

Διακριτά Μαθηματικά
2^ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Πρόβλημα 1 Τοποθετούμε σε μία σειρά 3 μπλε πιάτα, 3 κόκκινα πιάτα και 2 πράσινα πιάτα. Πιάτα του ίδιου χρώματος θεωρούνται όμοια.

- (α) Πόσες διαφορετικές διατάξεις υπάρχουν;
- (β) Πόσες από τις διατάξεις έχουν κόκκινο πιάτο και στα δύο άκρα της σειράς;
- (γ) Πόσες από τις διατάξεις έχουν όλα τα μπλε πιάτα διαδοχικά (δίπλα-δίπλα);
- (δ) Πόσες από τις διατάξεις δεν έχουν δύο μπλε πιάτα δίπλα-δίπλα;

Πρόβλημα 2 Να βρεθεί το πλήθος όλων των αναγραμματισμών της λέξης PARABOLA με την προϋπόθεση ότι σύμφωνα και φωνήεντα εναλλάσσονται.

Πρόβλημα 3 30 άτομα ψηφίζουν ανάμεσα σε 5 προτάσεις, με κάθε άτομο να ψηφίζει ακριβώς μία πρόταση. Με πόσους τρόπους μπορεί να κατανεμηθεί το πλήθος των (μυστικών) ψήφων στις 5 προτάσεις; (Δύο αποτελέσματα θεωρούνται διαφορετικά αν κάποια πρόταση πάρει διαφορετικό πλήθος ψήφων.)

Πρόβλημα 4 Να βρεθεί το πλήθος των διατεταγμένων τριάδων (a, b, c) ακεραίων που ικανοποιούν

$$0 \leq a \leq b \leq c \leq 11.$$

Πρόβλημα 5 Να βρεθεί το πλήθος των υποσυνόλων $S \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ που δεν περιέχουν δύο διαδοχικά στοιχεία.

Πρόβλημα 6 Να βρεθεί το πλήθος των συμβολοσειρών μήκους n από τα ψηφία $\{0, 1, 2\}$, οι οποίες δεν περιέχουν κανένα από τα υποσύνολα-συμβολοσειρές

$$100, \quad 101, \quad 200, \quad 201.$$

Πρόβλημα 7 Έστω k θετικός ακέραιος. Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε ένα υποσύνολο τριών διαφορετικών αριθμών από το $\{1, 2, \dots, 3k\}$ έτσι ώστε το άθροισμά τους να διαιρείται με 3;

Πρόβλημα 8 Πόσοι n -ψήφιοι αριθμοί έχουν τα ψηφία τους σε μη φθίνουσα σειρά (δηλαδή $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$)¹;

Πρόβλημα 9 Δέκα σημεία είναι σημειωμένα πάνω σε έναν κύκλο. Πόσα διαφορετικά κυρτά πολύγωνα με τουλάχιστον 3 πλευρές μπορούμε να σχηματίσουμε χρησιμοποιώντας μερικά (ή όλα) από τα δέκα σημεία ως κορυφές;

Πρόβλημα 10 Να βρεθεί το πλήθος των συναρτήσεων

$$f : \{1, 2, \dots, 2014\} \rightarrow \{2015, 2016, 2017, 2018\}$$

που ικανοποιούν ότι το άθροισμα $f(1) + f(2) + \dots + f(2014)$ είναι άρτιος αριθμός.

Πρόβλημα 11 Ένα κουπέ τρένου έχει δύο αντικριστές σειρές από 5 θέσεις η καθεμιά (σύνολο 10 θέσεις). Σε κάθε σειρά υπάρχει ακριβώς μία θέση δίπλα στο παράθυρο (στην άκρη της σειράς).

Ταξιδεύουν 9 επιβάτες. Οι 3 από αυτούς θέλουν οπωσδήποτε να κάθονται προς τη μεριά της μηχανής (δηλ. στη σειρά που «κοιτάει» προς τη μηχανή). Οι υπόλοιποι 6 δεν ενδιαφέρονται για την κατεύθυνση: ανάμεσά τους είναι ένα μικρό αγόρι και η μητέρα του. Το αγόρι θέλει να κάθεται δίπλα στο παράθυρο και ακριβώς δίπλα στη μητέρα του (στην ίδια σειρά).

Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν οι επιβάτες ώστε όλοι να είναι ικανοποιημένοι;

Πρόβλημα 12 Με πόσους τρόπους μπορούν να κατανεμηθούν 4 όμοιες μπλε και 6 όμοιες άσπρες μπάλες σε 10 αριθμημένα κουτιά, αν:

- (a) επιτρέπεται κάποια κουτιά να μείνουν άδεια,
- (b) κάθε κουτί πρέπει να πάρει τουλάχιστον μία μπάλα,
- (c) ακριβώς 2 κουτιά πρέπει να μείνουν άδεια;

Παραδίδετε 5 Προβλήματα έως 03-03-2026.

¹π.χ. 122379999 έχει αυτή την ιδιότητα, ενώ 12330 και 13572468 όχι.

- 1 (α) Έχουμε συνολικά 8 θέσεις και τοποθετούμε 3 ίδιες κόκκινες, 3 ίδιες μπλε και 2 ίδιες πράσινες. Άρα το πλήθος των διαφορετικών διατάξεων είναι

$$\frac{8!}{3!3!2!} = 560.$$

- (β) Θέλουμε τα δύο άκρα να είναι κόκκινα. Άρα «δεσμεύουμε» τις δύο ακραίες θέσεις με κόκκινα πιάτα. Μένουν 6 εσωτερικές θέσεις, στις οποίες πρέπει να τοποθετήσουμε τα υπόλοιπα πιάτα:

μένουν 1 κόκκινο, 3 μπλε, 2 πράσινα.

Άρα το πλήθος είναι

$$\frac{6!}{1!3!2!} = 60.$$

- (γ) Θέλουμε τα 3 μπλε να είναι όλα μαζί. Τα θεωρούμε ως ένα «μπλοκ» BBB . Τότε συνολικά έχουμε να διατάξουμε τα αντικείμενα

$(BBB), R, R, R, G, G,$

δηλαδή 6 αντικείμενα, όπου τα R είναι 3 όμοια και τα G είναι 2 όμοια. Άρα οι διατάξεις είναι

$$\frac{6!}{3!2!} = 60.$$

- (δ) Θέλουμε κανένα δύο μπλε να μην είναι γειτονικά. Πρώτα τοποθετούμε τα μη μπλε πιάτα:

R, R, R, G, G

σε μία σειρά. Αυτά είναι 5 αντικείμενα με 3 όμοια R και 2 όμοια G , άρα υπάρχουν

$$\frac{5!}{3!2!} = 10$$

διατάξεις.

Κάθε τέτοια διάταξη δημιουργεί 6 «κενά» (μία θέση πριν από το πρώτο, μία μετά το τελευταίο και 4 ανάμεσα στα 5 πιάτα). Για να μην είναι δύο μπλε γειτονικά, βάζουμε το πολύ 1 μπλε σε κάθε κενό. Άρα επιλέγουμε 3 από τα 6 κενά για να τοποθετήσουμε τα 3 μπλε πιάτα (όλα όμοια), δηλαδή

$$\binom{6}{3} = 20$$

τρόπους.

Επομένως, το συνολικό πλήθος είναι

$$10 \cdot 20 = 200.$$

- 2 Η λέξη PARABOLA αποτελείται από 8 γράμματα: 4 διακριτά σύμφωνα (P, R, B, L) και 4 φωνήεντα (A, A, A, O).

Προκειμένου να εναλλάσσονται σύμφωνα (Σ) και φωνήεντα (Φ), εφόσον είναι ισάριθμα, προκύπτουν ακριβώς 2 διακριτά μοτίβα διαδοχής:

$\Sigma\Phi\Sigma\Phi\Sigma\Phi\Sigma\Phi$ ή $\Phi\Sigma\Phi\Sigma\Phi\Sigma\Phi\Sigma$

Για κάθε ένα από τα δύο μοτίβα, το πλήθος των διατάξεων υπολογίζεται ως εξής:

- Μεταθέσεις των 4 διακριτών συμφώνων στις 4 καθορισμένες θέσεις: $4!$
- Μεταθέσεις των 4 φωνηέντων (με το A να επαναλαμβάνεται 3 φορές): $\frac{4!}{3!}$

Συνεπώς, το συνολικό πλήθος των ζητούμενων αναγραμματισμών N δίνεται από τη σχέση:

$$N = 2 \cdot 4! \cdot \frac{4!}{3!} = 2 \cdot 24 \cdot 4 = 192$$

3 Αν x_i είναι οι ψήφοι που παίρνει η i -οστή πρόταση, τότε ζητάμε το πλήθος των πεντάδων μη αρνητικών ακεραίων

