνα I, και στη συνέχεια, από το παραπάνω Πόρισμα, υπάρχουν $k! \cdot S(n,k)$ επιλογές για την ίδια τη συνάρτηση. Καθώς $(x)_k = k! \cdot \binom{x}{k}$, ο ισχυρισμός αποδεικνύεται. □

Θεώρημα 2.17. *Για όλους τους θετικούς ακεραίους n και k, η ισότητα*

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\frac{1}{i!(k-i)!}(k-i)^n$$

ισχύει.

Απόδειξη. Αντί να βρούμε έναν τύπο για το $S(n,k)$, θα βρούμε έναν τύπο για το $k! \cdot S(n,k)$. Γνωρίζουμε από το Πόρισμα ότι το τελευταίο είναι ο αριθμός όλων των επί συναρτήσεων από το $[n]$ στο $[k]$.

Είναι προφανές ότι ο αριθμός όλων των *συναρτήσεων* από το $[n]$ στο $[k]$ είναι k^n καθώς κάθε στοιχείο του πεδίου ορισμού μπορεί να απεικονιστεί σε ένα από τα k στοιχεία. Ωστόσο, δεν θα είναι όλες αυτές οι συναρτήσεις επί· πολλές θα χάσουν ένα, δύο ή περισσότερα στοιχεία του $[k]$ στην εικόνα τους. Πρέπει να απαριθμήσουμε εκείνες που δεν χάνουν *κανένα* στοιχείο του k. Έστω $i \in [k]$ και έστω A_i το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το $[n]$ στο $[k]$ των οποίων η εικόνα δεν περιέχει το i. Είναι τότε προφανές ότι $|A_i| = (k-1)^n$ καθώς τέτοιες συναρτήσεις μπορούν να απεικονίσουν οποιοδήποτε στοιχείο του $[n]$ σε οποιοδήποτε από τα $k-1$ στοιχεία. Παρομοίως,

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_j}| = (k-j)^n,$$

για κάθε $j \leq k$. Επομένως, ο τύπος εγκλεισμού-αποκλεισμού δίνει:

$$
\begin{aligned}
|A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_n| &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_j} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_j}| \\
&= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \binom{k}{i} (k-i)^n.
\end{aligned}
$$

Αυτός είναι ο αριθμός των συναρτήσεων από το $[n]$ στο $[k]$ των οποίων το πεδίο τιμών *δεν* είναι ολόκληρο το σύνολο $[k]$. Επομένως, ο αριθμός εκείνων με πεδίο τιμών το $[k]$, με άλλα λόγια, ο αριθμός των επί συναρτήσεων, μπορεί να προκύψει αφαιρώντας αυτόν τον αριθμό από εκείνον όλων των συναρτήσεων από το $[n]$ στο $[k]$, και ο ισχυρισμός μας έπεται. □

Ορισμός 2.18. Έστω $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_k \geq 1$ ακέραιοι ώστε

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k = n.$$

Τότε η ακολουθία $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ ονομάζεται *διαμέριση* (partition) του ακεραίου n. Το πλήθος όλων των διαμερίσεων του n συμβολίζεται με $p(n)$. Το πλήθος των διαμερίσεων του n σε *ακριβώς* k μέρη συμβολίζεται με $p_k(n)$.

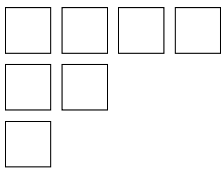
Παράδειγμα 2.19. Ο θετικός ακέραιος 5 έχει 7 διαμερίσεις. Πράγματι, είναι

$$(5),\ (4,1),\ (3,2),\ (3,1,1),\ (2,2,1),\ (2,1,1,1),\ (1,1,1,1,1).$$

Άρα $p(5) = 7$.

Ένα *σχήμα Ferrers* (Ferrers shape) μιας διαμέρισης $p = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ του n είναι ένα σύνολο από n τετραγωνικά κουτάκια με οριζόντιες και κατακόρυφες πλευρές, τοποθετημένα έτσι ώστε στην i-οστή σειρά να υπάρχουν x_i κουτάκια και όλες οι σειρές να αρχίζουν από την ίδια κατακόρυφη ευθεία. Ονομάζεται από τον Βρετανό μαθηματικό Norman Macleod Ferrers. Το σχήμα Ferrers της διαμέρισης $p = (4, 2, 1)$ φαίνεται στο Σχήμα 3. Είναι προφανές ότι υπάρχει 1–1 αντιστοιχία ανάμεσα στις διαμερίσεις του n και στα σχήματα Ferrers μεγέθους n.

Αν κατοπτρίσουμε ένα σχήμα Ferrers ως προς την κύρια διαγώνιό του, παίρνουμε ένα άλλο σχήμα, που αντιστοιχεί στη *συζυγή* (conjugate) διαμέριση. Στο παράδειγμά μας, η συζυγής της $(4, 2, 1)$ είναι η $(3, 2, 1, 1)$. Ειδικότερα, το μήκος της i-οστής σειράς του σχήματος Ferrers της συζυγούς διαμέρισης είναι ίσο με το μήκος της i-οστής στήλης του αρχικού σχήματος.



Σχήμα 3: Σχήμα Ferrers της διαμέρισης $(4, 2, 1)$.

Θεώρημα 2.20. *Το πλήθος των διαμερίσεων του n σε το πολύ k μέρη είναι ίσο με το πλήθος των διαμερίσεων του n σε μέρη που δεν ξεπερνούν το k.*

Απόδειξη. Ο αριθμός των διαμερίσεων του n σε το πολύ k μέρη είναι ίσος με τον αριθμό των σχημάτων Ferrers μεγέθους n που έχουν το πολύ k σειρές. Ο αριθμός των διαμερίσεων του n σε μέρη $\leq k$ είναι ίσος με τον αριθμό των σχημάτων Ferrers μεγέθους n που έχουν το πολύ k στήλες. Αλλά τα σχήματα Ferrers με το πολύ k σειρές αντιστοιχούν 1–1 στα σχήματα Ferrers με το πολύ k στήλες με την κατοπτρική συμμετρία ως προς την κύρια διαγώνιο (δηλαδή με τη συζυγή διαμέριση). Άρα οι δύο αριθμοί είναι ίσοι. □

3 Γεννήτριες Συναρτήσεις

Παράδειγμα 3.1 (Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων και ερμηνεία συντελεστών). Πώς πολλαπλασιάζουμε τα πολυώνυμα

$$p(x) = x + x^2 + x^3 + x^4 \qquad \text{και} \qquad q(x) = x + x^3 + x^4;$$

Επίσης, χωρίς να υπολογίσουμε όλο το γινόμενο, να βρούμε τον συντελεστή του x^5 στο $p(x)q(x)$.

Απόδειξη. Για να πολλαπλασιάσουμε τα $p(x), q(x)$, πολλαπλασιάζουμε *κάθε* όρο του $p(x)$ με *κάθε* όρο του $q(x)$ και αθροίζουμε όλα τα γινόμενα. Εδώ όλοι οι συντελεστές είναι 1, άρα στο τέλος απλώς «μετράμε» πόσες φορές εμφανίζεται κάθε δύναμη του x. Έτσι παίρνουμε

$$p(x)q(x) = x^8 + 2x^7 + 2x^6 + 3x^5 + 2x^4 + x^3 + x^2.$$

Τώρα θέλουμε τον συντελεστή του x^5 *χωρίς* να κάνουμε όλο το γινόμενο. Ο όρος x^5 προκύπτει όταν επιλέξουμε έναν όρο x^i από το $p(x)$ και έναν όρο x^j από το $q(x)$ με $i + j = 5$. Στην περίπτωσή μας το x^5 εμφανίζεται:

$$x \cdot x^4, \qquad x^2 \cdot x^3, \qquad x^4 \cdot x,$$

δηλαδή υπάρχουν 3 τέτοια ζεύγη, άρα ο συντελεστής του x^5 στο $p(x)q(x)$ είναι 3.

Μια ωραία «εικόνα» είναι η εξής: σκεφτόμαστε ότι το $p(x)$ αντιστοιχεί σε επιλογή από το σύνολο εκθετών $I = \{1, 2, 3, 4\}$ και το $q(x)$ σε επιλογή από $J = \{1, 3, 4\}$. Το να φτιάξουμε x^5 ισοδυναμεί με το να επιλέξουμε *διατεταγμένο* ζεύγος (i, j) με $i \in I$, $j \in J$ και $i + j = 5$.

Αυτό γενικεύεται: αν I, J είναι πεπερασμένα σύνολα φυσικών αριθμών και ορίσουμε

$$p(x) = \sum_{i \in I} x^i, \qquad q(x) = \sum_{j \in J} x^j,$$

τότε για κάθε $r \in \mathbb{N}$, ο συντελεστής του x^r στο γινόμενο $p(x)q(x)$ είναι ίσος με το πλήθος των διατεταγμένων ζευγών (i, j) που λύνουν την εξίσωση

$$i + j = r, \qquad i \in I,\ j \in J.$$

□

Απόδειξη ταυτοτήτων. Θέλουμε να αποδείξουμε

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Θεωρούμε την ταυτότητα

$$(1 + x)^n (1 + x)^n = (1 + x)^{2n}.$$

Ο συντελεστής του x^n στο δεξιό μέλος είναι $\binom{2n}{n}$ από το διωνυμικό θεώρημα. Στο αριστερό μέλος, μπορούμε να αναπτύξουμε και τις δύο δυνάμεις $(1 + x)^n$ σύμφωνα με το διωνυμικό θεώρημα, και στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε τα δύο προκύπτοντα πολυώνυμα. Ο συντελεστής του x^n στο γινόμενό τους μπορεί να εκφραστεί ως $\binom{n}{0}\binom{n}{n} + \binom{n}{1}\binom{n}{n-1} + \binom{n}{2}\binom{n}{n-2} + \cdots + \binom{n}{n}\binom{n}{0}$, και αυτός πρέπει να είναι ο ίδιος αριθμός με τον συντελεστή του x^n στο δεξιό μέλος. Αυτό οδηγεί στο

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \binom{n}{n - i} = \binom{2n}{n}.$$

Παράδειγμα 3.2 (Καλάθι με φρούτα και γεννήτριες συναρτήσεις). Με πόσους τρόπους μπορούμε να γεμίσουμε ένα καλάθι με συνολικά n φρούτα, αν ισχύουν οι περιορισμοί:

- ο αριθμός των πορτοκαλιών είναι άρτιος,
- μπορούμε να έχουμε το πολύ 3 μπανάνες,
- ο αριθμός των ανανάδων είναι πολλαπλάσιο του 4,
- μπορούμε να έχουμε το πολύ 1 καρπούζι,
- όλα τα φρούτα είναι μόνο μπανάνες, πορτοκάλια, ανανάδες, καρπούζια.

