Διακριτά Μαθηματικά
4ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Πρόβλημα 1 Να βρεθεί η ακολουθία $(a_k)_{k\geq 0}$ με $a_0 = 0$ και $a_{k+1} = a_k + 2^k$ για κάθε $k \geq 0$.

Πρόβλημα 2 Δίνεται η ακολουθία $(a_n)_{n\geq 0}$ με $a_0 = 1$ και

$$a_{n+1} = 2a_n + n \quad \text{για κάθε } n \geq 0.$$

(α) Δείξτε ότι

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n = \frac{1-2x+2x^2}{(1-x)^2(1-2x)}.$$

(β) Βρείτε έναν απλό τύπο για το a_n.

Πρόβλημα 3 Να βρεθεί το πλήθος των τρόπων να χωρίσουμε ένα εξάμηνο n ημερών σε τρία *διαδοχικά* μέρη, ώστε:

- στο πρώτο μέρος να επιλεγεί οποιοδήποτε πλήθος αργιών,
- στο δεύτερο μέρος να επιλεγεί περιττό πλήθος αργιών,
- στο τρίτο μέρος να επιλεγεί άρτιο πλήθος αργιών.

Πρόβλημα 4 Να βρεθεί μια απλή κλειστή μορφή για τη γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $a_n = n^2$, δηλαδή για $A(x) = \sum_{n\geq 0} n^2 x^n$.

Πρόβλημα 5 Σταθεροποιούμε έναν θετικό ακέραιο n. Να βρείτε το πλήθος λύσεων της εξίσωσης

$$x_0 + 2x_1 + \ldots + 2^k x_k = n,$$

όπου ο $k \geq 0$ μεταβάλλεται και $x_i \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Πρόβλημα 6 Έστω $f(n)$ ο αριθμός υποσυνόλων του $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ με την ιδιότητα ότι η απόσταση (διαφορά) οποιωνδήποτε δύο διαφορετικών στοιχείων τους είναι τουλάχιστον 3. Βρείτε μια αναδρομική σχέση για την $f(n)$ και την γεννήτρια συνάρτηση $F(x) = \sum_{n\geq 0} f(n)x^n$.

Πρόβλημα 7 Έστω $n \in \mathbb{N}$. Υπολογίστε την γεννήτρια συνάρτηση του αθροίσματος

$$S_n := \sum a_1 a_2 \cdots a_k,$$

όπου το άθροισμα λαμβάνεται σε *όλες* τις συνθέσεις του n της μορφής

$$n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k, \qquad k \geq 1, \qquad a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{N}.$$

(Η σειρά των a_i μετράει, δηλαδή πρόκειται για διατεταγμένες k-άδες.)

Πρόβλημα 8 Έστω $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι: ο αριθμός των διαμερίσεων του n στις οποίες *κάθε μέρος εμφανίζεται τουλάχιστον δύο φορές* είναι ίσος με τον αριθμό των διαμερίσεων του n σε μέρη που είναι *διαιρετά με 2 ή με 3*.

Πρόβλημα 9 Θέτουμε για $n \in \mathbb{N}$

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{2n-k}{k}.$$

(1) Να αποδείξετε ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει η ταυτότητα (για $|x| < 1$):

$$\sum_{m\geq 0} \binom{2m+k}{k} x^{2m} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1-x)^{k+1}} + \frac{1}{(1+x)^{k+1}}\right).$$

(2) Να βρείτε έναν απλό κλειστό τύπο για το s_n, υπολογίζοντας την γεννήτρια συνάρτηση.

Πρόβλημα 10 Έστω a_n το πλήθος των ασθενών συνθέσεων (r_1, r_2, r_3) του n (δηλ. $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ και $r_1 + r_2 + r_3 = n$) για τις οποίες τα r_2 και r_3 είναι άρτιοι αριθμοί.

(α) Δείξτε ότι

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)^2}.$$

(β) Συναγάγετε έναν απλό τύπο για το a_n.

Πρόβλημα 11 Έχουμε δύο «πειραγμένα» ζάρια, τα οποία ρίχνονται ανεξάρτητα.

Στο πρώτο ζάρι, για κάθε $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ η ένδειξη i εμφανίζεται με πιθανότητα p_i, όπου $p_i \geq 0$ και $p_1 + p_2 + \cdots + p_6 = 1$.

Στο δεύτερο ζάρι, για κάθε $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ η ένδειξη i εμφανίζεται με πιθανότητα q_i, όπου $q_i \geq 0$ και $q_1 + q_2 + \cdots + q_6 = 1$.

Να αποδείξετε ότι αν το πείραμα είναι να ρίξουμε τα δύο ζάρια και να υπολογίσουμε το άθροισμα των ενδείξεων, *δεν είναι δυνατόν* να ισχύει τα ενδεχόμενα $2, 3, \ldots, 12$ να είναι ισοπίθανα.

Παραδίδετε 5 Προβλήματα έως 17–03–2026.