Διακριτά Μαθηματικά
1ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Πρόβλημα 1 Ένα πολυσύχναστο αεροδρόμιο έχει 1500 απογειώσεις την ημέρα. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δύο αεροπλάνα που αναγκαστικά απογειώνονται μέσα σε χρονικό διάστημα μικρότερο του ενός λεπτού.

Πρόβλημα 2 Διαλέγουμε 129 σημεία μέσα σε ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς 100. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν τρία από τα επιλεγμένα σημεία που σχηματίζουν τρίγωνο εμβαδού το πολύ 68.

Πρόβλημα 3 Χρωματίζουμε όλα τα σημεία του $\mathbb{R}^2$ με ακέραιες συντεταγμένες (δηλαδή όλα τα $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$) με ένα από 6 χρώματα. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ορθογώνιο με κορυφές σε σημεία του $\mathbb{Z}^2$ του οποίου και οι 4 κορυφές είναι του ίδιου χρώματος (μονοχρωματικό ορθογώνιο). Μπορούμε να κάνουμε την πρόταση ισχυρότερη, επιβάλλοντας περιορισμό στο μέγεθος ενός τέτοιου μονοχρωματικού ορθογωνίου;

Πρόβλημα 4 (i) Πόσες συναρτήσεις υπάρχουν από $[n]$ προς $[n]$ που δεν είναι 1-1;

(ii) Να αποδείξετε ότι το πλήθος των υποσυνόλων του $[n]$ που έχουν περιττό πλήθος στοιχείων είναι 2^{n-1}.

Πρόβλημα 5 (i) Μια εταιρεία έχει 20 υπαλλήλους: 12 άνδρες και 8 γυναίκες. Πόσες επιτροπές 5 ατόμων υπάρχουν που περιέχουν τουλάχιστον έναν άνδρα και τουλάχιστον μία γυναίκα;

(ii) Σε ένα πρωτάθλημα στίβου συμμετέχουν 49 χώρες. Η σημαία κάθε χώρας έχει 3 οριζόντιες λωρίδες *διαφορετικών* χρωμάτων. Κανένα χρώμα εκτός από κόκκινο, λευκό, μπλε, πράσινο δεν χρησιμοποιείται. Είναι αλήθεια ότι υπάρχουν 3 χώρες με πανομοιότυπες σημαίες;

Πρόβλημα 6 Μια αντιπροσωπεία αυτοκινήτων απασχολεί 5 πωλητές. Κάθε πωλητής παίρνει μπόνους 100 δολάρια για κάθε αυτοκίνητο που πουλάει. Χθες πουλήθηκαν συνολικά 7 αυτοκίνητα. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους θα μπορούσε να έχει συμβεί αυτό; (Θεωρούμε δύο σενάρια διαφορετικά αν οδηγούν σε διαφορετικές πληρωμές μπόνους.)

Πρόβλημα 7 Πόσοι θετικοί ακέραιοι 6-ψήφιοι υπάρχουν των οποίων το άθροισμα των ψηφίων είναι το πολύ 51;

Πρόβλημα 8 *Από μια τάξη 30 μαθητών, πόσοι τρόποι υπάρχουν να επιλέξουμε μια ποδοσφαιρική ομάδα 11 ατόμων και μια μπασκετική ομάδα 5 ατόμων αν:*

(i) *κανείς δεν επιτρέπεται να είναι και στις δύο ομάδες,*

(ii) *επιτρέπεται οποιοσδήποτε αριθμός κοινών μελών,*

(iii) *το πολύ ένα άτομο επιτρέπεται να είναι και στις δύο ομάδες;*

Πρόβλημα 9 Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε 7 πύργους σε μια σκακιέρα 8×8, ώστε να μην αλληλεπιτίθενται;

Πρόβλημα 10 Πόσα n-στοιχεία υποσύνολα $S \subseteq [2n]$ υπάρχουν ώστε να μην υπάρχουν δύο στοιχεία $x, y \in S$ με $x + y = 2n + 1$;

Πρόβλημα 11 Μια οικοδέσποινα καλεί n ζευγάρια σε ένα πάρτι (άρα $2n$ καλεσμένους). Θέλει να ζητήσει από ένα υποσύνολο των $2n$ καλεσμένων να βγάλουν λόγο, αλλά δεν θέλει να ζητήσει *και από τα δύο* μέλη οποιουδήποτε ζευγαριού να μιλήσουν. Με πόσους τρόπους μπορεί να το κάνει;

Πρόβλημα 12 Πόσοι πίνακες $n \times n$ με στοιχεία 0 ή 1 υπάρχουν, ώστε κάθε γραμμή και κάθε στήλη να έχουν άρτιο άθροισμα;

Παραδίδετε 5 Προβλήματα έως 24–02–2026.