Απόδειξη. Ας είναι f_n ο ζητούμενος αριθμός τρόπων και

$$F(X) = \sum_{n \geq 0} f_n X^n$$

η (συνήθης) γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $\{f_n\}_{n\geq 0}$. Θα γράψουμε μια γεννήτρια συνάρτηση για κάθε «είδος φρούτου» και μετά θα τις πολλαπλασιάσουμε, επειδή οι επιλογές γίνονται ανεξάρτητα και τα πλήθη αθροίζονται.

Πορτοκάλια (άρτιος αριθμός).

$$O(X) = 1 + X^2 + X^4 + \cdots = \frac{1}{1 - X^2}.$$

Μπανάνες (το πολύ 3*).*

$$B(X) = 1 + X + X^2 + X^3 = \frac{1 - X^4}{1 - X}.$$

Ανανάδες (πολλαπλάσιο του 4*).*

$$P(X) = 1 + X^4 + X^8 + \cdots = \frac{1}{1 - X^4}.$$

Καρπούζια (το πολύ 1*).*

$$W(X) = 1 + X.$$

Άρα η συνολική γεννήτρια είναι

$$F(X) = O(X)B(X)P(X)W(X) = \frac{1}{1 - X^2} \cdot \frac{1 - X^4}{1 - X} \cdot \frac{1}{1 - X^4} \cdot (1 + X).$$

Απλοποιώντας,

$$\frac{1 - X^4}{1 - X^4} = 1, \qquad \frac{1 + X}{1 - X^2} = \frac{1 + X}{(1 - X)(1 + X)} = \frac{1}{1 - X},$$

οπότε

$$F(X) = \frac{1}{1 - X} \cdot \frac{1}{1 - X} = \frac{1}{(1 - X)^2}.$$

Μένει να βρούμε την ανάπτυξη του $\frac{1}{(1-X)^2}$. Θυμίζουμε τον *γενικευμένο διωνυμικό συντελεστή*:

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - n + 1)}{n!} \qquad (n \geq 0),$$

και την ταυτότητα

$$(1 + X)^\alpha = \sum_{n \geq 0} \binom{\alpha}{n} X^n.$$

Βάζοντας $\alpha = -2$ και αντικαθιστώντας $X \mapsto -X$, παίρνουμε

$$\frac{1}{(1-X)^2} = (1-X)^{-2} = \sum_{n\geq 0} \binom{-2}{n} (-X)^n = \sum_{n\geq 0} (n+1)X^n.$$

(Πράγματι $\binom{-2}{n}(-1)^n = n+1$.)

Άρα ο συντελεστής του X^n στο $F(X)$ είναι $f_n = n+1$. □

Άσκηση 16. Ένα κουτί περιέχει 30 κόκκινες, 40 μπλε και 50 άσπρες μπάλες. Οι μπάλες του ίδιου χρώματος θεωρούνται όμοιες. Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε μια συλλογή 70 μπαλών από το κουτί;

Απόδειξη. Αν r, b, w είναι αντίστοιχα οι κόκκινες/μπλε/άσπρες μπάλες που επιλέγουμε, τότε ζητάμε το πλήθος των τριάδων

$$r + b + w = 70, \qquad 0 \leq r \leq 30, \quad 0 \leq b \leq 40, \quad 0 \leq w \leq 50.$$

Με γεννήτριες συναρτήσεις: ο παράγοντας για τις κόκκινες είναι

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{30},$$

για τις μπλε

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{40},$$

και για τις άσπρες

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{50}.$$

Άρα το ζητούμενο πλήθος είναι ο συντελεστής του x^{70} στο γινόμενο

$$(1 + x + \cdots + x^{30})(1 + x + \cdots + x^{40})(1 + x + \cdots + x^{50}).$$

Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα γεωμετρικής προόδου

$$1 + x + \cdots + x^m = \frac{1 - x^{m+1}}{1 - x}.$$

Έτσι

$$(1 + x + \cdots + x^{30})(1 + x + \cdots + x^{40})(1 + x + \cdots + x^{50}) = \frac{(1-x^{31})(1-x^{41})(1-x^{51})}{(1-x)^3}.$$

Τώρα χρειαζόμαστε τον συντελεστή του x^{70} στο

$$\frac{(1-x^{31})(1-x^{41})(1-x^{51})}{(1-x)^3}.$$

Γνωρίζουμε ότι

$$\frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{t\geq 0} \binom{t+2}{2} x^t,$$

διότι ο συντελεστής του x^t στο $(1-x)^{-3}$ μετρά τις μη αρνητικές λύσεις της $u + v + z = t$, οι οποίες είναι $\binom{t+2}{2}$ (αστέρια και μπάρες).

Επιπλέον, για να βρούμε τον συντελεστή του x^{70}, αρκεί να κρατήσουμε από το $(1-x^{31})(1-x^{41})(1-x^{51})$ μόνο τους όρους μέχρι βαθμό 70. Πράγματι,

$$(1-x^{31})(1-x^{41})(1-x^{51}) = 1 - x^{31} - x^{41} - x^{51} + x^{72} + x^{82} + x^{92} - x^{123},$$

και όλοι οι όροι $x^{72}, x^{82}, x^{92}, x^{123}$ έχουν βαθμό > 70, άρα δεν επηρεάζουν τον συντελεστή του x^{70} στο τελικό γινόμενο με $(1-x)^{-3}$. Επομένως, ο συντελεστής του x^{70} είναι

$$\binom{70+2}{2} - \binom{(70-31)+2}{2} - \binom{(70-41)+2}{2} - \binom{(70-51)+2}{2}.$$

Δηλαδή

$$\binom{72}{2} - \binom{41}{2} - \binom{31}{2} - \binom{21}{2} = 2556 - 820 - 465 - 210 = 1061.$$

Άρα υπάρχουν 1061 τρόποι. □

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να βρούμε την ακολουθία για την οποία ισχύει

$$a_{n+1} = 4a_n - 100, \tag{3}$$

για κάθε ακέραιο $n \geq 0$, με αρχική συνθήκη $a_0 = 50$. Στην πραγματικότητα έχουμε άπειρες εξισώσεις, σε άπειρες μεταβλητές. Για να συγκεντρώσουμε όλες τις πληροφορίες που είναι διάσπαρτες σε αυτές τις άπειρες εξισώσεις σε μία μόνο εξίσωση, θα εισαγάγουμε την τεχνική των *γεννητριών συναρτήσεων*.

Ορισμός 3.3 (Γεννήτρια συνάρτηση). Έστω $\{f_n\}_{n\geq 0}$ μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Τότε η τυπική δυναμοσειρά

$$F(x) = \sum_{n\geq 0} f_n x^n$$

ονομάζεται η *συνήθης γεννήτρια συνάρτηση* της ακολουθίας $\{f_n\}_{n\geq 0}$.

Επειδή εδώ συζητάμε μόνο συνήθεις παραγωγικές συναρτήσεις, μερικές φορές θα παραλείπουμε τη λέξη «συνήθης» για συντομία. Στη συνέχεια θα χειριστούμε την (8.1) έτσι ώστε να εμφανιστεί η παραγωγική συνάρτηση της ακολουθίας $\{a_n\}_{n\geq 0}$. Θέτουμε

$$G(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n.$$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της (8.1) με x^{n+1}, και μετά αθροίζουμε ως προς $n \geq 0$. Δηλαδή: παίρνουμε ένα αντίγραφο της (8.1) για κάθε $n \geq 0$, πολλαπλασιάζουμε με x^{n+1}, και κατόπιν παίρνουμε το άθροισμα όλων των εξισώσεων που προκύπτουν. Παίρνουμε

$$\sum_{n\geq 0} a_{n+1}x^{n+1} = \sum_{n\geq 0} 4a_n x^{n+1} - \sum_{n\geq 0} 100x^{n+1}. \tag{8.2}$$

Το αριστερό μέλος είναι «σχεδόν» η παραγωγική συνάρτηση $G(x)$. Πράγματι, αν αντικαταστήσουμε $n+1$ με n, ο μόνος όρος που λείπει είναι ο a_0. Άρα το αριστερό μέλος της (8.2) είναι $G(x) - a_0$. Ο πρώτος όρος του δεξιού μέλους είναι $4xG(x)$, ενώ ο δεύτερος όρος του δεξιού μέλους είναι $\frac{100x}{1-x}$, αφού $\sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$. Επομένως η (8.2) ισοδυναμεί με

$$G(x) - a_0 = 4xG(x) - \frac{100x}{1-x}. \tag{8.3}$$

Αναδιατάσσοντας την (8.3) παίρνουμε

$$G(x) = \frac{a_0}{1-4x} - \frac{100x}{(1-x)(1-4x)}. \tag{8.4}$$

Θυμόμαστε ότι $a_0 = 50$, άρα το δεξί μέλος δεν περιέχει αγνώστους· δηλαδή είναι μια τυπική δυναμοσειρά ως προς x. Έτσι έχουμε βρει έναν *ρητό τύπο* για τη $G(x)$, την παραγωγική συνάρτηση της ακολουθίας $\{a_n\}$.

Τέλος, θέλουμε έναν ρητό τύπο για τους ίδιους τους αριθμούς a_n. Παρατηρούμε ότι η (8.4) είναι ισότητα τυπικών δυναμοσειρών, και δύο τυπικές δυναμοσειρές είναι ίσες αν και μόνο αν, για κάθε n, οι συντελεστές του x^n είναι ίσοι. Ο συντελεστής του x^n στο $G(x)$ είναι (εξ ορισμού) ο a_n. Άρα ο συντελεστής του x^n στο δεξί μέλος της (8.4) είναι επίσης a_n.

Ο πρώτος όρος είναι εύκολος:

$$\frac{a_0}{1-4x} = 50\sum_{n\geq 0}(4x)^n = 50\sum_{n\geq 0}4^n x^n,$$

άρα, στον πρώτο όρο, ο συντελεστής του x^n είναι $50\cdot 4^n$.

Ο δεύτερος όρος είναι λίγο πιο σύνθετος. Γράφουμε

$$\frac{100x}{(1-x)(1-4x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1-4x}.$$

Πολλαπλασιάζοντας με $(1-x)(1-4x)$ παίρνουμε

$$A(1-4x) + B(1-x) = 100x,$$

δηλαδή

$$(-B-4A)x + (A+B) = 100x.$$

Άρα $-B-4A = 100$ και $A+B=0$, οπότε $A = -\frac{100}{3}$ και $B = \frac{100}{3}$. Επομένως,

$$\frac{100x}{(1-x)(1-4x)} = \frac{100}{3}\left(\frac{1}{1-4x} - \frac{1}{1-x}\right) = \frac{100}{3}\left(\sum_{n\geq 0}4^n x^n - \sum_{n\geq 0}x^n\right) = \sum_{n\geq 0}\frac{100}{3}(4^n-1)x^n.$$

Άρα, στον δεύτερο όρο, ο συντελεστής του x^n είναι $\frac{100}{3}(4^n-1)$. Τελικά καταλήγουμε ότι

$$a_n = 50\cdot 4^n - 100\cdot\frac{4^n-1}{3}. \tag{8.5}$$

Ολοκληρώσαμε το ζητούμενο, δηλαδή βρήκαμε ρητό τύπο για το a_n. Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι η (8.5) ικανοποιεί την αναδρομή: για $n=0$ δίνει $a_0=50$, και επίσης

$$4a_n - 100 = 4\left(50\cdot 4^n - 100\cdot\frac{4^n-1}{3}\right) - 100 = 50\cdot 4^{n+1} - 100\cdot\frac{4^{n+1}-1}{3} = a_{n+1}.$$

Παράδειγμα 3.4 (Γεννήτρια συνάρτηση για αναδρομή 2ου βαθμού). Θέτουμε $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$ για $n\geq 0$, με $a_0=0$ και $a_1=1$. Να βρεθεί ρητός τύπος για το a_n.

