Αναλυτική Θεωρία Αριθμών

Σημειώσεις από τις Διαλέξεις

Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Κρήτης
Ηράκλειο, 2026

Περιεχόμενα

1 Η πρώτη αναγωγή

1.1 Άθροιση κατά Abel

Θεώρημα 1.1 (Άθροιση κατά Abel). *Έστω $0 < y < x$ πραγματικοί αριθμοί και $f : [y,x] \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη. Θεωρούμε την ακολουθία μιγαδικών αριθμών $(a_n)_{n\geq 1}$ και για κάθε $t > 0$ ορίζουμε*

$$A(t) := \sum_{n\leq t} a_n.$$

Τότε ισχύει

$$\sum_{y<n\leq x} a_n\, f(n) \;=\; A(x)f(x) - A(y)f(y) - \int_y^x A(t)\, f'(t)\, dt.$$

Θεώρημα 1.2 (Τύπος άθροισης Euler). *Έστω $0 < y < x$ πραγματικοί αριθμοί και $f : [y,x] \to \mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο f' στο $[y,x]$. Τότε*

$$\sum_{y<n\leq x} f(n) = \int_y^x f(t)\, dt + \int_y^x \{t\}\; f'(t)\, dt + \{y\}\; f(y) - \{x\}\; f(x),$$

όπου $\{t\} = t - \lfloor t \rfloor$ είναι το κλασματικό μέρος.

Οι παρακάτω δύο εφαρμογές είναι χαρακτηριστικές για το πώς χρησιμοποιούμε τον τύπο άθροισης.

Θεώρημα 1.3. *Για $x \geq 1$ ισχύει*

$$\sum_{n\leq x} \frac{1}{n} = \log x + \gamma + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right), \tag{1}$$

όπου γ είναι η σταθερά του Euler, οριζόμενη από

$$\gamma = 1 - \int_1^\infty \frac{\{t\}}{t^2}\, dt.$$

Επιπλέον,

$$\gamma = \lim_{x\to\infty}\left(\sum_{n\le x}\frac{1}{n}-\log x\right).$$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 1.2 για την συνάρτηση $f(t)=1/t$ και $y=1$. Τότε $\{1\}=0$ και $f'(t)=-1/t^2$, άρα

$$\sum_{1<n\le x}\frac{1}{n}=\int_1^x\frac{1}{t}\,dt+\int_1^x\{t\}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt-\{x\}\,\frac{1}{x}.$$

Επομένως

$$\sum_{n\le x}\frac{1}{n}=1+\log x-\int_1^x\frac{\{t\}}{t^2}\,dt-\frac{\{x\}}{x}.$$

Προσθέτουμε και αφαιρούμε $\int_1^\infty\frac{\{t\}}{t^2}dt$:

$$\sum_{n\le x}\frac{1}{n}=\log x+\left(1-\int_1^\infty\frac{\{t\}}{t^2}\,dt\right)+\int_x^\infty\frac{\{t\}}{t^2}\,dt-\frac{\{x\}}{x}.$$

Ορίζοντας $\gamma=1-\int_1^\infty\frac{\{t\}}{t^2}\,dt$ παίρνουμε

$$\sum_{n\le x}\frac{1}{n}=\log x+\gamma+\int_x^\infty\frac{\{t\}}{t^2}\,dt-\frac{\{x\}}{x}.$$

Τώρα $0\le\{t\}\le 1$, άρα

$$0\le\int_x^\infty\frac{\{t\}}{t^2}\,dt\le\int_x^\infty\frac{1}{t^2}\,dt=\frac{1}{x},\qquad 0\le\frac{\{x\}}{x}\le\frac{1}{x}.$$

Άρα το υπόλοιπο είναι $\mathcal{O}(1/x)$ και προκύπτει η (1). Τέλος, καθώς $x\to\infty$ το $\mathcal{O}(1/x)$ τείνει στο 0, οπότε

$$\sum_{n\le x}\frac{1}{n}-\log x\to\gamma,$$

δηλαδή $\gamma=\lim_{x\to\infty}\left(\sum_{n\le x}\frac{1}{n}-\log x\right)$. □

Ορισμοί

Για $x\ge 0$ θέτουμε:

$$\pi(x):=\#\{p\le x:\ p\ \text{πρώτος}\},\qquad \theta(x):=\sum_{p\le x}\log p,$$

και

$$\psi(x):=\sum_{n\le x}\Lambda(n)=\sum_{p^k\le x}\log p,$$

όπου Λ είναι η συνάρτηση von Mangoldt: $\Lambda(n)=\log p$ αν $n=p^k$ για κάποιον πρώτο p και $k\ge 1$, και $\Lambda(n)=0$ αλλιώς.

Θεώρημα 1.4. *Για κάθε $x\ge 2$ ισχύουν οι ταυτότητες*

$$\theta(x)=\pi(x)\log x-\int_2^x\frac{\pi(t)}{t}\,dt,$$

και

$$\pi(x)=\frac{\theta(x)}{\log x}+\int_2^x\frac{\theta(t)}{t(\log t)^2}\,dt.$$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 1.1 με $y = 2$,

$$a_n = \mathbf{1}_{\{n \text{ πρώτος}\}}, \qquad f(t) = \log t, \qquad A(t) = \sum_{n \le t} a_n = \pi(t).$$

Τότε

$$\sum_{2 < n \le x} a_n f(n) = \sum_{2 < p \le x} \log p = \theta(x) - \log 2.$$

Το Θεώρημα 1.1 δίνει

$$\theta(x) - \log 2 = \pi(x) \log x - \pi(2) \log 2 - \int_2^x \pi(t)\, \frac{dt}{t}.$$

Επειδή $\pi(2) = 1$, οι όροι $\log 2$ απαλείφονται, και παίρνουμε

$$\theta(x) = \pi(x) \log x - \int_2^x \frac{\pi(t)}{t}\, dt.$$

Εφαρμόζουμε πάλι το Θεώρημα 1.1 με $y = 2$,

$$a_n = (\log n)\, \mathbf{1}_{\{n \text{ πρώτος}\}}, \qquad f(t) = \frac{1}{\log t}, \qquad A(t) = \sum_{n \le t} a_n = \theta(t).$$

Τότε

$$\sum_{2 < n \le x} a_n f(n) = \sum_{2 < p \le x} \frac{\log p}{\log p} = \pi(x) - 1,$$

επομένως

$$\pi(x) - 1 = \theta(x) \frac{1}{\log x} - \theta(2) \frac{1}{\log 2} - \int_2^x \theta(t)\, f'(t)\, dt.$$

Επειδή $\theta(2) = \log 2$, ο όρος $\theta(2)/\log 2$ είναι 1 και απαλείφεται με το -1 αριστερά. Επίσης

$$f'(t) = \left(\frac{1}{\log t} \right)' = -\frac{1}{t (\log t)^2}.$$

Άρα

$$\pi(x) = \frac{\theta(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\theta(t)}{t (\log t)^2}\, dt.$$

□

Θεώρημα 1.5. *Για κάθε $x \ge 1$ ισχύει*

$$0 \le \psi(x) - \theta(x) \le \frac{\sqrt{x} (\log x)^2}{2 \log 2}. \tag{2}$$

Ειδικότερα, για $x \ge 2$ έχουμε

$$\psi(x) = \theta(x) + O\big(\sqrt{x} (\log x)^2\big).$$

Απόδειξη. Η ανισότητα $\psi(x) - \theta(x) \ge 0$ είναι άμεση, αφού η ψ περιλαμβάνει όλους τους όρους της θ και επιπλέον τις συνεισφορές από πρώτες δυνάμεις p^k με $k \ge 2$.