1 Χωρίζουμε το 24ωρο σε $24 \cdot 60 = 1440$ διαστήματα του ενός λεπτού, π.χ.

$$I_k = [k, k+1), \qquad k = 0, 1, \dots, 1439,$$

όπου ο χρόνος μετριέται σε λεπτά από την αρχή της ημέρας.

Οι 1500 απογειώσεις αντιστοιχούν σε 1500 χρονικές στιγμές, άρα σε 1500 «μπάλες» που μπαίνουν στα 1440 «κουτιά» I_k. Εφόσον $1500 > 1440$, από την αρχή του περιστερώνα υπάρχουν δύο απογειώσεις που ανήκουν στο ίδιο I_k. Τότε οι δύο αντίστοιχες χρονικές στιγμές απέχουν αυστηρά λιγότερο από 1 λεπτό.

2 Διαιρούμε κάθε πλευρά του ισόπλευρου τριγώνου σε 8 ίσα τμήματα και φέρνουμε τις παράλληλες προς τις πλευρές, ώστε το μεγάλο τρίγωνο να χωριστεί σε $8^2 = 64$ μικρά ισόπλευρα τρίγωνα ίσου εμβαδού.

Το εμβαδόν του αρχικού τριγώνου είναι

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 100^2 = 2500\sqrt{3}.$$

Άρα το εμβαδόν κάθε μικρού τριγώνου είναι

$$\frac{2500\sqrt{3}}{64} = \frac{625}{16}\sqrt{3}.$$

Επειδή $\left(\frac{87}{50}\right)^2 = \frac{7569}{2500} > 3$, έχουμε $\sqrt{3} < \frac{87}{50}$, οπότε

$$\frac{625}{16}\sqrt{3} < \frac{625}{16} \cdot \frac{87}{50} = \frac{54375}{800} = 67.96875 < 68.$$

Αν κάθε μικρό τρίγωνο περιείχε το πολύ 2 από τα 129 σημεία, τότε συνολικά θα είχαμε το πολύ $2 \cdot 64 = 128$ σημεία, άτοπο. Άρα κάποιο μικρό τρίγωνο περιέχει τουλάχιστον 3 από τα σημεία. Τα τρία αυτά σημεία σχηματίζουν τρίγωνο που περιέχεται στο μικρό ισόπλευρο τρίγωνο, άρα το εμβαδόν του είναι το πολύ το εμβαδόν αυτού του μικρού τριγώνου, δηλαδή < 68.

3 Θεωρούμε τις 7 στήλες $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Για κάθε ακέραιο y, κοιτάμε τα 7 σημεία $(0, y), (1, y), \dots, (6, y)$. Επειδή υπάρχουν 7 σημεία αλλά μόνο 6 χρώματα, δύο από αυτά έχουν το ίδιο χρώμα. Δηλαδή, για κάθε y υπάρχουν δείκτες $0 \le i_y < j_y \le 6$ και ένα χρώμα c_y ώστε

$$(i_y, y) \text{ και } (j_y, y) \text{ έχουν χρώμα } c_y.$$

Το ζεύγος (i_y, j_y) μπορεί να πάρει μόνο $\binom{7}{2} = 21$ τιμές και το c_y μόνο 6 τιμές, άρα η τριάδα (i_y, j_y, c_y) μπορεί να πάρει το πολύ $21 \cdot 6 = 126$ δυνατές τιμές. Επομένως, αν εξετάσουμε τις 127 γραμμές $y = 0, 1, \dots, 126$, από την αρχή του περιστερώνα υπάρχουν $y_1 < y_2$ με

$$(i_{y_1}, j_{y_1}, c_{y_1}) = (i_{y_2}, j_{y_2}, c_{y_2}) = (i, j, c).$$

Τότε τα σημεία $(i, y_1), (j, y_1), (i, y_2), (j, y_2)$ είναι όλες κορυφές ενός ορθογωνίου (με πλευρές παράλληλες στους άξονες) και έχουν όλα χρώμα c. Άρα υπάρχει μονοχρωματικό ορθογώνιο.