Απόδειξη. Θέτουμε τη (συνήθη) *γεννήτρια συνάρτηση*

$$G(x) = \sum_{n\geq 0}a_n x^n.$$

Πολλαπλασιάζουμε τη σχέση $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$ με x^{n+2} και αθροίζουμε για όλα τα $n\geq 0$:

$$\sum_{n\geq 0}a_{n+2}x^{n+2} = 3\sum_{n\geq 0}a_{n+1}x^{n+2} - 2\sum_{n\geq 0}a_n x^{n+2}.$$

Το αριστερό μέλος είναι

$$\sum_{n\geq 0}a_{n+2}x^{n+2} = G(x) - a_0 - a_1 x = G(x) - x,$$

επειδή $a_0 = 0$ και $a_1 = 1$. Επίσης,

$$\sum_{n\geq 0} a_{n+1}x^{n+2} = x\sum_{n\geq 0} a_{n+1}x^{n+1} = x\,(G(x) - a_0) = xG(x),$$

και

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^{n+2} = x^2 G(x).$$

Άρα η παραπάνω ισότητα γίνεται

$$G(x) - x = 3xG(x) - 2x^2 G(x),$$

οπότε

$$G(x)\,(1 - 3x + 2x^2) = x \quad \Longrightarrow \quad G(x) = \frac{x}{1 - 3x + 2x^2}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$1 - 3x + 2x^2 = (1-x)(1-2x),$$

άρα

$$G(x) = \frac{x}{(1-x)(1-2x)}.$$

Θέλουμε A, B ώστε

$$\frac{x}{(1-x)(1-2x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1-2x}.$$

Πολλαπλασιάζοντας με $(1-x)(1-2x)$ παίρνουμε

$$x = A(1-2x) + B(1-x) = (A+B) + (-2A - B)x.$$

Ταυτίζοντας συντελεστές: $A + B = 0$ και $-2A - B = 1$, άρα $A = -1$, $B = 1$. Επομένως

$$G(x) = -\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-2x}.$$

Αναπτύσσοντας σε γεωμετρικές σειρές,

$$-\frac{1}{1-x} = -\sum_{n\geq 0} x^n, \qquad \frac{1}{1-2x} = \sum_{n\geq 0} 2^n x^n,$$

οπότε

$$G(x) = \sum_{n\geq 0} (2^n - 1)x^n.$$

Άρα ο συντελεστής του x^n είναι $a_n = 2^n - 1$. □

Παράδειγμα 3.5. Ένα εξάμηνο σε ένα Πολυτεχνείο έχει n ημέρες. Στην αρχή του εξαμήνου, η Κοσμήτορας χωρίζει το εξάμηνο σε δύο μέρη ως εξής: οι πρώτες k ημέρες αποτελούν το θεωρητικό μέρος, και οι επόμενες $n-k$ ημέρες αποτελούν το εργαστηριακό μέρος, όπου $1 \leq k \leq n-2$. Έπειτα, επιλέγει *μία* αργία στο πρώτο μέρος και *δύο* αργίες στο δεύτερο μέρος. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να σχεδιάσει το εξάμηνο με αυτούς τους περιορισμούς;

Απόδειξη. Θέτουμε f_n το ζητούμενο πλήθος.

(Άμεση απαρίθμηση ως άθροισμα). Για δεδομένο k, υπάρχουν k τρόποι να επιλέξουμε μία ημέρα-αργία στο πρώτο μέρος. Για το δεύτερο μέρος θέτουμε $m = n - k$ (οπότε $m \geq 2$) και υπάρχουν $\binom{m}{2}$ τρόποι να επιλέξουμε δύο αργίες. Άρα

$$f_n = \sum_{k=1}^{n-2} k\binom{n-k}{2}.$$

Η παραπάνω μορφή είναι σωστή, αλλά δεν είναι προφανές αν «κλείνει» σε κλειστό τύπο. Γι' αυτό χρησιμοποιούμε γεννήτριες συναρτήσεις.

(Με γεννήτριες συναρτήσεις). Θεωρούμε τις ακολουθίες

$$a_k = \begin{cases} k, & k \geq 1, \\ 0, & k = 0, \end{cases} \qquad b_m = \begin{cases} \binom{m}{2}, & m \geq 2, \\ 0, & m = 0, 1. \end{cases}$$

και τις (συνήθεις) γεννήτριες συναρτήσεις τους

$$A(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k = \sum_{k \geq 1} k x^k, \qquad B(x) = \sum_{m \geq 0} b_m x^m = \sum_{m \geq 2} \binom{m}{2} x^m.$$

Τότε το f_n είναι ακριβώς η συνέλιξη $f_n = \sum_{k+m=n} a_k b_m$, άρα η γεννήτρια

$$F(x) := \sum_{n \geq 0} f_n x^n$$

ικανοποιεί

$$F(x) = A(x)\, B(x).$$

Υπολογίζουμε τώρα κλειστές μορφές για $A(x), B(x)$. Από γνωστές ταυτότητες (π.χ. με παραγώγιση της $\sum_{k \geq 0} x^k = \frac{1}{1-x}$) έχουμε

$$A(x) = \sum_{k \geq 1} k x^k = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Επίσης, επειδή $\binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{2}$, προκύπτει (πάλι από παραγώγιση/γνωστή σειρά) ότι

$$B(x) = \sum_{m \geq 2} \binom{m}{2} x^m = \frac{x^2}{(1-x)^3}.$$

Άρα

$$F(x) = A(x)B(x) = \frac{x}{(1-x)^2} \cdot \frac{x^2}{(1-x)^3} = \frac{x^3}{(1-x)^5}.$$

Χρησιμοποιούμε τώρα το γνωστό ανάπτυγμα

$$\frac{1}{(1-x)^5} = \sum_{t \geq 0} \binom{t+4}{4} x^t.$$

Οπότε

$$F(x) = x^3 \sum_{t \geq 0} \binom{t+4}{4} x^t = \sum_{n \geq 3} \binom{(n-3)+4}{4} x^n = \sum_{n \geq 3} \binom{n+1}{4} x^n.$$

Συνεπώς, για $n \geq 3$ παίρνουμε

$$f_n = \binom{n+1}{4}.$$

□

Παράδειγμα 3.6 (Μια χρήσιμη ταυτότητα για σειρές). Για $|x| < 1$ ισχύει

$$\sum_{n \geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}. \tag{4}$$

Παραγωγίζοντας k φορές ως προς x, παίρνουμε

$$\sum_{n\geq k} n(n-1)\cdots(n-k+1)\,x^{n-k} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}.$$

Αντικαθιστώντας n από $n+k$ και διαιρώντας με $k!$ προκύπτει η ταυτότητα

$$\sum_{n\geq 0} \binom{n+k}{k} x^n = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}, \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Παράδειγμα 3.7. Με τις ίδιες n ημέρες, η Κοσμήτορας χωρίζει πάλι το εξάμηνο σε δύο μέρη, και τώρα (αντί για αργίες) επιλέγει *μερικές* ημέρες για ανεξάρτητη μελέτη και στα δύο μέρη (επιτρέπεται να μη διαλέξει καμία ημέρα σε κάποιο μέρος). Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να σχεδιάσει το εξάμηνο;

Απόδειξη. Θέτουμε g_n το ζητούμενο πλήθος.

Αν το πρώτο μέρος έχει k ημέρες, τότε ο αριθμός τρόπων να διαλέξουμε *ένα υποσύνολο* ημερών για μελέτη μέσα σε αυτές τις k ημέρες είναι 2^k. Αν το δεύτερο μέρος έχει $m = n-k$ ημέρες, τότε αντίστοιχα υπάρχουν 2^m τρόποι. Άρα για δεδομένο k έχουμε $2^k \cdot 2^{n-k} = 2^n$ τρόπους.

Αν θεωρήσουμε ότι το k μπορεί να πάρει όλες τις τιμές $0, 1, \ldots, n$, τότε υπάρχουν $n+1$ επιλογές για το σημείο διάσπασης, οπότε

$$g_n = (n+1)\,2^n.$$

(Με γεννήτριες συναρτήσεις). Η ακολουθία $c_k = 2^k$ $(k \geq 0)$ έχει γεννήτρια

$$C(x) = \sum_{k\geq 0} 2^k x^k = \frac{1}{1-2x}.$$

Το ζητούμενο είναι συνέλιξη της c_k με τον εαυτό της, άρα

$$G(x) := \sum_{n\geq 0} g_n x^n = C(x)^2 = \frac{1}{(1-2x)^2}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{1}{(1-2x)^2} = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{1-2x}\Big) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\Big(\sum_{n\geq 0} 2^n x^n\Big) = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1} n\cdot 2^n x^{n-1} = \sum_{n\geq 0}(n+1)2^n x^n,$$

άρα $g_n = (n+1)2^n$, όπως πριν. □

Παράδειγμα 3.8. Αν $p_{\leq k}(n)$ συμβολίζει το πλήθος των διαμερίσεων του n σε μέρη μεγέθους $\leq k$, τότε

$$\sum_{n\geq 0} p_{\leq k}(n)\,x^n = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1-x^i} = \big(1+x+x^2+x^3+\cdots\big)\big(1+x^2+x^4+x^6+\cdots\big)\cdots\big(1+x^k+x^{2k}+x^{3k}+\cdots\big).$$

Απόδειξη. Θα εξηγήσουμε γιατί ο συντελεστής του x^n στο δεξί μέλος είναι $p_{\leq k}(n)$.