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$$

που ικανοποιούν

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 30, \quad x_i \geq 0.$$

Με τη μέθοδο αστερία και μπάρες, το πλήθος των λύσεων είναι

$$\binom{30+5-1}{5-1} = \binom{34}{4}.$$

4 Θέτουμε

$$a' = a, \quad b' = b + 1, \quad c' = c + 2.$$

Τότε από $a \leq b \leq c$ προκύπτει

$$a' < b' < c'.$$

Επίσης, από $0 \leq a$ παίρνουμε $0 \leq a'$, ενώ από $c \leq 11$ παίρνουμε $c' = c + 2 \leq 13$. Άρα οι τριάδες (a, b, c) είναι σε 1-1 αντιστοιχία με τις αυστηρά αύξουσες τριάδες ακεραίων

$$0 \leq a' < b' < c' \leq 13.$$

Για να διαλέξουμε τέτοια τριάδα, αρκεί να επιλέξουμε 3 διαφορετικούς αριθμούς από το σύνολο $\{0, 1, 2, \dots, 13\}$ (που έχει 14 στοιχεία) και να τους βάλουμε σε αύξουσα σειρά. Επομένως το πλήθος είναι

$$\binom{14}{3} = 364.$$

5 Θέτουμε $a_n = \#\{S \subseteq \{1, \dots, n\} : \text{το } S \text{ δεν περιέχει δύο διαδοχικούς}\}$. Για $n = 0$ έχουμε $a_0 = 1$ (μόνο το κενό σύνολο), και για $n = 1$ έχουμε $a_1 = 2$ ($\emptyset, \{1\}$).

Για $n \geq 2$ χωρίζουμε σε δύο περιπτώσεις:

- Αν $n \notin S$, τότε $S \subseteq \{1, \dots, n-1\}$ και το πλήθος ισούται με a_{n-1} .
- Αν $n \in S$, τότε αναγκαστικά $n-1 \notin S$, άρα το υπόλοιπο $S \setminus \{n\}$ είναι υποσύνολο του $\{1, \dots, n-2\}$ χωρίς διαδοχικούς, και το πλήθος ισούται με a_{n-2} .

Άρα

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n \geq 2),$$

με $a_0 = 1, a_1 = 2$.

Αν $F_0 = 0, F_1 = 1$ είναι οι αριθμοί Fibonacci, τότε από τις αρχικές τιμές προκύπτει ότι

$$a_n = F_{n+2} \quad (n \geq 0).$$

6 Έστω T_n το ζητούμενο πλήθος.

Βήμα 1: Κατάσταση “αναγκασμού”. Παρατηρούμε ότι οι απαγορευμένες τριάδες είναι ακριβώς της μορφής

$$(1 \text{ ή } 2)0(0 \text{ ή } 1).$$

Άρα, αν μια έγκυρη συμβολοσειρά τελειώνει σε 10 ή 20, τότε το επόμενο ψηφίο δεν επιτρέπεται να είναι ούτε 0 ούτε 1, άρα αναγκαστικά πρέπει να είναι 2.

Θέτουμε $x_n =$ το πλήθος των έγκυρων συμβολοσειρών μήκους n που τελειώνουν σε 10 ή 20. Τότε:

- Από κάθε συμβολοσειρά που δεν τελειώνει σε 10 ή 20 έχουμε 3 επιλογές για το επόμενο ψηφίο.
- Από κάθε συμβολοσειρά που τελειώνει σε 10 ή 20 έχουμε μόνο 1 επιλογή (να βάλουμε 2).

Άρα

$$T_{n+1} = 3(T_n - x_n) + 1 \cdot x_n = 3T_n - 2x_n. \quad (1)$$

Βήμα 2: Αναδρομή για x_n . Για να προκύψει στο μήκος $n + 1$ κατάληξη 10 ή 20, πρέπει στο μήκος n να τελειώνει σε 1 ή 2 και να προσθέσουμε 0. Άρα

$$x_{n+1} = \#\{\text{έγκυρες μήκους } n \text{ που τελειώνουν σε } 1 \text{ ή } 2\}.$$

Οι έγκυρες που τελειώνουν σε 0 είναι ακριβώς:

- αυτές που τελειώνουν σε 10 ή 20 (είναι x_n), και
- η μοναδική συμβολοσειρά $00 \dots 0$ (γιατί αν κάποτε πριν από το τελικό 00 εμφανιζόταν 1 ή 2, θα είχαμε απαγορευμένη τριάδα 100 ή 200).