Από το παραπάνω επιχείρημα βρίσκουμε μονοχρωματικό ορθογώνιο ήδη μέσα στο πλέγμα

$$\{0, 1, \dots, 6\} \times \{0, 1, \dots, 126\},$$

άρα μπορούμε να περιορίσουμε το μέγεθος: το πλάτος είναι ≤ 6 (διαφορά δύο στηλών από 0 έως 6) και το ύψος είναι ≤ 126 (διαφορά δύο γραμμών μέσα στις πρώτες 127 γραμμές).

4 (i) Το πλήθος όλων των συναρτήσεων $f : [n] \to [n]$ είναι n^n, αφού για κάθε από τα n στοιχεία του $[n]$ υπάρχουν n επιλογές εικόνας.

Οι 1-1 συναρτήσεις $f : [n] \to [n]$ είναι ακριβώς οι μεταθέσεις του $[n]$, άρα είναι $n!$. Επομένως, οι μη 1-1 είναι

$$n^n - n!.$$

(ii) Ορίζουμε αντιστοιχία $A \mapsto A^c = [n] \setminus A$. Τότε για κάθε υποσύνολο $A \subseteq [n]$ έχουμε $|A| + |A^c| = n$, άρα ακριβώς ένα από τα $|A|, |A^c|$ είναι περιττό (και το άλλο άρτιο).

Επομένως, τα 2^n υποσύνολα χωρίζονται σε 2^{n-1} ζεύγη $\{A, A^c\}$, και σε κάθε ζεύγος υπάρχει ακριβώς ένα σύνολο περιττού πλήθους. Άρα τα υποσύνολα περιττού πλήθους είναι 2^{n-1}.

5 (i) Όλες οι 5-μελείς επιτροπές είναι $\binom{20}{5}$. Αφαιρούμε τις «κακές» επιτροπές: όλες που αποτελούνται μόνο από άνδρες $\binom{12}{5}$ και όλες που αποτελούνται μόνο από γυναίκες $\binom{8}{5}$. Άρα το ζητούμενο είναι

$$\binom{20}{5} - \binom{12}{5} - \binom{8}{5}.$$

(ii) Μια σημαία καθορίζεται από μια *διατεταγμένη* τριάδα διαφορετικών χρωμάτων από 4 διαθέσιμα. Άρα το πλήθος των δυνατών σημαιών είναι

$$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24.$$

Με 49 χώρες και μόνο 24 τύπους σημαιών, από την αρχή του περιστερώνα κάποιος τύπος εμφανίζεται τουλάχιστον $\lceil \frac{49}{24} \rceil = 3$ φορές. Άρα υπάρχουν 3 χώρες με πανομοιότυπες σημαίες.

6 Αρκεί να μετρήσουμε πόσες πεντάδες μη αρνητικών ακεραίων $(x_1, \dots, x_5)$ υπάρχουν με

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7,$$

όπου x_i είναι τα αυτοκίνητα που πούλησε ο i-οστός πωλητής (και άρα το μπόνους του είναι $100x_i$).

Το πλήθος των λύσεων είναι

$$\binom{7+5-1}{5-1} = \binom{11}{4} = 330.$$

7 Οι 6-ψήφιοι θετικοί ακέραιοι είναι από 100000 έως 999999, άρα συνολικά $9 \cdot 10^5 = 900000$.

Το μέγιστο άθροισμα ψηφίων για 6-ψήφιο αριθμό είναι 54 (στο 999999). Άρα το «άθροισμα ψηφίων ≤ 51» αποτυγχάνει μόνο για τα άθροισματα $52, 53, 54$. Θα μετρήσουμε πόσοι είναι αυτοί και θα αφαιρέσουμε από 900000.

Γράφουμε τα ψηφία ως $d_1d_2d_3d_4d_5d_6$ με $1 \leq d_1 \leq 9$, $0 \leq d_i \leq 9$ για $i \geq 2$, και θέτουμε $x_1 = d_1 - 1$ (οπότε $0 \leq x_1 \leq 8$) και $x_i = d_i$ για $i \geq 2$ (οπότε $0 \leq x_i \leq 9$). Τότε

$$d_1 + \dots + d_6 = S \quad \iff \quad x_1 + x_2 + \dots + x_6 = S - 1 =: T,$$

με άνω φράγματα $x_1 \leq 8$, $x_2, \dots, x_6 \leq 9$. Το μέγιστο T είναι $8 + 5 \cdot 9 = 53$.