Αναπτύσσοντας το γινόμενο

$$\prod_{i=1}^{k}\big(1 + x^i + x^{2i} + x^{3i} + \cdots\big),$$

κάθε όρος που προκύπτει επιλέγει από τον i-οστό παράγοντα μια δύναμη x^{ij_i} για κάποιο $j_i \geq 0$. Ο συνολικός εκθέτης είναι

$$1 \cdot j_1 + 2 \cdot j_2 + \cdots + k \cdot j_k.$$

Άρα ο συντελεστής του x^n μετρά ακριβώς τα k-αδες $(j_1, \ldots, j_k)$ με $j_i \geq 0$ και

$$1j_1 + 2j_2 + \cdots + kj_k = n \iff 1 + 1 + \ldots + 1 + 2 + 2 + \ldots + 2 + \ldots + k + k + \ldots + k = n.$$

Αλλά αυτό ισοδυναμεί με διαμέριση του n στην οποία εμφανίζεται το μέρος i ακριβώς j_i φορές. Επομένως, μετράμε όλες τις διαμερίσεις του n σε μέρη $\leq k$, δηλαδή $p_{\leq k}(n)$. □

Παράδειγμα 3.9. Αν $p(n)$ είναι το πλήθος όλων των διαμερίσεων του n, τότε

$$\sum_{n \geq 0} p(n)\, x^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^k} = \big(1 + x + x^2 + \cdots\big)\big(1 + x^2 + x^4 + \cdots\big)\big(1 + x^3 + x^6 + \cdots\big) \cdots .$$

Απόδειξη. Ακριβώς όπως στο παραπάνω Παράδειγμα, μόνο που τώρα δεν υπάρχει άνω φράγμα στο μέγεθος των μερών, άρα εμφανίζονται άπειροι παράγοντες. Ο συντελεστής του x^n αντιστοιχεί στο πλήθος τρόπων να γράψουμε

$$n = 1j_1 + 2j_2 + 3j_3 + \cdots \quad (j_i \geq 0,\ \text{όλα μηδέν τελικά}),$$

δηλαδή στο πλήθος των διαμερίσεων του n. □

Παράδειγμα 3.10. Το πλήθος $p_{\mathrm{odd}}(n)$ των διαμερίσεων του n σε *περιττά* μέρη είναι ίσο με το πλήθος $p_{\mathrm{dist}}(n)$ των διαμερίσεων του n σε *διαφορετικά* (άνισα) μέρη.

Απόδειξη. Η βασική ιδέα είναι ότι αρκεί να δείξουμε πως οι γεννήτριες συναρτήσεις των δύο ακολουθιών είναι ίδιες.

(Περιττά μέρη). Αν επιτρέπονται μόνο περιττά μέρη $1, 3, 5, \ldots$, τότε για κάθε περιττό i μπορούμε να πάρουμε $0, 1, 2, \ldots$ φορές το μέρος i. Άρα η γεννήτρια συνάρτηση είναι

$$F(x) = \sum_{n \geq 0} p_{\mathrm{odd}}(n)\, x^n = \prod_{\substack{i \geq 1 \\ i \text{ περιττό}}} \frac{1}{1 - x^i}.$$

(Διαφορετικά μέρη). Αν τα μέρη πρέπει να είναι όλα διαφορετικά, τότε για κάθε $i \geq 1$ είτε παίρνουμε το μέρος i μία φορά είτε δεν το παίρνουμε καθόλου. Άρα ο i-οστός παράγοντας είναι $(1 + x^i)$ και

$$G(x) = \sum_{n \geq 0} p_{\mathrm{dist}}(n)\, x^n = \prod_{i \geq 1} (1 + x^i).$$

Χρησιμοποιούμε τώρα την ταυτότητα

$$1 + x^i = \frac{1 - x^{2i}}{1 - x^i}.$$

Άρα

$$G(x) = \prod_{i \geq 1} \frac{1 - x^{2i}}{1 - x^i} = \frac{\prod_{i \geq 1}(1 - x^{2i})}{\prod_{i \geq 1}(1 - x^i)}.$$

Στο κλάσμα αυτό απαλείφονται όλοι οι «άρτιοι» παράγοντες του παρονομαστή με το γινόμενο του αριθμητή, και μένει

$$G(x) = \prod_{\substack{i \geq 1 \\ i \text{ περιττό}}} \frac{1}{1 - x^i} = F(x).$$

Άρα οι συντελεστές των x^n στα $F(x)$ και $G(x)$ είναι ίσοι για κάθε n, δηλαδή $p_{\mathrm{odd}}(n) = p_{\mathrm{dist}}(n)$. □

Άσκηση 17. Έστω $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε να υπάρχουν δύο *διαφορετικά* σύνολα ακεραίων

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}, \qquad B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\},$$

με την ιδιότητα ότι τα *πολυσύνολα* (multisets) των αθροισμάτων ανά δύο συμπίπτουν, δηλαδή

$$\{a_i + a_j : \ 1 \le i < j \le n\} \ \text{ και } \ \{b_i + b_j : \ 1 \le i < j \le n\}$$

είναι ίσα ως πολυσύνολα. Να αποδείξετε ότι ο n είναι δύναμη του 2.

Απόδειξη. Θεωρούμε τα πολυώνυμα (γεννήτριες συναρτήσεις)

$$f(X) = \sum_{i=1}^{n} X^{a_i}, \qquad g(X) = \sum_{i=1}^{n} X^{b_i}.$$

Από την υπόθεση ότι τα πολυσύνολα των αθροισμάτων $a_i + a_j$ και $b_i + b_j$ (για $i < j$) συμπίπτουν, έχουμε ισότητα πολυωνύμων

$$\sum_{1 \le i < j \le n} X^{a_i + a_j} = \sum_{1 \le i < j \le n} X^{b_i + b_j}.$$

Υπολογίζουμε τώρα τα τετράγωνα:

$$f(X)^2 = \Big(\sum_{i=1}^{n} X^{a_i}\Big)^2 = \sum_{i=1}^{n} X^{2a_i} + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} X^{a_i + a_j},$$

και αντίστοιχα

$$g(X)^2 = \sum_{i=1}^{n} X^{2b_i} + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} X^{b_i + b_j}.$$

Αφαιρώντας κατά μέλη και χρησιμοποιώντας την ισότητα των «σταυρωτών» όρων, παίρνουμε

$$f(X)^2 - g(X)^2 = \sum_{i=1}^{n} X^{2a_i} - \sum_{i=1}^{n} X^{2b_i}.$$

Όμως

$$\sum_{i=1}^{n} X^{2a_i} = \sum_{i=1}^{n} (X^2)^{a_i} = f(X^2), \qquad \sum_{i=1}^{n} X^{2b_i} = g(X^2),$$

άρα

$$f(X)^2 - g(X)^2 = f(X^2) - g(X^2).$$

Ισοδύναμα,

$$\big(f(X) - g(X)\big)\big(f(X) + g(X)\big) = f(X^2) - g(X^2). \tag{6}$$

Παρατηρούμε ότι $f(1) = g(1) = n$, άρα $f(1) - g(1) = 0$ και συνεπώς το $X - 1$ διαιρεί το $f(X) - g(X)$. Έστω $k \ge 1$ η μέγιστη δύναμη ώστε $(X-1)^k \mid (f(X) - g(X))$. Τότε γράφουμε

$$f(X) - g(X) = (X-1)^k h(X), \qquad \text{με } h(1) \ne 0.$$

Αντικαθιστώντας $X \mapsto X^2$ παίρνουμε

$$f(X^2) - g(X^2) = (X^2 - 1)^k h(X^2) = (X-1)^k (X+1)^k h(X^2).$$

Με βάση τη (6) έχουμε λοιπόν

$$(X-1)^k h(X)\big(f(X) + g(X)\big) = (X-1)^k (X+1)^k h(X^2).$$

Διαιρούμε με $(X-1)^k$ και καταλήγουμε στην ταυτότητα

$$h(X)\big(f(X)+g(X)\big) = (X+1)^k h(X^2).$$

Θέτουμε τώρα $X=1$. Τότε $f(1)+g(1)=n+n=2n$ και $h(1)\neq 0$, άρα

$$h(1)\cdot 2n = (1+1)^k h(1) = 2^k h(1).$$

Απλοποιώντας με $h(1)$ παίρνουμε $2n=2^k$, δηλαδή

$$n = 2^{k-1},$$

οπότε ο n είναι δύναμη του 2, όπως ζητήθηκε. □

Ορισμός 3.11 (Οι αριθμοί Catalan). Ο n-οστός αριθμός Catalan $(C_n)_{n\geq 0}$ ορίζεται αναδρομικά από

$$C_0 = 1 \qquad \text{και} \qquad C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_i\, C_{n-i} \quad (n\geq 0).$$

Οι πρώτοι όροι είναι

$$1,\ 1,\ 2,\ 5,\ 14,\ 42,\ 132,\ 429,\ 1430,\ 4862,\ldots$$

Θεώρημα 3.12 (Κλειστός τύπος για τους C_n). *Για κάθε $n\geq 0$ ισχύει*

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε *γεννήτριες συναρτήσεις*. Θέτουμε

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} C_n z^n.$$

Τότε

$$f(z)^2 = \Big(\sum_{n\geq 0} C_n z^n\Big)\Big(\sum_{n\geq 0} C_n z^n\Big) = \sum_{n\geq 0}\Big(\sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i}\Big) z^n.$$

Με τον ορισμό των Catalan, $\sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i} = C_{n+1}$, άρα

$$f(z)^2 = \sum_{n\geq 0} C_{n+1} z^n.$$

Από την άλλη,

$$\sum_{n\geq 0} C_{n+1} z^n = \frac{f(z)-C_0}{z} = \frac{f(z)-1}{z}.$$

Επομένως

$$z\,f(z)^2 = f(z)-1, \qquad \text{δηλ.} \qquad zf(z)^2 - f(z) + 1 = 0.$$

Λύνοντας ως προς $f(z)$ παίρνουμε

$$f(z) = \frac{1\pm\sqrt{1-4z}}{2z}.$$

Επειδή $f(0)=C_0=1$, επιλέγουμε το $(-)$, αφού

$$\lim_{z\to 0}\frac{1+\sqrt{1-4z}}{2z} = +\infty, \qquad \lim_{z\to 0}\frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z} = 1.$$

Άρα

$$f(z) = \frac{1 - \sqrt{1-4z}}{2z}.$$

Τώρα αναπτύσσουμε με το γενικευμένο διωνυμικό:

$$\sqrt{1-4z} = (1-4z)^{1/2} = \sum_{n\geq 0} \binom{1/2}{n} (-4z)^n.$$

Για $n \geq 1$,

$$\binom{1/2}{n} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!} = (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2^n\, n!}.$$

Άρα (για $n \geq 1$) ο συντελεστής του z^n στο $\sqrt{1-4z}$ είναι

$$\binom{1/2}{n}(-4)^n = (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2^n n!}\cdot(-1)^n 4^n = -\frac{2^n(2n-3)!!}{n!},$$

όπου $(2n-3)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)$. Επομένως

$$\sqrt{1-4z} = 1 - \sum_{n\geq 1} \frac{2^n(2n-3)!!}{n!}\, z^n,$$

και άρα

$$f(z) = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z} = \sum_{n\geq 1} \frac{2^{n-1}(2n-3)!!}{n!}\, z^{n-1} = \sum_{m\geq 0} \frac{2^m(2m-1)!!}{(m+1)!}\, z^m.$$

(Χρησιμοποιούμε τη σύμβαση $(-1)!! = 1$ ώστε να καλύπτεται και η περίπτωση $m = 0$.) Άρα

$$C_m = \frac{2^m(2m-1)!!}{(m+1)!}.$$

Τέλος, επειδή $(2m)! = (2m)!!\,(2m-1)!!$ και $(2m)!! = 2^m m!$, έχουμε

$$(2m-1)!! = \frac{(2m)!}{2^m m!},$$

οπότε

$$C_m = \frac{2^m}{(m+1)!}\cdot\frac{(2m)!}{2^m m!} = \frac{(2m)!}{m!(m+1)!} = \frac{1}{m+1}\binom{2m}{m}.$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Παράδειγμα 3.13 (Τριγωνοποιήσεις κυρτού πολυγώνου). Πόσες *τριγωνοποιήσεις* υπάρχουν για ένα κυρτό n-γωνο; (Με «τριγωνοποίηση» εννοούμε έναν τρόπο να χωρίσουμε το πολύγωνο σε τρίγωνα με διαγωνίους, χωρίς να προσθέτουμε νέα σημεία κορυφών.)