Για το άνω φράγμα, ξεκινάμε από τον ορισμό

$$\psi(x) = \sum_{n \le x} \Lambda(n) = \sum_{p^k \le x} \Lambda(p^k).$$

Ομαδοποιώντας ως προς τον εκθέτη k παίρνουμε

$$\psi(x) = \sum_{k\geq 1} \sum_{p\leq x^{1/k}} \log p = \sum_{k\geq 1} \theta\big(x^{1/k}\big).$$

Το άθροισμα ως προς k είναι στην πράξη πεπερασμένο, διότι $\theta(y) = 0$ όταν $y < 2$ (δεν υπάρχουν πρώτοι ≤ 1). Άρα $\theta(x^{1/k}) = 0$ για $x^{1/k} < 2$, δηλαδή για

$$k > \frac{\log x}{\log 2}.$$

Συνεπώς

$$\psi(x) - \theta(x) = \sum_{k\geq 2} \theta(x^{1/k}) = \sum_{2\leq k\leq \log x/\log 2} \theta(x^{1/k}).$$

Για $k \geq 2$ έχουμε $x^{1/k} \leq \sqrt{x}$, άρα (μονοτονία της θ)

$$\theta(x^{1/k}) \leq \theta(\sqrt{x}) \quad \text{για κάθε } k \geq 2.$$

Επομένως

$$\psi(x) - \theta(x) \leq \theta(\sqrt{x}) \cdot \frac{\log x}{\log 2}.$$

Τέλος,

$$\theta(\sqrt{x}) = \sum_{p\leq\sqrt{x}} \log p \leq \sum_{p\leq\sqrt{x}} \log\sqrt{x} \leq \sqrt{x}\log\sqrt{x}.$$

Άρα

$$\psi(x) - \theta(x) \leq \sqrt{x}\log\sqrt{x} \cdot \frac{\log x}{\log 2} = \sqrt{x} \cdot \frac{(\log x)^2}{2\log 2},$$

που είναι ακριβώς το (2). □

Λήμμα 1.6. *Για $x \geq 3$ ισχύει*

$$\int_2^x \frac{dt}{\log t} \leq \frac{C_1 x}{\log x}, \qquad \int_2^x \frac{dt}{(\log t)^2} \leq \frac{C_2 x}{(\log x)^2}.$$

Απόδειξη. Θέτουμε $u = \sqrt{x}$. Για $t \in [u, x]$ έχουμε $\log t \geq \log u = \frac{1}{2}\log x$. Άρα

$$\int_2^x \frac{dt}{\log t} = \int_2^u \frac{dt}{\log t} + \int_u^x \frac{dt}{\log t} \leq \frac{u-2}{\log 2} + \frac{x-u}{\frac{1}{2}\log x} = \mathcal{O}\left(\sqrt{x} + \frac{x}{\log x}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

Ομοίως,

$$\int_2^x \frac{dt}{(\log t)^2} \leq u + \frac{x-u}{(\frac{1}{2}\log x)^2} \ll \sqrt{x} + \frac{x}{(\log x)^2} \ll \frac{x}{(\log x)^2}.$$

□

Θεώρημα 1.7. *Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}, \tag{3}$$

$$\theta(x) \sim x, \tag{4}$$

$$\psi(x) \sim x. \tag{5}$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 1.4 έχουμε, για $x \geq 2$,

$$\theta(x) = \pi(x)\log x - \int_2^x \frac{\pi(t)}{t}\,dt.$$

Διαιρώντας με x και γράφοντας $\frac{\pi(x)\log x}{x} = \frac{\pi(x)}{x/\log x}$ παίρνουμε

$$\frac{\theta(x)}{x} = \frac{\pi(x)}{x/\log x} - \frac{1}{x}\int_2^x \frac{\pi(t)}{t}\,dt. \tag{6}$$

(3) $\implies$ (4). Υποθέτουμε ότι $\pi(x) \sim x/\log x$. Τότε υπάρχει σταθερά $C > 0$ ώστε για t μεγάλα

$$\pi(t) \leq C\frac{t}{\log t}.$$

Άρα

$$\frac{1}{x}\int_2^x \frac{\pi(t)}{t}\,dt \ll \frac{1}{x}\int_2^x \frac{dt}{\log t} \ll \frac{1}{\log x}.$$

Συνεπώς

$$\frac{1}{x}\int_2^x \frac{\pi(t)}{t}\,dt \longrightarrow 0 \qquad (x \to \infty).$$

Επιστρέφοντας στην (6) και χρησιμοποιώντας ότι $\frac{\pi(x)}{x/\log x} \to 1$, παίρνουμε $\frac{\theta(x)}{x} \to 1$, δηλαδή $\theta(x) \sim x$.

(4) $\implies$ (3). Από το Θεώρημα 1.4έχουμε επίσης

$$\pi(x) = \frac{\theta(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\theta(t)}{t(\log t)^2}\,dt,$$

άρα

$$\frac{\pi(x)}{x/\log x} = \frac{\theta(x)}{x} + \frac{\log x}{x}\int_2^x \frac{\theta(t)}{t(\log t)^2}\,dt. \tag{7}$$

Υποθέτουμε $\theta(x) \sim x$. Τότε υπάρχει σταθερά $C > 0$ ώστε για t μεγάλα $\theta(t) \leq Ct$. Έτσι

$$\frac{\log x}{x}\int_2^x \frac{\theta(t)}{t(\log t)^2}\,dt \ll \frac{\log x}{x}\int_2^x \frac{dt}{(\log t)^2} \ll \frac{1}{\log x}.$$

Στην (7) λοιπόν, ο δεύτερος όρος τείνει στο 0 και ο πρώτος τείνει στο 1, οπότε $\frac{\pi(x)}{x/\log x} \to 1$, δηλαδή $\pi(x) \sim x/\log x$.

(5) $\iff$ (4). Από το Θεώρημα 1.5 ισχύει $0 \leq \psi(x) - \theta(x) \leq C\sqrt{x}(\log x)^2$ για $x \geq 2$. Διαιρώντας με x παίρνουμε

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\psi(x)}{x} - \frac{\theta(x)}{x}\right) = 0.$$

Άρα $\theta(x) \sim x$ αν και μόνο αν $\psi(x) \sim x$.

Συμπεραίνουμε ότι (3), (4), (5) είναι ισοδύναμες. □

Εφόσον θέλουμε να αποδείξουμε ότι $\psi(x) \sim x$, κάνουμε την πρώτη βασική αναγωγή, με βάση το παρακάτω Θεώρημα.

Θεώρημα 1.8 (Korevaar–Zagier). *Έστω $(a_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία με $a_n \geq 0$ και ορίζουμε, για $x \geq 1$,*

$$A(x) := \sum_{n\leq x} a_n.$$

Αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_1^\infty \frac{A(x) - x}{x^2}\,dx$$

συγκλίνει, τότε $A(x) \sim x$, καθώς $x \to \infty$.

Απόδειξη. Θέτουμε

$$I(y) = \int_y^\infty \frac{A(t) - t}{t^2}\, dt.$$

Η υπόθεση ότι $\int_1^\infty \frac{A(t)-t}{t^2}\, dt$ συγκλίνει ισοδυναμεί με $I(y) \to 0$. Θα αποδείξουμε ότι $A(x)/x \to 1$.

Υποθέτουμε, προς άτοπο, ότι $\limsup_{x\to\infty} A(x)/x > 1$. Τότε υπάρχει $\lambda > 1$ και άπειρα x με $A(x) \geq \lambda x$. Για τέτοιο x και κάθε $t \in [x, \lambda x]$ ισχύει $A(t) \geq A(x) \geq \lambda x$, άρα

$$I(x) - I(\lambda x) = \int_x^{\lambda x} \frac{A(t) - t}{t^2}\, dt \geq \int_x^{\lambda x} \frac{\lambda x - t}{t^2}\, dt.$$

Με την αλλαγή μεταβλητής $t = vx$ παίρνουμε

$$\int_x^{\lambda x} \frac{\lambda x - t}{t^2}\, dt = \int_1^\lambda \frac{\lambda - v}{v^2}\, dv = \lambda - 1 - \log \lambda > 0.$$

Όμως $I(x) \to 0$ και $I(\lambda x) \to 0$, άρα $I(x) - I(\lambda x) \to 0$, άτοπο. Ανάλογα αποκλείεται και η σχέση $\liminf_{x\to\infty} A(x)/x < 1$. Άρα $A(x)/x \to 1$. □

1.2 Ένα φυσικό αντικείμενο: Mellin–τύπου ολοκλήρωμα

Για $\sigma > 1$ ορίζουμε

$$F(\sigma) := \int_1^\infty \frac{\psi(x) - x}{x^{\sigma+1}}\, dx. \tag{8}$$

Τυπικά,

$$F(1) = \int_1^\infty \frac{\psi(x) - x}{x^2}\, dx,$$

άρα το ερώτημα είναι αν το $F(\sigma)$ μπορεί να «κατέβει» μέχρι $\sigma = 1$ με πεπερασμένη τιμή. Προς το παρόν εργαζόμαστε μόνο στο $\sigma > 1$, όπου όλα είναι απολύτως νόμιμα.