Για $S \in \{52, 53, 54\}$ έχουμε $T \in \{51, 52, 53\}$. Θέτουμε $y_1 = 8 - x_1$ και $y_i = 9 - x_i$ για $i \geq 2$. Τότε $y_i \geq 0$ και

$$y_1 + \dots + y_6 = (8 + 5 \cdot 9) - T = 53 - T.$$

Άρα:

- Αν $T = 53$ (δηλ. $S = 54$), τότε $y_1 + \dots + y_6 = 0$, άρα υπάρχει 1 λύση (ο 999999).
- Αν $T = 52$ (δηλ. $S = 53$), τότε $y_1 + \dots + y_6 = 1$, άρα υπάρχουν $\binom{1+6-1}{6-1} = \binom{6}{5} = 6$ λύσεις.
- Αν $T = 51$ (δηλ. $S = 52$), τότε $y_1 + \dots + y_6 = 2$, άρα υπάρχουν $\binom{2+6-1}{6-1} = \binom{7}{5} = 21$ λύσεις.

Συνολικά, οι 6-ψήφιοι με άθροισμα ψηφίων $52, 53, 54$ είναι $21 + 6 + 1 = 28$. Άρα οι 6-ψήφιοι με άθροισμα ψηφίων ≤ 51 είναι

$$900000 - 28 = 899972.$$

8 (i) (Διακριτές ομάδες) Επιλέγουμε πρώτα την ποδοσφαιρική ομάδα: $\binom{30}{11}$ τρόποι. Έπειτα, η μπασκετική πρέπει να διαλεχθεί από τους υπόλοιπους 19: $\binom{19}{5}$ τρόποι. Άρα

$$\binom{30}{11}\binom{19}{5}.$$

(ii) Επιλέγουμε ανεξάρτητα τις δύο ομάδες:

$$\binom{30}{11}\binom{30}{5}.$$

(iii) (Το πολύ ένα κοινό μέλος) Είναι το άθροισμα των περιπτώσεων «καμία τομή» και «ακριβώς ένα κοινό μέλος». Η «καμία τομή» είναι η (i): $\binom{30}{11}\binom{19}{5}$.

Για «ακριβώς ένα κοινό μέλος»: διαλέγουμε πρώτα το κοινό άτομο (30 τρόποι), έπειτα 10 ποδοσφαιριστές από τους υπόλοιπους 29 ($\binom{29}{10}$ τρόποι), και τέλος 4 μπασκετμπολίστες από όσους δεν είναι στην ποδοσφαιρική ομάδα: απομένουν $30 - (1 + 10) = 19$ άτομα, άρα $\binom{19}{4}$ τρόποι. Συνεπώς η περίπτωση «ακριβώς ένα κοινό μέλος» δίνει

$$30\binom{29}{10}\binom{19}{4}.$$

Άρα συνολικά

$$\binom{30}{11}\binom{19}{5} + 30\binom{29}{10}\binom{19}{4}.$$

9 Ένας πύργος επιτίθεται σε όλα τα τετράγωνα της ίδιας γραμμής και της ίδιας στήλης. Άρα, 7 μη αλληλεπιτιθέμενοι πύργοι σημαίνει: το πολύ ένας πύργος σε κάθε γραμμή και σε κάθε στήλη.

Διαλέγουμε πρώτα ποιες 7 από τις 8 γραμμές θα περιέχουν πύργο: $\binom{8}{7}$ τρόποι. Διαλέγουμε επίσης ποιες 7 από τις 8 στήλες θα περιέχουν πύργο: $\binom{8}{7}$ τρόποι.

Αφού επιλέξαμε τις 7 γραμμές και τις 7 στήλες, πρέπει να αντιστοιχίσουμε τις γραμμές στις στήλες, ώστε κάθε επιλεγμένη γραμμή να έχει ακριβώς έναν πύργο σε μία από τις επιλεγμένες στήλες. Ο αριθμός των 1-1 αντιστοιχίσεων μεταξύ 7 γραμμών και 7 στηλών είναι 7!.

Άρα το πλήθος των τοποθετήσεων είναι

$$\binom{8}{7}\binom{8}{7}7! = 8 \cdot 8 \cdot 7! = 64 \cdot 5040 = 322560.$$

10 Χωρίζουμε το $[2n] = \{1, 2, \dots, 2n\}$ στα n ζεύγη

$$\{1, 2n\},\ \{2, 2n-1\},\ \dots,\ \{n, n+1\}.$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε τέτοιο ζεύγος $\{k, 2n+1-k\}$ ισχύει $k + (2n+1-k) = 2n+1$. Άρα η συνθήκη του προβλήματος ισοδυναμεί με το ότι το S δεν μπορεί να περιέχει *και τα δύο* στοιχεία κανενός από αυτά τα ζεύγη.