Για παράδειγμα, για $n = 3$ υπάρχει προφανώς 1 τριγωνοποίηση, για $n = 4$ υπάρχουν 2, για $n = 5$ υπάρχουν 5, και για $n = 6$ υπάρχουν 14. Θα δείξουμε ότι γενικά ο αριθμός των τριγωνοποιήσεων ενός κυρτού n-γώνου είναι

$$C_{n-2},$$

όπου $(C_m)_{m\geq 0}$ είναι οι αριθμοί Catalan.

Απόδειξη. Έστω T_n ο αριθμός των τριγωνοποιήσεων ενός κυρτού n-γώνου. Θέτουμε επίσης (για ευκολία) $T_2 = 1$. (Η τιμή αυτή είναι «τεχνητή», αλλά κάνει την αναδρομή να γράφεται όμορφα.)

Πάρε ένα κυρτό n-γωνο με κορυφές $v_1, v_2, \dots, v_n$ με αυτή τη σειρά. Σταθεροποιούμε την πλευρά v_1v_n. Σε κάθε τριγωνοποίηση, η πλευρά v_1v_n ανήκει σε *ακριβώς ένα* τρίγωνο· άρα υπάρχει μοναδική κορυφή v_k με $2 \le k \le n-1$ ώστε το τρίγωνο αυτό να είναι (v_1, v_k, v_n).

Η διαγώνιος v_1v_k και η διαγώνιος v_kv_n (όταν δεν είναι πλευρές) χωρίζουν το n-γωνο σε δύο κυρτά πολύγωνα:

- ένα k-γωνο με κορυφές $v_1, v_2, \dots, v_k$,
- και ένα $(n-k+1)$-γωνο με κορυφές $v_1, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n$.

Κάθε τριγωνοποίηση του αρχικού n-γώνου ισοδυναμεί με: (α) επιλογή του k, (β) τριγωνοποίηση του k-γώνου και (γ) τριγωνοποίηση του $(n-k+1)$-γώνου. Οι επιλογές (β) και (γ) είναι ανεξάρτητες, άρα για σταθερό k δίνουν $T_k\,T_{n-k+1}$ δυνατότητες.

Συνεπώς,

$$T_n = \sum_{k=2}^{n-1} T_k\,T_{n-k+1} \qquad (n \ge 3),$$

με αρχική τιμή $T_2 = 1$.

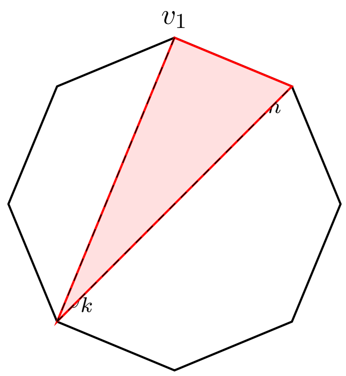
Τώρα ορίζουμε $C_m := T_{m+2}$ για $m \ge 0$. Τότε $C_0 = T_2 = 1$, και για $m \ge 0$ (δηλαδή $n = m+3$) η παραπάνω σχέση γίνεται

$$C_{m+1} = T_{m+3} = \sum_{k=2}^{m+2} T_k\,T_{m+4-k} = \sum_{i=0}^{m} C_i\,C_{m-i},$$

όπου βάλαμε $i = k-2$. Αυτή είναι ακριβώς η αναδρομή των αριθμών Catalan με $C_0 = 1$. Άρα C_m είναι ο m-οστός Catalan, και επομένως

$$T_n = C_{n-2} \qquad (n \ge 3).$$

(Ισοδύναμα, $T_n = \dfrac{1}{n-1}\binom{2n-4}{n-2}$.) $\square$



Σχήμα 4: Η πλευρά v_1v_n ανήκει σε μοναδικό τρίγωνο (v_1, v_k, v_n), που χωρίζει το n-γωνο σε δύο μικρότερα κυρτά πολύγωνα.

Πρόταση 3.14 (Αντιστοιχία διαδρομών που τέμνουν τη διαγώνιο). *Οι μονοτονικές διαδρομές πλέγματος στο $n \times n$ (δηλ. διαδρομές από $(0,0)$ στο (n,n) με βήματα Ανατολή $E = (1,0)$ και Βορρά $N = (0,1)$) που τέμνουν την ευθεία $y = x$ (δηλ. περνούν κάποια στιγμή σε σημείο με $y > x$) είναι σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία με τις μονοτονικές διαδρομές στο ορθογώνιο $(n-1) \times (n+1)$ (δηλ. από $(0,0)$ στο $(n-1, n+1)$ με τα ίδια βήματα E, N).*

Απόδειξη. Έστω P μια διαδρομή στο $n \times n$ που τέμνει τη διαγώνιο $y = x$. Θεωρούμε το *πρώτο* βήμα p του P που «περνά» τη διαγώνιο: δηλαδή το πρώτο βήμα του οποίου το τελικό σημείο ικανοποιεί $y > x$. Αναγκαστικά το p είναι ένα βήμα προς τα πάνω από σημείο της διαγωνίου (από (t, t) στο $(t, t + 1)$).

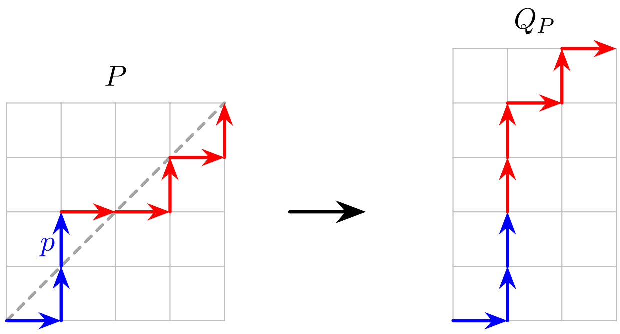
Ορίζουμε τώρα μια νέα διαδρομή Q_P ως εξής: συμφωνεί με το P μέχρι και το βήμα p, και *μετά το* p αλλάζουμε τη διεύθυνση κάθε επόμενου βήματος: κάθε E το αντικαθιστούμε με N και κάθε N το αντικαθιστούμε με E.

Θα δείξουμε ότι τότε Q_P καταλήγει στο $(n-1, n+1)$. Πράγματι, στο αρχικό ("μπλε") τμήμα του P μέχρι και το p έχουμε *ακριβώς ένα* βήμα N περισσότερο από E, διότι το τμήμα αυτό τελειώνει για πρώτη φορά σε σημείο με $y = x + 1$. Αφού συνολικά στο P υπάρχουν ακριβώς n βήματα N και n βήματα E, στο υπόλοιπο ("κόκκινο") τμήμα του P υπάρχει *ακριβώς ένα* βήμα E περισσότερο από N. Μετά την ανταλλαγή $E \leftrightarrow N$ στο κόκκινο τμήμα, το κόκκινο τμήμα του Q_P έχει *ένα* βήμα N περισσότερο από E. Άρα και τα δύο τμήματα (μπλε και κόκκινο) του Q_P έχουν «$N = E + 1$», οπότε συνολικά

$$\#N(Q_P) = \#E(Q_P) + 2.$$

Επειδή το μήκος της διαδρομής παραμένει $2n$, παίρνουμε $\#E(Q_P) = n-1$ και $\#N(Q_P) = n+1$, δηλαδή Q_P είναι διαδρομή στο $(n-1) \times (n+1)$.

Για το αντίστροφο, ξεκινάμε από μια διαδρομή Q στο $(n-1) \times (n+1)$. Εφόσον τελειώνει στο $(n-1, n+1)$, έχουμε $\#N(Q) = \#E(Q) + 2$, άρα *οπωσδήποτε* κάποια στιγμή περνά πάνω από τη διαγώνιο $y = x$. Θέτουμε p το πρώτο βήμα του Q που καταλήγει σε σημείο με $y > x$ και κάνουμε *την ίδια* ανταλλαγή $E \leftrightarrow N$ μετά το p. Με ακριβώς τον ίδιο υπολογισμό προκύπτει ότι η νέα διαδρομή έχει $\#E = \#N = n$, άρα είναι διαδρομή στο $n \times n$ και τέμνει τη διαγώνιο. Οι δύο κατασκευές είναι αντίστροφες μεταξύ τους, άρα έχουμε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία. □



Παράδειγμα 3.15. Για $n \geq 0$ ορίζουμε C_n ως το πλήθος των διαδρομών από $(0, 0)$ στο (n, n) με βήματα $E = (1, 0)$ και $N = (0, 1)$, που δεν περνούν *κάτω* από τη διαγώνιο $y = x$ (δηλαδή σε κάθε σημείο της διαδρομής ισχύει $y \geq x$).

Να αποδείξετε ότι

$$C_0 = 1 \qquad \text{και} \qquad C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k\, C_{n-k} \quad (n \geq 0).$$

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε $n \geq 0$ και παίρνουμε μια «καλή» διαδρομή P από $(0, 0)$ στο $(n + 1, n + 1)$, πάντα με $y \geq x$.

Βήμα 1: Πρώτη επιστροφή στη διαγώνιο. Η διαδρομή ξεκινά από σημείο της διαγωνίου. Εφόσον δεν επιτρέπεται να περάσει κάτω από $y = x$, το πρώτο βήμα δεν μπορεί να είναι E (θα πήγαινε στο $(1, 0)$ με $y < x$), άρα είναι N. Ομοίως, όταν η διαδρομή ξαναβρεθεί πάνω στη διαγώνιο, αυτό συμβαίνει σε κάποιο (k, k) με $1 \leq k \leq n + 1$. Ορίζουμε το k ως το *ελάχιστο* τέτοιο, δηλαδή το πρώτο σημείο (μετά το $(0, 0)$) όπου η P ξαναπατάει τη διαγώνιο $y = x$.

Τότε η P διασπάται μοναδικά ως

$$P = P_1 \cdot P_2,$$

όπου P_1 είναι το αρχικό τμήμα από $(0,0)$ στο (k,k) και P_2 το υπόλοιπο από (k,k) στο $(n+1, n+1)$. Από την ελαχιστικότητα του k προκύπτει ότι το P_1 *δεν* ακουμπά τη διαγώνιο σε κανένα ενδιάμεσο σημείο: δηλαδή για όλα τα ενδιάμεσα σημεία του P_1 ισχύει αυστηρά $y > x$.