1.3 Η σύνδεση με την συνάρτηση Mangoldt

Λήμμα 1.9. *Για κάθε $\sigma > 1$ ισχύει*

$$\int_1^\infty \frac{\psi(x)}{x^{\sigma+1}}\, dx = \frac{1}{\sigma} \sum_{n=1}^\infty \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma}.$$

Απόδειξη. Από τον ορισμό $\psi(x) = \sum_{n\leq x} \Lambda(n)$ και επειδή $\Lambda(n) \geq 0$, μπορούμε να εφαρμόσουμε Tonelli και να ανταλλάξουμε άθροισμα–ολοκλήρωμα:

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{\psi(x)}{x^{\sigma+1}}\, dx &= \int_1^\infty \left(\sum_{n\leq x} \Lambda(n) \right) x^{-\sigma-1}\, dx \\
&= \sum_{n=1}^\infty \Lambda(n) \int_1^\infty \mathbf{1}_{\{n\leq x\}}\, x^{-\sigma-1}\, dx = \sum_{n=1}^\infty \Lambda(n) \int_n^\infty x^{-\sigma-1}\, dx.
\end{aligned}$$

Για $\sigma > 0$ έχουμε

$$\int_n^\infty x^{-\sigma-1}\, dx = \frac{1}{\sigma} n^{-\sigma},$$

οπότε παίρνουμε το ζητούμενο. □

Επιπλέον για κάθε $\sigma > 1$ ισχύει

$$\int_1^\infty \frac{x}{x^{\sigma+1}}\,dx = \int_1^\infty x^{-\sigma}\,dx = \frac{1}{\sigma-1},$$

επομένως παίρνουμε την ακόλουθη ισότητα.

Πρόταση 1.10. *Για κάθε $\sigma > 1$ ισχύει*

$$F(\sigma) = \frac{1}{\sigma}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^\sigma} - \frac{1}{\sigma-1}. \tag{9}$$

Άρα το πρόβλημά μας μεταφέρθηκε φυσικά στη μελέτη της σειράς Dirichlet

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^\sigma}.$$

1.4 Σύνδεση με την συνάρτηση ζ

Εισάγουμε την συνάρτηση ζ ως σειρά Dirichlet:

$$\zeta(\sigma) := \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\sigma} \qquad (\sigma > 1). \tag{10}$$

Λήμμα 1.11 (Παραγώγιση της ζ για $\sigma > 1$). *Για κάθε $\sigma > 1$ ισχύει*

$$\zeta'(\sigma) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n^\sigma}.$$

Απόδειξη. Για κάθε $\varepsilon > 0$ η σειρά $\sum_{n\geq 1}\frac{\log n}{n^{1+\varepsilon}}$ συγκλίνει, οπότε η σειρά των παραγώγων συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[1+\varepsilon, \infty)$ (Weierstrass M–test). Άρα επιτρέπεται η παραγώγιση της (10) για $\sigma > 1$. □

Το κρίσιμο αριθμητικό γεγονός είναι μια ταυτότητα για τη von Mangoldt συνάρτηση.

Λήμμα 1.12 (Ταυτότητα διαιρετών για Λ). *Για κάθε ακέραιο $n \geq 1$ ισχύει*

$$\log n = \sum_{d\mid n}\Lambda(d). \tag{11}$$

Απόδειξη. Αν $n = \prod_{j=1}^m p_j^{\alpha_j}$, τότε $\log n = \sum_{j=1}^m \alpha_j \log p_j$. Οι διαιρέτες d του n με $\Lambda(d) \neq 0$ είναι ακριβώς οι δυνάμεις p_j^k με $1 \leq k \leq \alpha_j$, άρα

$$\sum_{d\mid n}\Lambda(d) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{\alpha_j}\log p_j = \sum_{j=1}^{m}\alpha_j\log p_j = \log n.$$

□

Λήμμα 1.13. *Για κάθε $\sigma > 1$ η σειρά $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{\Lambda(n)}{n^\sigma}$ συγκλίνει απολύτως.*

Απόδειξη. Ισχύει $\Lambda(n) \leq \log n$, άρα

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\Lambda(n)|}{n^\sigma} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n^\sigma} < \infty \qquad (\sigma > 1).$$

□

Θεώρημα 1.14. *Για κάθε $\sigma > 1$ ισχύει*

$$-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma}. \tag{12}$$

Απόδειξη. Από το Λήμμα 1.11 έχουμε

$$-\zeta'(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^\sigma}.$$

Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα (11):

$$-\zeta'(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} \sum_{d|n} \Lambda(d).$$

Για $\sigma > 1$ όλοι οι όροι είναι μη αρνητικοί, οπότε (Tonelli) αναδιατάσσουμε:

$$\begin{aligned} -\zeta'(\sigma) &= \sum_{d=1}^{\infty} \Lambda(d) \sum_{\substack{n \geq 1 \\ d|n}} \frac{1}{n^\sigma} = \sum_{d=1}^{\infty} \Lambda(d) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(dm)^\sigma} \\ &= \left(\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\Lambda(d)}{d^\sigma} \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^\sigma} \right) = \left(\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\Lambda(d)}{d^\sigma} \right) \zeta(\sigma). \end{aligned}$$

Επειδή $\zeta(\sigma) > 0$ για $\sigma > 1$, διαιρούμε και παίρνουμε την (12). $\square$

1.5 Συμπέρασμα

Συνδυάζοντας την Πρόταση 1.10 με το Θεώρημα 1.14 παίρνουμε, για κάθε $\sigma > 1$,

$$F(\sigma) = -\frac{1}{\sigma}\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} - \frac{1}{\sigma - 1}. \tag{13}$$

Ξεκινήσαμε από τη ψ και το κριτήριο Korevaar–Zagier, και φτάσαμε στο ότι η μελέτη της σύγκλισης του (??) ισοδυναμεί με το να καταλάβουμε τη συμπεριφορά του δεξιού μέλους του (13) καθώς $\sigma \downarrow 1$.

Γιατί *αναγκαστικά* θα περάσουμε σε μιγαδική ανάλυση.

Παρατήρηση 1.15 (Γιατί δεν αρκεί να μείνουμε στο $\sigma \in \mathbb{R}$). Μέχρι εδώ δουλέψαμε μόνο με πραγματικά $\sigma > 1$. Το επόμενο βήμα θα ήταν να περάσουμε στο

$$F(1) = \int_1^\infty \frac{\psi(x) - x}{x^2}\, dx,$$

αλλά αυτό δεν προκύπτει μόνο από τη γνώση του $F(\sigma)$ για $\sigma > 1$. Πράγματι, αν πάρουμε

$$E(x) := x \sin(\log x), \qquad F_E(\sigma) := \int_1^\infty \frac{E(x)}{x^{\sigma+1}}\, dx = \int_1^\infty \frac{\sin(\log x)}{x^\sigma}\, dx,$$

με την αλλαγή μεταβλητής $u = \log x$ προκύπτει

$$F_E(\sigma) = \int_0^\infty e^{-(\sigma-1)u} \sin u\, du = \frac{1}{(\sigma-1)^2 + 1},$$

άρα $\lim_{\sigma\downarrow 1} F_E(\sigma) = 1$. Πράγματι, ένας γρήγορος τρόπος για τον τελευταίο υπολογισμό είναι

$$\int_0^\infty e^{-(\sigma-1)u}\sin u\,du = \Im\int_0^\infty e^{-(\sigma-1)u}e^{iu}\,du = \Im\int_0^\infty e^{-(\sigma-1-i)u}\,du.$$