Επειδή ζητάμε $|S| = n$ και υπάρχουν ακριβώς n ζεύγη, το S πρέπει να περιέχει *ακριβώς ένα* στοιχείο από κάθε ζεύγος (αν έλειπε κάποιο ζεύγος εντελώς, τότε $|S| \le n-1$).

Για κάθε ζεύγος έχουμε 2 επιλογές (παίρνουμε είτε το μικρό είτε το μεγάλο στοιχείο), ανεξάρτητα από τα άλλα ζεύγη. Άρα ο αριθμός των τέτοιων συνόλων είναι 2^n.

11 Για κάθε ένα από τα n ζευγάρια υπάρχουν 3 επιτρεπτές επιλογές ως προς το ποιοι θα μιλήσουν:

(i) κανείς από το ζευγάρι, (ii) μόνο το πρώτο μέλος, (iii) μόνο το δεύτερο μέλος.

Οι επιλογές για διαφορετικά ζευγάρια είναι ανεξάρτητες, άρα συνολικά οι τρόποι είναι

$$3^n.$$

(Αν απαιτείται το υποσύνολο των ομιλητών να είναι μη κενό, τότε η απάντηση είναι $3^n - 1$.)

12 Θα δείξουμε ότι ο πίνακας καθορίζεται πλήρως από το πάνω-αριστερά $(n-1) \times (n-1)$ υποτετράγωνο.

Διαλέγουμε αυθαίρετα τις τιμές $a_{ij} \in \{0, 1\}$ για $1 \le i \le n-1$, $1 \le j \le n-1$. Αυτό μπορεί να γίνει με $2^{(n-1)^2}$ τρόπους.

Βήμα 1: συμπλήρωση της τελευταίας στήλης. Για κάθε $i = 1, 2, \dots, n-1$ θέλουμε η i-οστή γραμμή να έχει άρτιο άθροισμα, άρα το $a_{i,n}$ πρέπει να επιλεγεί μοναδικά ώστε

$$a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{i,n-1} + a_{i,n} \text{ να είναι άρτιος.}$$

Επομένως, η τελευταία στήλη στα πρώτα $n-1$ στοιχεία της καθορίζεται μονοσήμαντα.

Βήμα 2: συμπλήρωση της τελευταίας γραμμής. Ομοίως, για κάθε $j = 1, 2, \dots, n-1$ θέλουμε η j-οστή στήλη να έχει άρτιο άθροισμα, άρα το $a_{n,j}$ καθορίζεται μοναδικά ώστε

$$a_{1j} + a_{2j} + \cdots + a_{n-1,j} + a_{n,j} \text{ να είναι άρτιος.}$$

Βήμα 3: το στοιχείο $a_{n,n}$. Μένει να ορίσουμε το $a_{n,n}$. Αυτό καθορίζεται μοναδικά από την απαίτηση να είναι άρτιο το άθροισμα της n-οστής γραμμής (ή ισοδύναμα της n-οστής στήλης). Πράγματι, αφού έχουν ήδη καθοριστεί τα $a_{n,1}, \dots, a_{n,n-1}$, υπάρχει ακριβώς μία επιλογή του $a_{n,n} \in \{0, 1\}$ ώστε

$$a_{n,1} + a_{n,2} + \cdots + a_{n,n-1} + a_{n,n} \text{ να είναι άρτιος.}$$

Πρέπει επίσης να ελέγξουμε ότι τότε και η n-οστή στήλη έχει άρτιο άθροισμα. Αυτό ισχύει αυτόματα, γιατί το άθροισμα όλων των στοιχείων του πίνακα είναι

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.$$

Από την πλευρά των γραμμών, επειδή κάθε γραμμή έχει άρτιο άθροισμα, το παραπάνω άθροισμα είναι άρτιο. Άρα, αφού οι πρώτες $n-1$ στήλες έχουν κατασκευαστεί με άρτιο άθροισμα, και η τελευταία στήλη πρέπει επίσης να έχει άρτιο άθροισμα.

Συνεπώς, κάθε επιλογή του $(n-1) \times (n-1)$ υποπίνακα επεκτείνεται με *ακριβώς έναν* τρόπο σε πίνακα με τις ζητούμενες ιδιότητες. Άρα το πλήθος των πινάκων είναι

$$2^{(n-1)^2}.$$