Βήμα 2: Πόσες επιλογές έχει το P_1 για δεδομένο k; Έστω λοιπόν ότι έχουμε διαδρομή P_1 από $(0,0)$ στο (k,k) με $y \geq x$ και που αγγίζει τη διαγώνιο μόνο στην αρχή και στο τέλος. Τότε: - το πρώτο βήμα του P_1 είναι αναγκαστικά N, - το τελευταίο βήμα του P_1 είναι αναγκαστικά E (αλλιώς θα ερχόταν στο (k,k) από $(k,k-1)$, που είναι κάτω από τη διαγώνιο).

Ορίζουμε απεικόνιση

$$\Phi : \{\text{τέτοιες } P_1\} \to \{\text{καλές διαδρομές από } (0,0) \text{ στο } (k-1,k-1)\}$$

ως εξής: αφαιρούμε από το P_1 το πρώτο βήμα N και το τελευταίο βήμα E, και έπειτα μετατοπίζουμε όλο το υπόλοιπο τμήμα κατά $(0,-1)$ (δηλαδή κατεβάζουμε όλα τα σημεία κατά 1 στο y). Το αποτέλεσμα είναι διαδρομή με $k-1$ βήματα N και $k-1$ βήματα E, που ξεκινά από $(0,0)$ και τελειώνει στο $(k-1,k-1)$. Επιπλέον, επειδή στο ενδιάμεσο του P_1 ίσχυε $y > x$, μετά την κατακόρυφη μετατόπιση κατά -1 παίρνουμε $y \geq x$. Άρα $\Phi(P_1)$ είναι «καλή» διαδρομή μεγέθους $k-1$.

Αντίστροφα, από οποιαδήποτε καλή διαδρομή Q από $(0,0)$ στο $(k-1,k-1)$, παίρνουμε μία τέτοια P_1 ως εξής: μετατοπίζουμε το Q κατά $(0,+1)$ (το ανεβάζουμε κατά 1), προσθέτουμε στην αρχή ένα N και στο τέλος ένα E. Τότε στο ενδιάμεσο έχουμε $y > x$, άρα η νέα διαδρομή ακουμπά τη διαγώνιο μόνο στα άκρα και καταλήγει στο (k,k). Έτσι η Φ είναι αμφιμονοσήμαντη και συνεπώς

$$\#\{P_1 \text{ από } (0,0) \text{ στο } (k,k) \text{ με πρώτη επιστροφή στο } (k,k)\} = C_{k-1}.$$

Βήμα 3: Πόσες επιλογές έχει το P_2; Για δεδομένο k, το P_2 είναι απλώς *οποιαδήποτε* καλή διαδρομή από (k,k) στο $(n+1,n+1)$. Με μετατόπιση κατά $(-k,-k)$ αυτό ισοδυναμεί με καλή διαδρομή από $(0,0)$ στο $(n+1-k, n+1-k)$, άρα υπάρχουν C_{n+1-k} επιλογές.

Βήμα 4: Άθροιση ως προς k. Για κάθε $k \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$ οι επιλογές για P_1 και P_2 είναι ανεξάρτητες, άρα για αυτό το k υπάρχουν $C_{k-1}\, C_{n+1-k}$ διαδρομές. Επειδή το k (η πρώτη επιστροφή στη διαγώνιο) είναι μοναδικό, οι κλάσεις για διαφορετικά k είναι ξένες και παίρνουμε

$$C_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} C_{k-1}\, C_{n+1-k}.$$

Θέτοντας $j = k-1$ (οπότε $j = 0, 1, \ldots, n$) καταλήγουμε

$$C_{n+1} = \sum_{j=0}^{n} C_j\, C_{n-j},$$

όπως ζητήθηκε. Η αρχική τιμή $C_0 = 1$ αντιστοιχεί στη μοναδική «κενή» διαδρομή από $(0,0)$ στο $(0,0)$. $\square$

Παράδειγμα 3.16 (Διαμερισμοί γραμμής και επιλογή υπομονάδων). Όλοι οι n στρατιώτες μιας διμοιρίας στέκονται σε μια γραμμή. Ο αξιωματικός χωρίζει τη γραμμή σε μερικά σημεία, σχηματίζοντας μικρότερες (μη κενές) διαδοχικές ομάδες. Έπειτα επιλέγει ένα (ενδεχομένως κενό) υποσύνολο από τις ομάδες που σχηματίστηκαν, για να φύγουν από υπηρεσία. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να το κάνει αυτό;

Απόδειξη. Αν η γραμμή χωριστεί σε k (μη κενές) διαδοχικές ομάδες, τότε οι αριθμοί των μελών τους δίνουν μια *διάταξη* θετικών ακεραίων

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k, \qquad n_i \geq 1,$$

δηλαδή μια σύνθεση του n σε k μέρη. Αφού σχηματιστούν οι k ομάδες, ο αξιωματικός διαλέγει ένα υποσύνολο τους για να φύγουν, άρα για κάθε ομάδα υπάρχουν 2 επιλογές (φεύγει / δεν φεύγει), ανεξάρτητα από τις άλλες.

Άρα, ισοδύναμα, μετράμε *ακολουθίες* από «χρωματισμένα» μέρη: κάθε μέρος έχει μέγεθος $m \geq 1$ και επιπλέον μια από 2 καταστάσεις (επιλεγμένο ή όχι). Η γεννήτρια συνάρτηση για *μία* ομάδα είναι

$$2(x + x^2 + x^3 + \cdots) = \frac{2x}{1-x},$$

επειδή για κάθε μέγεθος $m \geq 1$ υπάρχουν 2 επιλογές κατάστασης.

Για k ομάδες, η γεννήτρια είναι $\left(\frac{2x}{1-x}\right)^k$. Επειδή k μπορεί να είναι οποιοσδήποτε ακέραιος ≥ 1, η συνολική γεννήτρια είναι

$$F(x) = \sum_{k\geq 1} \left(\frac{2x}{1-x}\right)^k = \frac{\frac{2x}{1-x}}{1 - \frac{2x}{1-x}} = \frac{2x}{1-3x}.$$

Άρα ο ζητούμενος αριθμός είναι ο συντελεστής του x^n στο $F(x)$. Εφόσον

$$\frac{2x}{1-3x} = 2x \sum_{t\geq 0} (3x)^t = \sum_{t\geq 0} 2 \cdot 3^t \, x^{t+1},$$

παίρνουμε

$$[x^n] \, F(x) = 2 \cdot 3^{n-1}.$$

Επομένως, οι τρόποι είναι $2 \cdot 3^{n-1}$. □

Άσκηση 18. *Είναι δυνατόν να χωρίσουμε το σύνολο όλων των 12-ψηφίων αριθμών (επιτρέπονται αρχικά μηδενικά) σε ομάδες των 4 αριθμών, έτσι ώστε, σε κάθε ομάδα, οι τέσσερις αριθμοί να έχουν τα ίδια ψηφία στις 11 θέσεις και στην εναπομείνασα θέση να εμφανίζονται τέσσερα διαδοχικά ψηφία (με κάποια σειρά);*

Απόδειξη. Η απάντηση είναι αρνητική. Υποθέτουμε προς άτοπο ότι υπάρχει τέτοια διαμέριση.

Έστω A το σύνολο όλων των 12-ψηφίων ακολουθιών ψηφίων (δηλ. αριθμών με επιτρεπτά αρχικά μηδενικά). Για $a \in A$ συμβολίζουμε με $s(a)$ το άθροισμα των ψηφίων του a. Θεωρούμε το πολυώνυμο

$$f(X) = \sum_{a\in A} X^{s(a)}.$$

Έστω ότι η διαμέριση αποτελείται από ομάδες $G_1, \ldots, G_k$, καθεμία με 4 στοιχεία. Πάρε μια ομάδα G_i. Από την υπόθεση, οι τέσσερις αριθμοί συμφωνούν σε 11 θέσεις, ενώ σε μία θέση τα ψηφία είναι $d, d+1, d+2, d+3$ (για κάποιο $d \in \{0, 1, \ldots, 6\}$). Άρα, οι τιμές του $s(a)$ για $a \in G_i$ διαφέρουν κατά $0, 1, 2, 3$ (αφού μόνο ένα ψηφίο αλλάζει και αλλάζει κατά $0, 1, 2, 3$). Επομένως, υπάρχει ακέραιος t_i ώστε

$$\sum_{a\in G_i} X^{s(a)} = X^{t_i} \, (1 + X + X^2 + X^3),$$

δηλαδή $\sum_{a\in G_i} X^{s(a)}$ είναι πολλαπλάσιο του $1 + X + X^2 + X^3$.

Αθροίζοντας σε όλες τις ομάδες, παίρνουμε

$$f(X) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{a \in G_i} X^{s(a)},$$

άρα το $f(X)$ είναι επίσης πολλαπλάσιο του $1 + X + X^2 + X^3$.

Όμως μπορούμε να υπολογίσουμε το $f(X)$ κλειστά. Κάθε μία από τις 12 θέσεις μπορεί να πάρει ψηφίο $0, 1, \ldots, 9$, οπότε για κάθε θέση η συνεισφορά στη γεννήτρια είναι $(1+X+\cdots+X^9)$, και άρα

$$f(X) = (1 + X + \cdots + X^9)^{12} = \left(\frac{X^{10} - 1}{X - 1}\right)^{12}.$$

Το πολυώνυμο $1 + X + X^2 + X^3$ έχει ρίζα τον μιγαδικό i (και τον $-i$). Αλλά

$$f(i) = (1 + i + i^2 + \cdots + i^9)^{12},$$

και επειδή $1 + i + i^2 + i^3 = 0$ έχουμε

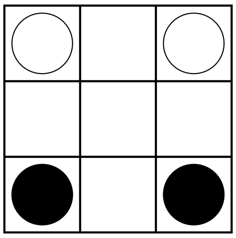
$$1+i+i^2+\cdots+i^9 = (1+i+i^2+i^3)+(i^4+i^5+i^6+i^7)+(i^8+i^9) = 0+0+(1+i) = 1+i \neq 0.$$

Άρα $f(i) = (1 + i)^{12} \neq 0$, οπότε το $1 + X + X^2 + X^3$ *δεν* διαιρεί το $f(X)$. Αυτό αντιφάσκει με το συμπέρασμα ότι $f(X)$ είναι πολλαπλάσιο του $1 + X + X^2 + X^3$.