Για $\sigma > 1$ έχουμε $\Re(\sigma - 1 - i) = \sigma - 1 > 0$, άρα

$$\int_0^\infty e^{-(\sigma-1-i)u}\,du = \frac{1}{\sigma-1-i}.$$

Επομένως

$$\int_0^\infty e^{-(\sigma-1)u}\sin u\,du = \Im\frac{1}{\sigma-1-i} = \Im\left(\frac{\sigma-1+i}{(\sigma-1)^2+1}\right) = \frac{1}{(\sigma-1)^2+1}.$$

Ωστόσο

$$F_E(1) = \int_1^\infty \frac{\sin(\log x)}{x}\,dx = \int_0^\infty \sin u\,du,$$

που δεν συγκλίνει. Δηλαδή: ακόμη και πολύ καλή συμπεριφορά για όλα τα $\sigma > 1$ (και μάλιστα ύπαρξη ορίου στο $\sigma \downarrow 1$) δεν εγγυάται σύγκλιση στο $\sigma = 1$.

Η σωστή πρόσθετη πληροφορία είναι να ελέγξουμε την *οριακή ευθεία* $\Re(s) = 1$, δηλαδή τι συμβαίνει για $s = \sigma + it$. Στο παραπάνω παράδειγμα, ο αντίστοιχος μετασχηματισμός είναι

$$F_E(s) = \frac{1}{(s-1)^2+1},$$

που έχει πόλους στα $s = 1 \pm i$, δηλαδή πάνω στην $\Re(s) = 1$. Αυτές οι ανωμαλίες αντιστοιχούν σε ταλαντώσεις και είναι ακριβώς αυτό που πρέπει να αποκλείσουμε στην περίπτωση της ζ.

2 Επέκταση του Ορισμού της συνάρτησης ζ

Λήμμα 2.1. *Έστω $(a_n)_{n\geq 1}$ με $a_n \in \mathbb{C}$ και έστω*

$$F(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \qquad s = \sigma + it.$$

Αν υπάρχει $\sigma_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^{\sigma_0}} < \infty$, τότε για κάθε $\sigma_1 > \sigma_0$ η σειρά συγκλίνει απολύτως και ομοιόμορφα στο ημιεπίπεδο $\Re(s) \geq \sigma_1$. Επιπλέον, η F είναι ολόμορφη στο $\Re(s) > \sigma_0$ και

$$F'(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \log n}{n^s},$$

με ομοιόμορφη σύγκλιση σε κάθε $\Re(s) \geq \sigma_1 > \sigma_0$.

Απόδειξη. Για s με $\Re(s) = \sigma \geq \sigma_1$ έχουμε

$$\left|\frac{a_n}{n^s}\right| = \frac{|a_n|}{n^\sigma} \leq \frac{|a_n|}{n^{\sigma_1}}.$$

Επειδή $\sum_{n\geq 1} \frac{|a_n|}{n^{\sigma_1}} < \infty$, το M-κριτήριο του Weierstrass δίνει ομοιόμορφη σύγκλιση στο $\Re(s) \geq \sigma_1$. Άρα η F είναι συνεχής εκεί.

Για την ολομορφία, παρατηρούμε ότι κάθε όρος $s \mapsto a_n n^{-s} = a_n e^{-s \log n}$ είναι ολόμορφη και για $\sigma \geq \sigma_1$ ισχύει

$$\left|\frac{a_n \log n}{n^s}\right| = \frac{|a_n| \log n}{n^\sigma} \leq \frac{|a_n| \log n}{n^{\sigma_1}}.$$

Αλλά για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $\log n \leq n^\varepsilon$ για n αρκετά μεγάλο, οπότε (π.χ. παίρνοντας $\varepsilon = (\sigma_1 - \sigma_0)/2$) η $\sum \frac{|a_n| \log n}{n^{\sigma_1}}$ συγκλίνει. Άρα η σειρά των παραγώγων συγκλίνει ομοιόμορφα όταν $\Re(s) \geq \sigma_1$. Από το Θεώρημα ?? συμπεραίνουμε ότι F είναι ολόμορφη και ότι επιτρέπεται παραγωγίση όρο-όρο. □

Πρόταση 2.2. *Για $\Re(s) > 1$ ορίζουμε*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Τότε η σειρά συγκλίνει απολύτως για $\Re(s) > 1$, ορίζει ολόμορφη συνάρτηση στο $\{s : \Re(s) > 1\}$, και για κάθε $\Re(s) > 1$ ισχύει

$$\zeta'(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^s},$$

με ομοιόμορφη σύγκλιση σε κάθε ημιεπίπεδο $\Re(s) \geq 1 + \delta$ ($\delta > 0$).

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το Λήμμα 2.1 με $a_n \equiv 1$ και $\sigma_0 = 1$. □

Παρατήρηση 2.3. Θέτουμε $H_1 := \{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > 1\}$. Η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο H_1.

Πράγματι, έστω προς άτοπο ότι συγκλίνει ομοιόμορφα στο H_1. Τότε, από το κριτήριο Cauchy για ομοιόμορφη σύγκλιση, για $\varepsilon = 1$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $\ell > k \geq N$ και κάθε $s \in H_1$ να ισχύει

$$\left| \sum_{n=k}^{\ell} \frac{1}{n^s} \right| < 1.$$

Ειδικότερα, αυτό ισχύει για κάθε *πραγματικό* $s > 1$ (αφού $(1, \infty) \subset H_1$). Για πραγματικό $s > 1$ όλοι οι όροι είναι θετικοί, άρα

$$\sum_{n=k}^{\ell} \frac{1}{n^s} < 1 \qquad (\ell > k \geq N,\ s > 1).$$

Αφήνοντας τώρα $s \to 1^+$, και χρησιμοποιώντας ότι για κάθε σταθερά ℓ, k έχουμε $\frac{1}{n^s} \to \frac{1}{n}$, παίρνουμε

$$\sum_{n=k}^{\ell} \frac{1}{n} \leq 1 \qquad (\ell > k \geq N).$$

Τέλος, αφήνοντας $\ell \to \infty$ καταλήγουμε ότι

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n} \leq 1 \qquad (k \geq N),$$

άτοπο, επειδή η αρμονική σειρά αποκλίνει. Άρα η αρχική υπόθεση είναι ψευδής.

Πρόταση 2.4. *Θέτουμε*

$$F(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

Τότε η F είναι καλά ορισμένη και ολόμορφη στο $\Re(s) > 1$, και

$$F'(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n) \log n}{n^s},$$

με ομοιόμορφη σύγκλιση σε κάθε $\Re(s) \geq 1 + \delta$.

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε ότι $0 \leq \Lambda(n) \leq \log n$ για κάθε $n \geq 2$. Για $\sigma > 1$ έχουμε

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{|\Lambda(n)|}{n^\sigma} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n^\sigma} < \infty,$$

άρα εφαρμόζουμε το Λήμμα 2.1 με $\sigma_0 = 1$. □

Πρόταση 2.5. *Θεωρούμε το ημιεπίπεδο $\Omega := \{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > 1\}$. Υποθέτουμε ότι για κάθε* πραγματικό $s > 1$ *έχει ήδη αποδειχθεί η ταυτότητα*

$$-\zeta'(s) = \zeta(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

Τότε η ίδια ταυτότητα ισχύει για κάθε μιγαδικό $s \in \Omega$.

Απόδειξη. Από την Πρόταση 2.2 η ζ και η ζ' είναι ολόμορφες στο Ω. Από την Πρόταση 2.4 η

$$F(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$$

είναι ολόμορφη στο Ω. Άρα και το γινόμενο $\zeta(s)F(s)$ είναι ολόμορφη συνάρτηση στο Ω.