Άρα $\#\{\text{έγκυρες μήκους } n \text{ που τελειώνουν σε } 0\} = x_n + 1$, και συνεπώς

$$x_{n+1} = T_n - (x_n + 1) = T_n - x_n - 1. \quad (2)$$

Βήμα 3: Κλειστή αναδρομή για T_n . Από (1) για $n + 1$ παίρνουμε $T_{n+2} = 3T_{n+1} - 2x_{n+1}$ και με (2) έχουμε

$$T_{n+2} = 3T_{n+1} - 2(T_n - x_n - 1) = 3T_{n+1} - 2T_n + 2x_n + 2.$$

Επειδή από (1) έχουμε $2x_n = 3T_n - T_{n+1}$, καταλήγουμε:

$$T_{n+2} = 3T_{n+1} - 2T_n + (3T_n - T_{n+1}) + 2 = 2T_{n+1} + T_n + 2.$$

Άρα

$$T_{n+2} = 2T_{n+1} + T_n + 2 \quad (n \geq 1).$$

Επίσης $T_1 = 3$ (οι 0, 1, 2) και $T_2 = 9$ (όλες οι 3^2 συμβολοσειρές μήκους 2 είναι έγκυρες).

(Προαιρετικά) Ρητός τύπος. Θέτουμε $U_n = T_n + 1$. Τότε

$$U_{n+2} = 2U_{n+1} + U_n, \quad U_1 = 4, \quad U_2 = 10.$$

Με $\alpha = 1 + \sqrt{2}$, $\beta = 1 - \sqrt{2}$ προκύπτει

$$U_n = \frac{\alpha + 1}{2} \alpha^n + \frac{\beta + 1}{2} \beta^n,$$

άρα

$$T_n = \frac{\alpha^{n+1} + \alpha^n + \beta^{n+1} + \beta^n}{2} - 1.$$

7 Χωρίζουμε το $\{1, 2, \dots, 3k\}$ σε κλάσεις υπολοίπων modulo 3:

$$A_0 = \{3, 6, \dots, 3k\}, \quad A_1 = \{1, 4, \dots, 3k - 2\}, \quad A_2 = \{2, 5, \dots, 3k - 1\}.$$

Κάθε μία έχει ακριβώς k στοιχεία.

Για τρεις επιλεγμένους αριθμούς, το άθροισμα είναι πολλαπλάσιο του 3 ακριβώς στις εξής περιπτώσεις ως προς τα υπόλοιπα:

$$(0, 0, 0), (1, 1, 1), (2, 2, 2) \quad \text{ή} \quad (0, 1, 2).$$

Άρα:

- Για τα $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$, $(2, 2, 2)$: για κάθε κλάση έχουμε $\binom{k}{3}$ επιλογές, συνολικά $3\binom{k}{3}$.
- Για το $(0, 1, 2)$: διαλέγουμε έναν από κάθε κλάση, άρα $k \cdot k \cdot k = k^3$ επιλογές.

Συνεπώς ο ζητούμενος αριθμός είναι

$$3\binom{k}{3} + k^3.$$

8 Κάθε τέτοιος αριθμός αντιστοιχεί μοναδικά σε μία μη φθίνουσα ακολουθία μήκους n από τα ψηφία $\{0, 1, \dots, 9\}$, με την πρόσθετη απαίτηση $d_1 \neq 0$.

Αρχικά μετράμε όλες τις μη φθίνουσες ακολουθίες μήκους n από $\{0, 1, \dots, 9\}$. Αυτές είναι ισοδύναμες με την επιλογή με επανάληψη n στοιχείων από 10 ψηφία, άρα είναι

$$\binom{n+10-1}{10-1} = \binom{n+9}{9}.$$

Από αυτές αφαιρούμε όσες ξεκινούν με 0. Αν $d_1 = 0$, τότε (d_2, \dots, d_n) είναι οποιαδήποτε μη φθίνουσα ακολουθία μήκους $n-1$ από $\{0, 1, \dots, 9\}$, άρα ο αριθμός τους είναι

$$\binom{(n-1)+9}{9} = \binom{n+8}{9}.$$

Επομένως ο ζητούμενος αριθμός είναι

$$\binom{n+9}{9} - \binom{n+8}{9} = \binom{n+8}{8}.$$

9 Επειδή όλα τα σημεία βρίσκονται πάνω σε κύκλο, κάθε επιλογή $m \geq 3$ σημείων ως κορυφών καθορίζει ένα μοναδικό κυρτό m -γωνο: παίρνουμε τις κορυφές με τη φυσική κυκλική τους σειρά και ενώνουμε διαδοχικά.