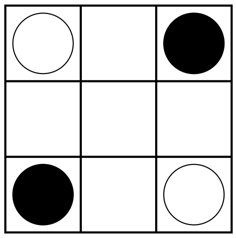
Η αντίφαση δείχνει ότι τέτοια διαμέριση δεν υπάρχει. $\square$

4 Γραφήματα

Παράδειγμα 4.1 (Ίπποι σε πίνακα 3×3). Σε έναν πίνακα 3×3 βρίσκονται τέσσερις ίπποι, όπως στο Σχήμα 5. Μπορούν, με τις συνηθισμένες κινήσεις του ίππου στο σκάκι, να μεταφερθούν στη θέση του Σχήματος 6;



Σχήμα 5: Αρχική θέση



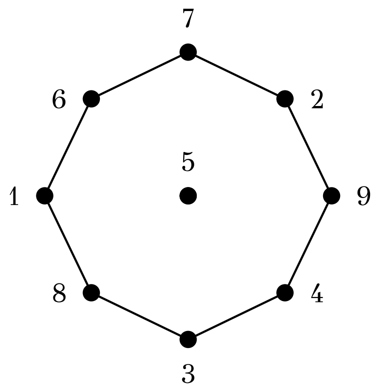
Σχήμα 6: Τελική θέση

Απόδειξη. Η απάντηση είναι αρνητική.

Αριθμούμε πρώτα τα τετράγωνα του πίνακα όπως στο Σχήμα 7. Έπειτα κατασκευάζουμε έναν γράφο ως εξής: κάθε τετράγωνο αντιστοιχεί σε μία κορυφή, και δύο κορυφές ενώνονται με ακμή αν ο ίππος μπορεί να μετακινηθεί από το ένα αντίστοιχο τετράγωνο στο άλλο με μία κίνηση. Ο γράφος που προκύπτει φαίνεται στο Σχήμα 8.

1	4	7
2	5	8
3	6	9

Σχήμα 7: Αρίθμηση των τετραγώνων



Σχήμα 8: Ο γράφος των επιτρεπτών κινήσεων

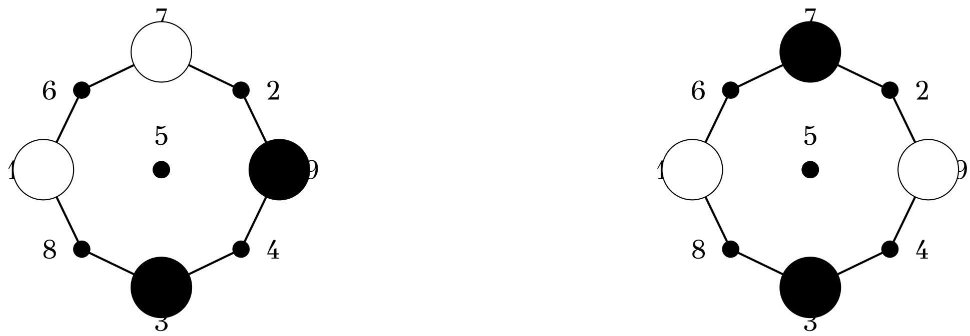
Παρατηρούμε ότι η κορυφή 5 είναι απομονωμένη, ενώ οι υπόλοιπες οκτώ κορυφές σχηματίζουν έναν κύκλο μήκους 8. Άρα κάθε ίππος κινείται μόνο πάνω σε αυτόν τον κύκλο.

Αν τοποθετήσουμε πάνω στον κύκλο τις αρχικές και τις τελικές θέσεις των τεσσάρων ίππων, παίρνουμε τα δύο διαγράμματα του Σχήματος 9. Στην αρχική θέση, αν διαβάσουμε τις κατειλημμένες κορυφές γύρω από τον κύκλο, η κυκλική σειρά είναι

λευκός, λευκός, μαύρος, μαύρος.

Στην τελική θέση η κυκλική σειρά είναι

λευκός, μαύρος, λευκός, μαύρος.



Αρχική διάταξη πάνω στον κύκλο   Τελική διάταξη πάνω στον κύκλο

Σχήμα 9: Οι ίπποι ως θέσεις πάνω στον κύκλο

Όμως μία νόμιμη κίνηση μεταφέρει έναν ίππο σε γειτονική *κενή* κορυφή του κύκλου. Άρα κανένας ίππος δεν μπορεί να «περάσει» πάνω από άλλον, και επομένως η κυκλική σειρά των τεσσάρων ίππων παραμένει αναλλοίωτη σε κάθε ακολουθία κινήσεων.

Εφόσον η αρχική και η τελική διάταξη έχουν διαφορετική κυκλική σειρά, η μετάβαση από το Σχήμα 5 στο Σχήμα 6 είναι αδύνατη. □

Παραπάνω μετατρέψαμε το πρόβλημα σε μια διάταξη με κορυφές και ακμές, στην οποία το μόνο που μας ενδιαφέρει είναι η σύνδεση των κορυφών με ακμές. Αυτή είναι η έννοια του γραφήματος, του οποίου δίνουμε τον αυστηρό ορισμό.

Ορισμός 4.2. Γράφημα ή Γράφος λέγεται μια τριάδα $G = (V, E, \varphi)$, όπου V και E είναι σύνολα, τα στοιχεία των οποίων λέγονται *κορυφές* και *ακμές* του G, αντιστοίχως, και

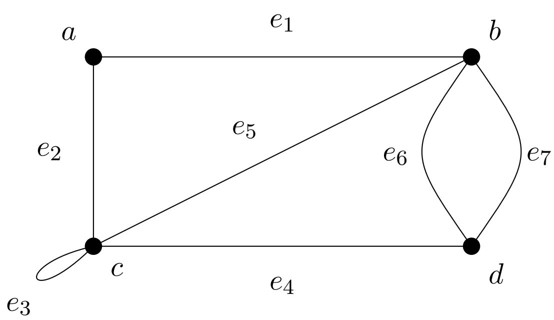
$$\varphi : E \to \big\{\{a, b\} : a, b \in V\big\}$$

είναι απεικόνιση από το E στο σύνολο των υποσυνόλων του V με ένα ή δύο στοιχεία. Αν $e \in E$ και $\varphi(e) = \{a, b\}$, τότε οι κορυφές a, b λέγονται *άκρα* της ακμής e.

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε μόνο πεπερασμένα γραφήματα, δηλαδή γραφήματα με πεπερασμένα σύνολα κορυφών και ακμών. Στο Σχήμα 10 απεικονίζεται ένα γράφημα $G = (V, E, \varphi)$ με σύνολο κορυφών $V = \{a, b, c, d\}$ και επτά ακμές, για το οποίο ισχύουν

$$\varphi(e_1) = \{a, b\}, \qquad \varphi(e_2) = \{a, c\}, \qquad \varphi(e_3) = \{c\},$$

και ούτω καθεξής.



Σχήμα 10: Ένα γράφημα με τέσσερις κορυφές.

Θα χρησιμοποιήσουμε την ακόλουθη ορολογία για ένα γράφημα $G = (V, E, \varphi)$.

Λέμε ότι δύο κορυφές $a, b \in V$ είναι *γειτονικές*, και ότι *συνδέονται με ακμή*, στο G, αν υπάρχει $e \in E$ με $\varphi(e) = \{a, b\}$.

Μια ακμή $e \in E$ με άκρα a και b λέγεται *θηλιά* (*ή βρόχος*) αν $a = b$.

Δύο ακμές $e_1, e_2 \in E$ λέγονται *παράλληλες* αν

$$\varphi(e_1) = \varphi(e_2) = \{a, b\}$$

για διακεκριμένες κορυφές a, b.

Το γράφημα G λέγεται *απλό* αν δεν έχει θηλιές ή παράλληλες ακμές. Στην περίπτωση αυτή ταυτίζουμε μια ακμή $e \in E$ με το σύνολο $\{a, b\}$ των δύο άκρων της a, b.

Το πλήθος των ακμών του G που δεν είναι θηλιές και έχουν ένα από τα δύο άκρα τους ίσο με v λέγεται *βαθμός* της κορυφής v και συμβολίζεται με $\deg(v)$.

Η κορυφή v λέγεται *απομονωμένη* αν $\deg(v) = 0$, και *άρτια ή περιττή* αν ο βαθμός της v είναι άρτιος ή περιττός ακέραιος, αντιστοίχως.

Στο γράφημα του Σχήματος 10 η ακμή e_3 είναι θηλιά, οι e_6, e_7 είναι παράλληλες και οι κορυφές a, b, c, d έχουν βαθμούς $2, 4, 3, 3$, αντιστοίχως.

Θα μπορούσαμε να σχεδιάσουμε αλλιώς το γράφημα από το αρχικό παράδειγμα με την τοποθέτηση των ίππων; Η απάντηση είναι ναι, γιατί το μόνο που μας ενδιαφέρει είναι τα ονόματα που έχουν έχουν οι κορυφές και ποιες συνδέονται μεταξύ τους.

Ορισμός 4.3. Δύο γραφήματα

$$G_1 = (V_1, E_1, \varphi_1) \qquad \text{και} \qquad G_2 = (V_2, E_2, \varphi_2)$$

λέγονται *ισόμορφα* αν υπάρχουν αμφιμονοσήμαντες απεικονίσεις

$$f : V_1 \to V_2 \qquad \text{και} \qquad g : E_1 \to E_2,$$

τέτοιες ώστε για όλα τα $a, b \in V_1$ και $e \in E_1$ να ισχύει

$$\varphi_1(e) = \{a, b\} \iff \varphi_2\big(g(e)\big) = \{f(a), f(b)\}.$$

Ειδικότερα, δύο απλά γραφήματα

$$G_1 = (V_1, E_1) \qquad \text{και} \qquad G_2 = (V_2, E_2)$$

είναι ισόμορφα αν υπάρχει αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση

$$f : V_1 \to V_2,$$

τέτοια ώστε για όλα τα $a, b \in V_1$ να ισχύει

$$\{a, b\} \in E_1 \iff \{f(a), f(b)\} \in E_2.$$

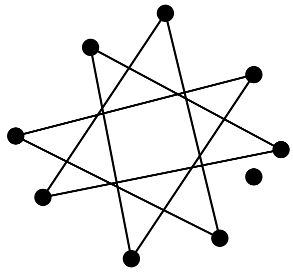
Μια τέτοια απεικόνιση f λέγεται *ισομορφισμός γραφημάτων*.

Αφήνεται στον αναγνώστη να βεβαιωθεί ότι η σχέση του ισομορφισμού είναι σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των γραφημάτων. Οι κλάσεις ισοδυναμίας της σχέσης αυτής λέγονται *κλάσεις ισομορφισμού γραφημάτων*.

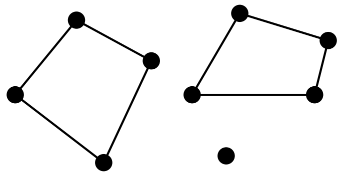
Ορισμός 4.4 (Υπογράφος). Ένας γράφος $G = (V, E)$ *περιέχει* έναν γράφο $G' = (V', E')$, ή ισοδύναμα ο G' είναι *υπογράφος* του G, αν

$$V' \subseteq V \qquad \text{και} \qquad E' \subseteq E.$$

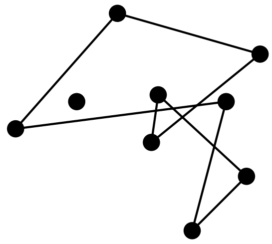
Παράδειγμα 4.5 (Ισομορφικοί γράφοι). Να βρεθεί ποιοι από τους γράφους των Σχημάτων 11, 12 και 13 είναι ισόμορφοι με τον γράφο του Σχήματος 8.