Ορίζουμε την ολόμορφη συνάρτηση

$$H(s) := -\zeta'(s) - \zeta(s)F(s) \qquad (s \in \Omega).$$

Από την υπόθεση, για κάθε πραγματικό $s > 1$ ισχύει $H(s) = 0$. Το σύνολο $(1, \infty) \subset \Omega$ έχει σημείο συσσώρευσης *εντός* του Ω (π.χ. στο $s = 2$), άρα από την Αρχή Αναλυτικής Συνέχισης (Identity Theorem) συμπεραίνουμε ότι $H \equiv 0$ σε όλο το Ω. Δηλαδή

$$-\zeta'(s) = \zeta(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s},$$

για κάθε $s \in \Omega$.

$\square$

Λήμμα 2.6. *Έστω $\Omega \subset \mathbb{C}$ ανοικτό, $s_0 \in \Omega$ και $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη. Υποθέτουμε ότι $f \not\equiv 0$ και ότι $f(s_0) = 0$. Τότε υπάρχει ακέραιος $m \geq 1$ και ολόμορφη συνάρτηση h σε κάποια γειτονιά του s_0 με $h(s_0) \neq 0$ τέτοια ώστε*

$$f(s) = (s - s_0)^m h(s)$$

για s κοντά στο s_0. Ο m είναι μοναδικός και λέγεται τάξη (ή πολλαπλότητα) του μηδενικού στο s_0.

Απόδειξη. Επειδή f είναι ολόμορφη, υπάρχει $r > 0$ και ανάπτυγμα Taylor

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (s - s_0)^n \qquad (|s - s_0| < r).$$

Από $f(s_0) = 0$ παίρνουμε $a_0 = 0$. Επειδή $f \not\equiv 0$, δεν είναι όλοι οι συντελεστές μηδέν, άρα υπάρχει ελάχιστος $m \geq 1$ με $a_m \neq 0$. Τότε

$$f(s) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n (s - s_0)^n = (s - s_0)^m \sum_{k=0}^{\infty} a_{m+k} (s - s_0)^k.$$

Θέτουμε

$$h(s) := \sum_{k=0}^{\infty} a_{m+k} (s - s_0)^k.$$

Η h είναι ολόμορφη στο $|s - s_0| < r$ και $h(s_0) = a_m \neq 0$. Η μοναδικότητα του m προκύπτει από τη μοναδικότητα του Taylor αναπτύγματος. $\square$

Θεώρημα 2.7. *Για κάθε s με $\Re(s) > 1$ ισχύει $\zeta(s) \neq 0$.*

Απόδειξη. Έστω προς άτοπο ότι υπάρχει s_0 με $\Re(s_0) > 1$ και $\zeta(s_0) = 0$. Η ζ είναι ολόμορφη στο $\Re(s) > 1$, άρα το s_0 είναι μηδενικό κάποιας τάξης $m \geq 1$, δηλαδή υπάρχει ολόμορφη h κοντά στο s_0 με $h(s_0) \neq 0$ ώστε

$$\zeta(s) = (s - s_0)^m h(s).$$

Τότε

$$\zeta'(s) = m(s-s_0)^{m-1}h(s) + (s-s_0)^m h'(s),$$

οπότε η $\zeta'(s)$ έχει μηδενικό ακριβώς τάξης $m-1$ στο s_0. Ισοδύναμα, $-\zeta'(s)$ έχει μηδενικό ακριβώς τάξης $m-1$ στο s_0.

Από την Πρόταση 2.5 έχουμε στο $\Re(s) > 1$ την ταυτότητα

$$-\zeta'(s) = \zeta(s)\, F(s), \qquad F(s) := \sum_{n\geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

Η F είναι ολόμορφη στο $\Re(s) > 1$ (από απόλυτη σύγκλιση), άρα κοντά στο s_0 είναι πεπερασμένη. Επομένως το γινόμενο $\zeta(s)F(s)$ έχει μηδενικό τάξης *τουλάχιστον* m στο s_0, αφού η ζ έχει τάξη m εκεί.

Άρα το αριστερό μέλος $-\zeta'(s)$ θα έπρεπε να έχει μηδενικό τάξης $\geq m$ στο s_0, που αντιφάσκει με το ότι έχει τάξη ακριβώς $m-1$. Άτοπο. Συνεπώς $\zeta(s) \neq 0$ για $\Re(s) > 1$. □

2.1 Μερομορφική συνέχεια της $\zeta(s)$ στο $\Re(s) > 0$

Θεώρημα 2.8. *Για $s \in \mathbb{C}$ με $\sigma = \mathrm{Re}(s) > 1$ ισχύει*

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s\int_1^\infty \frac{\{t\}}{t^{s+1}}\, dt.$$

Απόδειξη. Απ τον τύπο αθροίσεως του Euler, παίρνουμε

$$\sum_{n\leq x} n^{-s} = 1 + \int_1^x t^{-s}\, dt + \int_1^x \{t\}\, (t^{-s})'\, dt - \frac{\{x\}}{x^s}.$$

Υπολογίζοντας τα παραπάνω ολοκληρώματα καταλήγουμε στην ισότητα

$$\sum_{n\leq x} n^{-s} = \frac{x^{1-s}}{1-s} + \frac{s}{s-1} - \frac{\{x\}}{x^s} - s\int_1^x \frac{\{t\}}{t^{s+1}}\, dt.$$

Περνώντας στο όριο $x \to \infty$ (και χρησιμοποιώντας ότι $\sigma > 1$ ώστε $x^{1-s} \to 0$ και $\{x\}/x^s \to 0$), παίρνουμε το ζητούμενο. □

Θεώρημα 2.9. *Η σχέση του Θεωρήματος 2.8 δίνει αναλυτική συνέχιση της $\zeta(s)$ στο ημιεπίπεδο $\sigma > 0$, με απλό πόλο στο $s = 1$ και υπόλοιπο 1.*

Απόδειξη. Εφόσον η συνάρτηση

$$s \longmapsto \frac{s}{s-1} = \frac{1}{s-1} + 1$$

είναι αναλυτική σε κάθε σημείο του $\sigma > 0$ εκτός από έναν απλό πόλο στο $s = 1$ με υπόλοιπο 1, αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση

$$f(s) = \int_1^\infty \frac{\{t\}}{t^{s+1}}\, dt$$

είναι αναλυτική στο $\sigma > 0$.

Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$f_m(s) = \int_1^m \frac{\{t\}}{t^{s+1}}\, dt \qquad \text{για } s \in \mathbb{C} \text{ με } \sigma > 0.$$

Επειδή το ολοκληρωτέο είναι αναλυτική συνάρτηση του s, δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι f_m είναι αναλυτική στο ημιεπίπεδο $\sigma > 0$.

Εναλλακτικά, γράφουμε το $f_m(s)$ ως δυναμοσειρά. Παρατηρούμε ότι

$$f_m(s) = \int_1^m \{t\}\ e^{-(s+1)\log t}\, dt = \int_1^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{t\}\,(-\log t)^n (s+1)^n}{n!}\, dt,$$

και ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{\{t\}\,(-\log t)^n (s+1)^n}{n!} \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\big(|\log t|(|s|+1)\big)^n}{n!} = e^{|\log t|(|s|+1)}.$$

Άρα

$$\int_1^m \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{\{t\}\,(-\log t)^n (s+1)^n}{n!} \right| dt \leq \int_1^m t^{|s|+1}\, dt < \infty.$$

Με το θεώρημα Fubini, μπορούμε να αλλάξουμε τη σειρά ολοκλήρωσης και αθροίσεως και παίρνουμε

$$f_m(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(s+1)^n}{n!} \int_1^m \{t\}\,(-\log t)^n\, dt,$$

που είναι δυναμοσειρά ως προς το s.