Άρα το ζητούμενο πλήθος είναι απλώς το πλήθος των υποσυνόλων των 10 σημείων με μέγεθος τουλάχιστον 3:

$$\sum_{m=3}^{10} \binom{10}{m}.$$

Χρησιμοποιούμε ότι $\sum_{m=0}^{10} \binom{10}{m} = 2^{10}$. Επομένως

$$\sum_{m=3}^{10} \binom{10}{m} = 2^{10} - \binom{10}{0} - \binom{10}{1} - \binom{10}{2} = 1024 - 1 - 10 - 45 = 968.$$

10 Παρατηρούμε τα υπόλοιπα modulo 2:

$$2015, 2017 \text{ είναι περιττοί, } \quad 2016, 2018 \text{ είναι άρτιοι.}$$

Άρα κάθε τιμή $f(i)$ είναι είτε άρτια (2 επιλογές) είτε περιττή (2 επιλογές).

Θέτουμε $N = 2014$. Για κάθε i , διαλέγουμε πρώτα την αν ο $f(i)$ είναι άρτιος ή περιττός. Υπάρχουν 2^N τέτοιες επιλογές. Από αυτές, οι μισές έχουν άρτιο πλήθος περιττών τιμών και οι μισές περιττό. Άρα οι επιλογές που οδηγούν σε άρτιο άθροισμα είναι

$$\frac{1}{2} 2^N = 2^{N-1} = 2^{2013}.$$

Αφού σταθεροποιήσουμε το άρτιος-περιττός για κάθε i , για κάθε άρτια θέση έχουμε 2 επιλογές (2016 ή 2018) και για κάθε περιττή θέση επίσης 2 επιλογές (2015 ή 2017). Άρα, για κάθε επιλογή υπάρχουν συνολικά 2^N συναρτήσεις που την υλοποιούν.

Επομένως το ζητούμενο πλήθος είναι

$$2^{2013} \cdot 2^{2014} = 2^{4027}.$$

11 Ονομάζουμε «σειρά M» τη σειρά των 5 θέσεων που κοιτάει προς τη μηχανή, και «σειρά A» την άλλη σειρά. Υπάρχει συνολικά μία κενή θέση (αφού 10 θέσεις και 9 άτομα).

Το αγόρι πρέπει να κάτσει στη (μοναδική) θέση παραθύρου της σειράς όπου θα βρεθεί, και η μητέρα του στη διπλανή θέση της ίδιας σειράς. Άρα έχουμε δύο περιπτώσεις.

Περίπτωση 1: Αγόρι-μητέρα κάθονται στη σειρά M. Τότε οι 3 επιβάτες που θέλουν προς τη μηχανή πρέπει να καταλάβουν τις υπόλοιπες 3 θέσεις της σειράς M, και μπορούν να τοποθετηθούν με $3!$ τρόπους. Στη σειρά A απομένουν 5 θέσεις για τους υπόλοιπους 4 επιβάτες (και 1 κενή), άρα: επιλέγουμε ποια θέση θα μείνει κενή (5 τρόποι) και κατανέμουμε τους 4 επιβάτες στις υπόλοιπες ($4!$ τρόποι). Συνολικά:

$$3! \cdot 5 \cdot 4!.$$

Περίπτωση 2: Αγόρι-μητέρα κάθονται στη σειρά Α. Στη σειρά Μ πρέπει να καθίσουν οι 3 «προς τη μηχανή» σε 3 από τις 5 θέσεις: $\binom{5}{3}$ επιλογές θέσεων και $3!$ τρόποι διάταξης. Αφού αυτοί καθίσουν, μένουν 5 κενές θέσεις συνολικά (2 στη σειρά Μ και 3 στη σειρά Α), στις οποίες πρέπει να καθίσουν οι υπόλοιποι 4 επιβάτες, δηλαδή $5 \cdot 4!$ τρόποι. Άρα η περίπτωση αυτή δίνει:

$$\binom{5}{3} \cdot 3! \cdot (5 \cdot 4!).$$

Προσθέτοντας:

$$3! \cdot 5 \cdot 4! + \binom{5}{3} \cdot 3! \cdot 5 \cdot 4! = 6 \cdot 5 \cdot 24 + 10 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 24 = 720 + 7200 = 7920.$$

12 Θέτουμε $x_i =$ αριθμός μπλε μπαλών στο κουτί i και $y_i =$ αριθμός άσπρων μπαλών στο κουτί i . Τότε $\sum_{i=1}^{10} x_i = 4$ και $\sum_{i=1}^{10} y_i = 6$.