Σχήμα 11: Πρώτος υποψήφιος γράφος



Σχήμα 12: Δεύτερος υποψήφιος γράφος



Σχήμα 13: Τρίτος υποψήφιος γράφος

Απόδειξη. Ο γράφος του Σχήματος 8 αποτελείται από μία απομονωμένη κορυφή και από έναν κύκλο μήκους 8.

Το ίδιο ακριβώς ισχύει για τους γράφους των Σχημάτων 11 και 13. Άρα οι γράφοι αυτοί είναι ισομορφικοί με τον γράφο του Σχήματος 8.

Αντίθετα, ο γράφος του Σχήματος 12 αποτελείται από μία απομονωμένη κορυφή και από *δύο* ξένους κύκλους μήκους 4. Επομένως δεν μπορεί να είναι ισομορφικός με έναν γράφο που έχει μία μόνο μη τετριμμένη συνιστώσα, και μάλιστα κύκλο μήκους 8.

Συνεπώς, οι ισομορφικοί με το Σχήμα 8 είναι ο πρώτος και ο τρίτος γράφος. □

Παράδειγμα 4.6. Στο Smallville υπάρχουν 15 τηλέφωνα. Μπορούν να συνδεθούν με καλώδια έτσι ώστε κάθε τηλέφωνο να συνδέεται με ακριβώς 5 άλλα;

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι αυτό είναι δυνατό.

Θεωρούμε τον γράφο του οποίου οι κορυφές παριστάνουν τα τηλέφωνα και οι ακμές παριστάνουν τα καλώδια. Ο γράφος αυτός έχει 15 κορυφές και καθεμία έχει βαθμό 5.

Προσθέτουμε τους βαθμούς όλων των κορυφών. Το άθροισμα είναι $15 \cdot 5$. Όμως κάθε ακμή μετριέται δύο φορές σε αυτό το άθροισμα, αφού έχει δύο άκρα. Άρα ο αριθμός των ακμών πρέπει να είναι

$$\frac{15 \cdot 5}{2}.$$

Αλλά αυτός ο αριθμός δεν είναι ακέραιος. Άρα ένας τέτοιος γράφος δεν μπορεί να υπάρχει. □

Παρατήρηση 4.7. Λύνοντας αυτό το πρόβλημα, δείξαμε πώς μπορούμε να μετράμε τις ακμές ενός γράφου όταν γνωρίζουμε τους βαθμούς όλων των κορυφών: προσθέτουμε τους βαθμούς όλων των κορυφών και διαιρούμε διά 2.

Παράδειγμα 4.8 (Δρόμοι σε ένα βασίλειο)**.** Σε ένα βασίλειο υπάρχουν 100 πόλεις και από κάθε πόλη ξεκινούν 4 δρόμοι. Πόσοι δρόμοι υπάρχουν συνολικά στο βασίλειο;

Απόδειξη. Θεωρούμε τον αντίστοιχο γράφο. Έχει 100 κορυφές, καθεμία από τις οποίες έχει βαθμό 4. Άρα το άθροισμα των βαθμών είναι

$$100 \cdot 4 = 400.$$

Εφόσον κάθε ακμή μετριέται δύο φορές, ο συνολικός αριθμός δρόμων είναι

$$\frac{400}{2} = 200.$$

□

Ορισμός 4.9 (Άρτια και περιττή κορυφή)**.** Μια κορυφή λέγεται *άρτια* αν έχει άρτιο βαθμό, και *περιττή* αν έχει περιττό βαθμό.

Θεώρημα 4.10. *Το πλήθος των περιττών κορυφών οποιουδήποτε γράφου είναι άρτιος αριθμός.*

Απόδειξη. Το άθροισμα των βαθμών όλων των κορυφών ενός γράφου είναι ίσο με το διπλάσιο του αριθμού των ακμών, άρα είναι άρτιος αριθμός.

Από την άλλη, ένα άθροισμα ακεραίων είναι άρτιο αν και μόνο αν ο αριθμός των περιττών προσθετέων είναι άρτιος. Επομένως ο αριθμός των περιττών βαθμών, δηλαδή των περιττών κορυφών, είναι άρτιος. □

Ορισμός 4.11 (Συνεκτικός γράφος). Ένας γράφος λέγεται *συνεκτικός* αν οποιεσδήποτε δύο κορυφές του μπορούν να ενωθούν με μια διαδρομή.

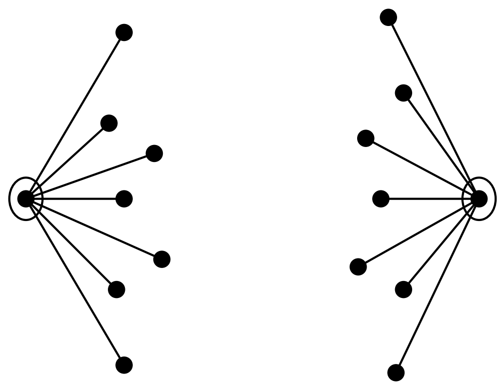
Ορισμός 4.12 (Συνεκτική συνιστώσα). Οι μέγιστοι συνεκτικοί υπογράφοι ενός γράφου λέγονται *συνεκτικές συνιστώσες*. Ισοδύναμα, είναι τα «κομμάτια» στα οποία διασπάται ένας γράφος, έτσι ώστε μέσα σε κάθε κομμάτι κάθε δύο κορυφές να συνδέονται με διαδρομή.

Παράδειγμα 4.13 (Η χώρα του Επτά). Στη χώρα του Επτά υπάρχουν 15 πόλεις, καθεμία από τις οποίες είναι συνδεδεμένη με τουλάχιστον 7 άλλες. Να αποδείξετε ότι μπορεί κανείς να ταξιδέψει από οποιαδήποτε πόλη σε οποιαδήποτε άλλη, ίσως περνώντας από ενδιάμεσες πόλεις.

Απόδειξη. Θεωρούμε δύο οποιεσδήποτε πόλεις και υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει διαδρομή που να τις συνδέει.

Τότε καθεμία από τις δύο πόλεις είναι συνδεδεμένη με τουλάχιστον 7 άλλες πόλεις. Αυτές οι 14 πόλεις πρέπει να είναι όλες διαφορετικές. Πράγματι, αν δύο από αυτές συνέπιπταν, τότε θα υπήρχε διαδρομή που θα ένωνε τις δύο αρχικές πόλεις μέσω αυτής της κοινής πόλης, όπως φαίνεται σχηματικά στο Σχήμα 14.

Άρα έχουμε τουλάχιστον 16 διαφορετικές πόλεις, πράγμα αδύνατο. Η αντίφαση δείχνει ότι κάθε δύο πόλεις μπορούν πράγματι να ενωθούν με κάποια διαδρομή. □



Σχήμα 14: Σχηματική απεικόνιση του επιχειρήματος

Παράδειγμα 4.14 (Ελάχιστος βαθμός και συνεκτικότητα). Να αποδείξετε ότι ένας γράφος με n κορυφές, καθεμία από τις οποίες έχει βαθμό τουλάχιστον $(n-1)/2$, είναι συνεκτικός.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι ο γράφος δεν είναι συνεκτικός. Τότε αποτελείται από τουλάχιστον δύο συνεκτικές συνιστώσες. Έστω ότι μία από αυτές έχει τον μικρότερο αριθμό κορυφών, έστω k. Τότε αναγκαστικά

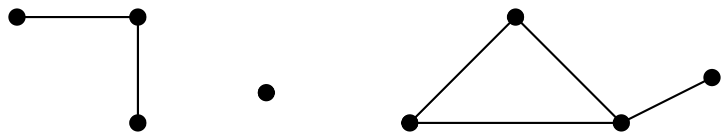
$$k \leq \frac{n}{2}.$$

Κάθε κορυφή αυτής της συνιστώσας μπορεί να συνδέεται μόνο με κορυφές της ίδιας συνιστώσας, άρα ο βαθμός της είναι το πολύ

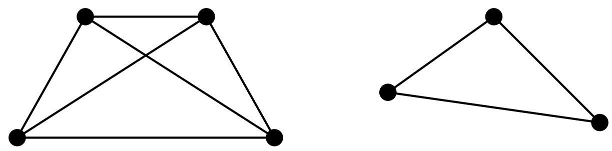
$$k - 1 \leq \frac{n}{2} - 1 < \frac{n-1}{2}.$$

Αυτό αντιφάσκει με την υπόθεση. Άρα ο γράφος είναι συνεκτικός. □

Παρατήρηση 4.15. Ο γράφος του Σχήματος 15 αποτελείται από τρεις συνεκτικές συνιστώσες, ενώ ο γράφος του Σχήματος 16 αποτελείται από δύο.



Σχήμα 15: Ένας γράφος με τρεις συνεκτικές συνιστώσες



Σχήμα 16: Ένας γράφος με δύο συνεκτικές συνιστώσες

Παράδειγμα 4.16 (Μαγικά χαλιά στη Χώρα του Ποτέ)**.** Στη Χώρα του Ποτέ υπάρχει μόνο ένα μέσο μεταφοράς: το μαγικό χαλί. Είκοσι μία γραμμές χαλιών εξυπηρετούν την πρωτεύουσα. Μία και μόνη γραμμή πετά προς τη Farville, και κάθε άλλη πόλη εξυπηρετείται από ακριβώς 20 γραμμές χαλιών. Να δείξετε ότι είναι δυνατό να ταξιδέψει κανείς με μαγικό χαλί από την πρωτεύουσα στη Farville, ίσως αλλάζοντας από μία γραμμή χαλιών σε μία άλλη.

Απόδειξη. Θεωρούμε τη συνεκτική συνιστώσα του γράφου των γραμμών χαλιών που περιέχει την πρωτεύουσα. Πρέπει να δείξουμε ότι αυτή η συνιστώσα περιέχει και τη Farville.

Υποθέτουμε το αντίθετο. Τότε, μέσα σε αυτή τη συνιστώσα, υπάρχει μία κορυφή βαθμού 21, δηλαδή η πρωτεύουσα, ενώ κάθε άλλη κορυφή της έχει βαθμό 20. Άρα η συνιστώσα αυτή έχει ακριβώς μία περιττή κορυφή.

Αυτό όμως είναι αδύνατο, αφού σε κάθε γράφο ο αριθμός των περιττών κορυφών είναι άρτιος. Η αντίφαση δείχνει ότι η Farville ανήκει στην ίδια συνεκτική συνιστώσα με την πρωτεύουσα. Επομένως μπορεί κανείς να ταξιδέψει από την πρωτεύουσα στη Farville. □