Για να δούμε ότι $f_m \to f$ ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $\sigma > 0$, θεωρούμε το ημιεπίπεδο $\sigma \geq \delta$ και παίρνουμε

$$|f_m(s) - f(s)| \leq \int_m^{\infty} \frac{1}{t^{\sigma+1}}\, dt \ll \frac{1}{\sigma m^{\sigma}} \leq \frac{1}{\delta m^{\delta}}.$$

Άρα, αν $\varepsilon, \delta > 0$ δοθούν, μπορούμε να διαλέξουμε $M > 0$ που εξαρτάται από ε, δ αλλά όχι από το s (π.χ. $M = (\delta\varepsilon)^{-1/\delta}$) τέτοιο ώστε $|f_m(s) - f(s)| < \varepsilon$ για κάθε $m > M$ και κάθε $s \in \mathbb{C}$ με $\sigma \geq \delta$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

2.2 Μη μηδενισμός της ζ στη γραμμή $\Re(s) = 1$

Λήμμα 2.10. *Για $\Re(s) > 1$ ισχύει*

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s},$$

και η σειρά συγκλίνει απολύτως και ομοιόμορφα σε κάθε ημιεπίπεδο $\Re(s) \geq 1 + \varepsilon$.

Απόδειξη. Προκύπτει άμεσα από τα παραπάνω. □

Λήμμα 2.11. *Για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$ ισχύει*

$$P(\theta) := 3 + 4\cos\theta + \cos(2\theta) = 2(1 + \cos\theta)^2 \geq 0.$$

Λήμμα 2.12. *Έστω $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Για $\sigma > 1$ θέτουμε*

$$G(\sigma) := \big|\zeta(\sigma)\big|^3 \big|\zeta(\sigma + it)\big|^4 \big|\zeta(\sigma + 2it)\big|.$$

Τότε:

1. *$G(\sigma) \geq 1$ για κάθε $\sigma > 1$.*

2. *Πιο συγκεκριμένα,*

$$-\frac{d}{d\sigma}\log G(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma}}\,P\big(t\log n\big) \;\geq\; 0,$$

όπου P είναι όπως στο Λήμμα 2.11.

Απόδειξη. Για $\sigma > 1$ έχουμε $\zeta(\sigma) \neq 0$, άρα οι ποσότητες ζ'/ζ ορίζονται και είναι ολόμορφες.

Βήμα 1: Παράγωγος του $\log G(\sigma)$. Για κάθε $u \in \mathbb{R}$ και $\sigma > 1$ ισχύει

$$\frac{d}{d\sigma}\log|\zeta(\sigma+iu)| = \Re\left(\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+iu)\right).$$

Πράγματι, γράφουμε

$$\zeta(\sigma+it) = u(\sigma,t) + iv(\sigma,t), \qquad u, v : \Omega \to \mathbb{R},$$

και υποθέτουμε ότι $\zeta(\sigma+it) \neq 0$. Τότε

$$\log|\zeta(\sigma+it)| = \frac{1}{2}\log\big(u(\sigma,t)^2 + v(\sigma,t)^2\big),$$

οπότε, για t σταθερό,

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\log|\zeta(\sigma+it)| = \frac{u\,u_{\sigma} + v\,v_{\sigma}}{u^2+v^2}.$$

Από την άλλη, επειδή η ζ είναι ολόμορφη, έχουμε

$$\zeta'(\sigma+it) = u_{\sigma}(\sigma,t) + i\,v_{\sigma}(\sigma,t),$$

άρα

$$\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)} = \frac{u_{\sigma}+iv_{\sigma}}{u+iv} = \frac{(u_{\sigma}+iv_{\sigma})(u-iv)}{u^2+v^2} = \frac{u\,u_{\sigma}+v\,v_{\sigma}}{u^2+v^2} + i\,\frac{u\,v_{\sigma}-v\,u_{\sigma}}{u^2+v^2}.$$

Συνεπώς

$$\mathrm{Re}\bigg(\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\bigg) = \frac{u\,u_{\sigma}+v\,v_{\sigma}}{u^2+v^2} = \frac{\partial}{\partial\sigma}\log|\zeta(\sigma+it)|.$$

Επειδή $\big(\log\zeta\big)' = \zeta'/\zeta$ όπου $\zeta \neq 0$, καταλήγουμε

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\log|\zeta(\sigma+it)| = \mathrm{Re}\big((\log\zeta)'(\sigma+it)\big).$$

Άρα

$$\frac{d}{d\sigma}\log G(\sigma) = 3\,\Re\bigg(\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma)\bigg) + 4\,\Re\bigg(\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+it)\bigg) + \Re\bigg(\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+2it)\bigg).$$

Επομένως

$$-\frac{d}{d\sigma}\log G(\sigma) = 3\,\Re\bigg(-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma)\bigg) + 4\,\Re\bigg(-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+it)\bigg) + \Re\bigg(-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+2it)\bigg).$$

Βήμα 2: Χρήση της Dirichlet σειράς (Λήμμα 2.10). Για $\sigma > 1$ έχουμε

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+iu) = \sum_{n\geq 1}\frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma+iu}} = \sum_{n\geq 1}\frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma}}\,e^{-iu\log n},$$

και επειδή η σύγκλιση είναι απόλυτη, παίρνουμε πραγματικά μέρη όρο-όρο:

$$\Re\Big(-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+iu)\Big) = \sum_{n\geq 1}\frac{\Lambda(n)}{n^\sigma}\cos(u\log n).$$

Άρα

$$-\frac{d}{d\sigma}\log G(\sigma) = \sum_{n\geq 1}\frac{\Lambda(n)}{n^\sigma}\Big(3+4\cos(t\log n)+\cos(2t\log n)\Big) = \sum_{n\geq 1}\frac{\Lambda(n)}{n^\sigma}P\big(t\log n\big).$$

Με το Λήμμα 2.11 έχουμε $P(\cdot)\geq 0$ και με $\Lambda(n)\geq 0$ παίρνουμε

$$-\frac{d}{d\sigma}\log G(\sigma)\geq 0.$$

Άρα $\frac{d}{d\sigma}\log G(\sigma)\leq 0$, δηλαδή η $\log G$ είναι φθίνουσα ως προς σ.

Βήμα 3: Πέρασμα στο όριο $\sigma\to\infty$. Για κάθε σταθερό u έχουμε

$$\zeta(\sigma+iu) = 1+\sum_{n\geq 2}n^{-(\sigma+iu)} \quad\Rightarrow\quad \big|\zeta(\sigma+iu)-1\big|\leq \sum_{n\geq 2}n^{-\sigma}\xrightarrow[\sigma\to\infty]{} 0.$$

Άρα $\zeta(\sigma+iu)\to 1$, οπότε $G(\sigma)\to 1$ όταν $\sigma\to\infty$. Επειδή $\log G$ είναι φθίνουσα στο σ, έχουμε για κάθε $\sigma>1$:

$$\log G(\sigma)\geq \lim_{\sigma\to\infty}\log G(\sigma) = 0,$$

δηλαδή $G(\sigma)\geq 1$. $\square$

Θεώρημα 2.13. *Ισχύει* $\zeta(s)\neq 0$ *για κάθε* $s\in\mathbb{C}$ *με* $\Re(s)=1$.

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι $\zeta(1+it)\neq 0$ για κάθε $t\in\mathbb{R}$. Υποθέτουμε, προς άτοπο, ότι

$$\zeta(1+it)=0.$$

Από το Θεώρημα 2.9, η $\zeta(s)$ είναι αναλυτική σε κάθε σημείο της ευθείας $\Re(s)=1$ εκτός από ένα απλό πόλο στο $s=1$. Άρα $\zeta^3(\sigma)$ έχει πόλο τάξης 3 στο $\sigma=1$ και επίσης $\zeta^4(\sigma+it)$ έχει μηδενικό τάξης τουλάχιστον 4 στο $\sigma=1$ (δηλαδή στο σημείο $s=1+it$). Συνεπώς

$$\lim_{\sigma\to 1^+}\zeta^4(\sigma+it)\,\zeta^3(\sigma)=0.$$

Επιπλέον, επειδή ζ είναι αναλυτική στο σημείο $1+2it$ (αφού $t\neq 0$), είναι και συνεχής εκεί, οπότε

$$\lim_{\sigma\to 1^+}\zeta(\sigma+2it)=\zeta(1+2it).$$

Άρα

$$\lim_{\sigma\to 1^+}\zeta^4(\sigma+it)\,\zeta^3(\sigma)\,\zeta(\sigma+2it)=0.$$