(a) Επιτρέπονται άδεια κουτιά, άρα $x_i, y_i \geq 0$. Με «αστέρια και μπάρες»:

$$\#\{(x_1, \dots, x_{10}) \geq 0 : \sum x_i = 4\} = \binom{4 + 10 - 1}{10 - 1} = \binom{13}{9} = \binom{13}{4},$$

$$\#\{(y_1, \dots, y_{10}) \geq 0 : \sum y_i = 6\} = \binom{6 + 10 - 1}{10 - 1} = \binom{15}{9} = \binom{15}{6}.$$

Οι επιλογές είναι ανεξάρτητες, άρα

$$\binom{13}{4} \binom{15}{6}.$$

(b) Κάθε κουτί παίρνει τουλάχιστον μία μπάλα, δηλαδή $x_i + y_i \geq 1$ για όλα τα i . Όμως έχουμε συνολικά $4 + 6 = 10$ μπάλες και 10 κουτιά, άρα αναγκαστικά κάθε κουτί παίρνει ακριβώς μία μπάλα. Επομένως αρκεί να διαλέξουμε ποια 4 κουτιά θα πάρουν από μία μπλε μπάλα (τα υπόλοιπα 6 θα πάρουν από μία άσπρη):

$$\binom{10}{4}.$$

(c) Επιλέγουμε πρώτα ποια 2 κουτιά θα είναι άδεια: $\binom{10}{2}$ τρόποι. Στα υπόλοιπα 8 κουτιά πρέπει να μπουν και οι 10 μπάλες, και κανένα από αυτά τα 8 δεν επιτρέπεται να μείνει άδειο.

Με 8 μη άδεια κουτιά και 10 μπάλες, οι συνολικοί αριθμοί μπαλών ανά κουτί (αγνοώντας χρώματα) έχουν μόνο δύο μορφές:

$$(3, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) \quad \text{ή} \quad (2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1).$$

Μετράμε για κάθε μορφή πόσοι χρωματισμοί δίνουν συνολικά 4 μπλε και 6 άσπρες.

Τύπος Α: ένα κουτί έχει 3 μπάλες και τα άλλα 7 έχουν από 1. Επιλέγουμε το «τριπλό» κουτί: 8 τρόποι. Αν το τριπλό κουτί έχει $b \in \{0, 1, 2, 3\}$ μπλε (και $3 - b$ άσπρες), τότε στα 7 μονά κουτιά πρέπει να μπουν $4 - b$ μπλε (και τα υπόλοιπα άσπρες), άρα $\binom{7}{4-b}$ τρόποι. Συνολικά:

$$8 \sum_{b=0}^3 \binom{7}{4-b}.$$

Τύπος Β: δύο κουτιά έχουν 2 μπάλες και τα άλλα 6 έχουν από 1. Επιλέγουμε τα δύο «διπλά» κουτιά: $\binom{8}{2}$ τρόποι. Αν τα δύο διπλά κουτιά έχουν $a, b \in \{0, 1, 2\}$ μπλε αντίστοιχα, τότε στα 6 μονά κουτιά πρέπει να μπουν $4 - a - b$ μπλε, άρα $\binom{6}{4-a-b}$ τρόποι (όπου φυσικά $0 \leq 4 - a - b \leq 6$). Άρα η συνεισφορά είναι:

$$\binom{8}{2} \sum_{a=0}^2 \sum_{b=0}^2 \binom{6}{4-a-b}.$$

Υπολογίζοντας τα αθροίσματα βρίσκουμε

$$8 \sum_{b=0}^3 \binom{7}{4-b} = 8 \left(\binom{7}{4} + \binom{7}{3} + \binom{7}{2} + \binom{7}{1} \right) = 784,$$

$$\binom{8}{2} \sum_{a=0}^2 \sum_{b=0}^2 \binom{6}{4-a-b} = 3164,$$

άρα συνολικά για τα 8 μη άδεια κουτιά παίρνουμε $784 + 3164 = 3948$ κατανομές. Τελικά:

$$\binom{10}{2} \cdot 3948 = 177660.$$