Όμως, από το Λήμμα 2.12 ισχύει ότι για κάθε $\sigma>1$,

$$\big|\zeta^4(\sigma+it)\,\zeta^3(\sigma)\,\zeta(\sigma+2it)\big|\geq 1.$$

Επομένως το όριο καθώς $\sigma\to 1^+$ δεν μπορεί να είναι 0, που είναι άτοπο. Άρα η υπόθεση $\zeta(1+it)=0$ είναι ψευδής, και συνεπώς $\zeta(1+it)\neq 0$ για κάθε $t\neq 0$. Μαζί με το $t=0$ (όπου υπάρχει πόλος), παίρνουμε ότι $\zeta(s)\neq 0$ για κάθε s με $\Re(s)=1$. $\square$

Παρατήρηση 2.14. Γιατί επιλέξαμε *αυτές* τις δυνάμεις; Το τρικ βασίζεται σε δύο *ταυτόχρονες* απαιτήσεις:

(i) Θέλουμε μη αρνητικότητα. Θέλουμε ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο $P(\theta)$ τέτοιο ώστε

$$P(\theta) = a_0 + a_1 \cos\theta + a_2 \cos(2\theta) \geq 0 \quad \forall\theta,$$

για να συμπεράνουμε ότι

$$-\frac{d}{d\sigma}\log G(\sigma) = \sum_{n\geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma} P(t\log n) \geq 0.$$

Το απλούστερο "τετράγωνο" που δίνει πολυώνυμο μέχρι βαθμό 2 είναι

$$(1+\cos\theta)^2 = \frac{1}{2}\Big(3 + 4\cos\theta + \cos(2\theta)\Big).$$

Για να πάρουμε *ακέραιους* συντελεστές (ώστε να αντιστοιχούν σε *ακέραιες* δυνάμεις της ζ), πολλαπλασιάζουμε επί 2 και παίρνουμε ακριβώς

$$P(\theta) = 3 + 4\cos\theta + \cos(2\theta) = 2(1+\cos\theta)^2 \geq 0.$$

Αυτό εξηγεί το σχήμα των δυνάμεων $3, 4, 1$.

(ii) Θέλουμε το μηδενικό να "νικάει" τον πόλο στο 1. Κοντά στο $\sigma = 1$ έχουμε $|\zeta(\sigma)| \asymp (\sigma-1)^{-1}$ (πόλος τάξης 1), ενώ αν υπήρχε μηδενικό στο $1+it$ τάξης $m \geq 1$ τότε $|\zeta(\sigma+it)| \ll (\sigma-1)^m$. Άρα, αν πάρεις

$$|\zeta(\sigma)|^{a_0}\, |\zeta(\sigma+it)|^{a_1}$$

με *ίδιους* εκθέτες $a_0 = a_1$ (όπως θα προέκυπτε από το πολυώνυμο $1+\cos\theta$ ή $2+2\cos\theta$), τότε για απλό μηδενικό ($m=1$) θα έχεις εκθέτη

$$-(a_0) + a_1 m = -a_0 + a_0 \cdot 1 = 0,$$

δηλαδή το γινόμενο *δεν* τείνει αναγκαστικά στο 0 όταν $\sigma \downarrow 1$, άρα δεν παίρνεις αντίφαση από το $G(\sigma) \geq 1$.

Στο δικό μας $G(\sigma)$ οι εκθέτες είναι $a_0 = 3$ για τον πόλο στο $s = 1$ και $a_1 = 4$ για το υποτιθέμενο μηδενικό στο $1+it$. Τότε για $m = 1$ παίρνεις

$$-3 + 4\cdot 1 = 1 > 0,$$

οπότε *αναγκαστικά* $G(\sigma) \to 0$ αν υπήρχε μηδενικό, και έτσι κλείνει η αντίφαση. Γι' αυτό οι "συγκεκριμένες" δυνάμεις είναι ακριβώς αυτές που χρειάζονται: προέρχονται από *τετράγωνο* (άρα μη αρνητικότητα) και ταυτόχρονα έχουν $4 > 3$ (άρα το μηδενικό υπερισχύει του πόλου).

3 Το «μιγαδικό» Korevaar–Zagier

Θεώρημα 3.1 (Korevaar–Zagier). *Έστω $f : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ φραγμένη και ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό φραγμένο υποδιάστημα του $[0,\infty)$. Θέτουμε*

$$g(s) := \int_0^\infty f(x)e^{-sx}\,dx \qquad (\mathrm{Re}(s) > 0).$$

Υποθέτουμε ότι υπάρχει ανοικτό σύνολο $G \subset \mathbb{C}$ με $\{\,\mathrm{Re}(s) \geq 0\,\} \subset G$ και ολόμορφη επέκταση της g στο G (την οποία συμβολίζουμε πάλι με g). Τότε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int_0^\infty f(x)\,dx$$

συγκλίνει και ισχύει

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = g(0).$$

Απόδειξη. Θέτουμε $M := \sup_{x\ge 0}|f(x)| < \infty$. Για $T > 0$ ορίζουμε

$$g_T(s) := \int_0^T f(x)e^{-sx}\,dx \qquad (s\in\mathbb{C}).$$

1) Το g_T είναι ολόμορφο (entire). Για κάθε $s\in\mathbb{C}$ το $x\mapsto f(x)e^{-sx}$ είναι ολοκληρώσιμο στο $[0,T]$, άρα το $g_T(s)$ ορίζεται. Επιπλέον, για $h\neq 0$ γράφουμε

$$\frac{g_T(s+h)-g_T(s)}{h} = \int_0^T f(x)e^{-sx}\,\frac{e^{-hx}-1}{h}\,dx.$$

Για σταθερό s και για h μικρό, ισχύει (με το θεώρημα μέσης τιμής στην πραγματική μεταβλητή)

$$\left|\frac{e^{-hx}-1}{h}\right| \le x\,e^{|h|x} \le x\,e^{x} \qquad (0\le x\le T),$$

οπότε το ολοκληρωτέο κυριαρχείται από την ολοκληρώσιμη συνάρτηση $M\,x\,e^{x}e^{|s|x}$, όπου $M = \sup_{[0,T]}|f|$. Άρα, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης, μπορούμε να περάσουμε στο όριο $h\to 0$ μέσα στο ολοκλήρωμα και παίρνουμε

$$g_T'(s) = \int_0^T f(x)e^{-sx}\,\lim_{h\to 0}\frac{e^{-hx}-1}{h}\,dx = -\int_0^T x f(x)e^{-sx}\,dx.$$

Επομένως g_T είναι μιγαδικά παραγωγίσιμη σε κάθε $s\in\mathbb{C}$, άρα ολόμορφη στο $\mathbb{C}$.
2) Στόχος. Αρκεί να δείξουμε ότι $g_T(0)\to g(0)$ όταν $T\to\infty$. Πράγματι, $g_T(0) = \int_0^T f(x)\,dx$, άρα το $\int_0^\infty f$ συγκλίνει και ισούται με $g(0)$.
3) Επιλογή καμπύλης ολοκλήρωσης γύρω από το 0. Σταθεροποιούμε $R>0$. Θέτουμε

$$L_R := \{\, it:\ |t|\le 2R \,\} \subset \{\, \mathrm{Re}(s)=0 \,\} \subset G.$$

Για κάθε σημείο $z\in L_R$ υπάρχει ανοικτός δίσκος $B(z,r_z)\subset G$ (επειδή το G είναι ανοικτό). Από συμπάγεια του L_R (Heine–Borel) παίρνουμε πεπερασμένη υποκάλυψη, άρα υπάρχει $\delta=\delta(R)>0$ τέτοια ώστε

$$D := \{\, z\in\mathbb{C}:\ |z|<2R,\ \mathrm{Re}(z)>-2\delta \,\} \subset G.$$

Τότε επίσης η κλειστή καμπύλη

$$C := \partial\{\, z\in\mathbb{C}:\ |z|\le R,\ \mathrm{Re}(z)\ge -\delta \,\}$$

βρίσκεται μέσα στο D και περικλείει το 0. (Γεωμετρικά: είναι *τόξο* του κύκλου $|z|=R$ για $\mathrm{Re}(z)\ge -\delta$ μαζί με τη *χορδή* $\mathrm{Re}(z)=-\delta$.)
4) Τύπος Cauchy για $g-g_T$ και «κόλπο» Carleman. Η συνάρτηση $h_T(z) := g(z)-g_T(z)$ είναι ολόμορφη στο D (ως διαφορά δύο ολόμορφων). Άρα από τον τύπο του Cauchy στο 0 παίρνουμε

$$g(0)-g_T(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{g(z)-g_T(z)}{z}\,dz. \tag{14}$$

Παρατηρούμε τώρα ότι:

- Η $(g-g_T)(z)e^{zT}$ είναι ολόμορφη στο D και στο $z=0$ έχει την ίδια τιμή με $g-g_T$.
- Η $(g-g_T)(z)e^{zT}\cdot\dfrac{z}{R^2}$ είναι επίσης ολόμορφη στο D, άρα το ολοκλήρωμά της πάνω στο C είναι 0.

Συνεπώς, προσθέτοντας το μηδέν στο (14), παίρνουμε την ισοδυναμία

$$g(0) - g_T(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C (g(z) - g_T(z))\, e^{zT}\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)\frac{dz}{z}. \tag{15}$$

5) Διάσπαση $C = C_+ \cup C_-$**.** Θέτουμε

$$C_+ := C \cap \{\,\mathrm{Re}(z) \geq 0\,\}, \qquad C_- := C \cap \{\,\mathrm{Re}(z) \leq 0\,\}.$$

(Τα σημεία με $\mathrm{Re}(z) = 0$ είναι πεπερασμένα και δεν παίζουν ρόλο.)

6) Εκτίμηση στο C_+**.** Για $z \in C_+$ ισχύει $|z| = R$ και $\mathrm{Re}(z) > 0$, οπότε

$$g(z) - g_T(z) = \int_T^\infty f(t)e^{-zt}\,dt, \qquad \Rightarrow \qquad |g(z) - g_T(z)| \leq M\int_T^\infty e^{-(\mathrm{Re}\,z)\,t}dt = \frac{Me^{-(\mathrm{Re}\,z)T}}{\mathrm{Re}\,z}.$$

Επιπλέον, για $|z| = R$ έχουμε

$$\left|\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)\frac{1}{z}\right| = \frac{|1 + e^{2i\theta}|}{R} = \frac{2|\cos\theta|}{R} = \frac{2|\,\mathrm{Re}(z)|}{R^2},$$

όπου $z = Re^{i\theta}$. Άρα, στο C_+,

$$\left|(g - g_T)(z)\, e^{zT}\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)\frac{1}{z}\right| \leq \frac{Me^{-(\mathrm{Re}\,z)T}}{\mathrm{Re}\,z}\cdot e^{(\mathrm{Re}\,z)T}\cdot\frac{2\,\mathrm{Re}(z)}{R^2} = \frac{2M}{R^2}.$$

Επομένως

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_+}(g - g_T)(z)e^{zT}\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)\frac{dz}{z}\right| \leq \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2M}{R^2}\cdot\mathrm{length}(C_+) \leq \frac{M}{R}, \tag{16}$$

αφού $\mathrm{length}(C_+) \leq \pi R$.

7) Εκτίμηση στο C_-**: διάσπαση σε** g **και** g_T**.** Από (15),

$$\int_{C_-}(g - g_T)(\cdot) = \int_{C_-} g(\cdot) \;-\; \int_{C_-} g_T(\cdot).$$

(i) Ο όρος με g_T. Η συνάρτηση

$$z \longmapsto g_T(z)e^{zT}\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)\frac{1}{z}$$

είναι ολόμορφη σε περιοχή που περιέχει τον «αριστερό θύλακα» που περικλείεται ανάμεσα στο C_- και στο αριστερό ημικύκλιο

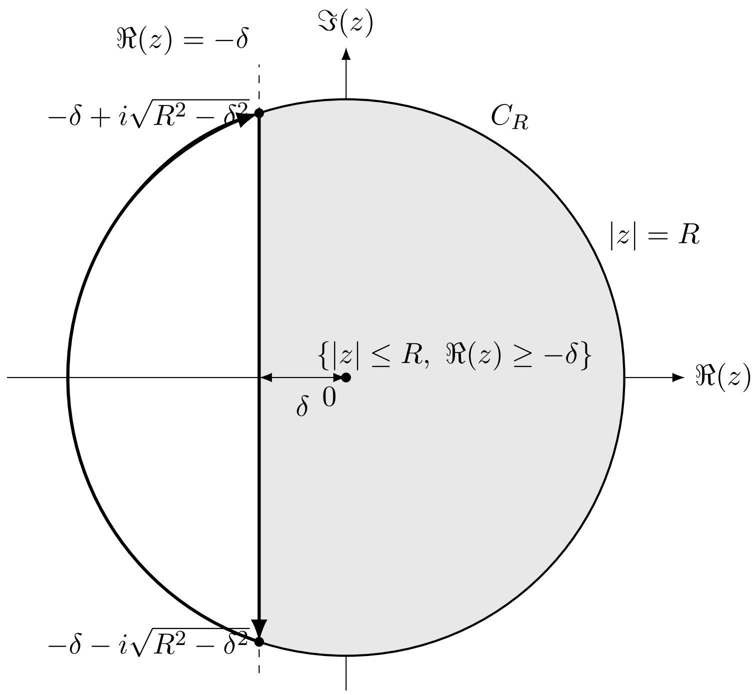
$$C'_- \;:=\; \{\,|z| = R,\; \mathrm{Re}(z) < 0\,\}$$

(εφόσον ο θύλακας αυτός δεν περιέχει το 0). Άρα, με παραμόρφωση καμπύλης (θεώρημα Cauchy),

$$\int_{C_-} g_T(z)e^{zT}\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)\frac{dz}{z} = \int_{C'_-} g_T(z)e^{zT}\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)\frac{dz}{z}.$$

Για $z \in C'_-$ έχουμε $\mathrm{Re}(z) < 0$ και

$$|g_T(z)| \leq \int_0^T |f(t)|e^{-(\mathrm{Re}\,z)t}dt \leq M\int_0^T e^{-(\mathrm{Re}\,z)t}dt \leq M\,\frac{e^{-(\mathrm{Re}\,z)T}}{|\,\mathrm{Re}\,z|}.$$



Σχήμα 1: Το χωρίο $\{|z| \le R,\ \Re(z) \ge -\delta\}$ (σκιασμένο) και το περίγραμμα C_R: η χορδή $\Re(z) = -\delta$ (κάθοδος) και το τόξο $|z| = R$ στο $\Re(z) \ge -\delta$ (άνοδος).

Άρα, όπως πριν (και πάλι $|z| = R$),

$$\left| g_T(z) e^{zT} \Big(1 + \frac{z^2}{R^2}\Big) \frac{1}{z} \right| \le \frac{M e^{-(\operatorname{Re} z)T}}{|\operatorname{Re} z|} \cdot e^{(\operatorname{Re} z)T} \cdot \frac{2|\operatorname{Re} z|}{R^2} = \frac{2M}{R^2}.$$

Έτσι παίρνουμε, ακριβώς όπως στο (16),

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_-} g_T(z) e^{zT} \Big(1 + \frac{z^2}{R^2}\Big) \frac{dz}{z} \right| \le \frac{M}{R}. \tag{17}$$

(ii) Ο όρος με g. Θέτουμε

$$H(z) := g(z) \Big(1 + \frac{z^2}{R^2}\Big) \frac{1}{z}.$$

Επειδή το C_- είναι συμπαγές, το $0 \notin C_-$ και η g είναι ολόμορφη (άρα συνεχής) σε γειτονιά του C_-, η H είναι συνεχής στο C_- και συνεπώς ομοιόμορφα φραγμένη εκεί:

$$B := \sup_{z \in C_-} |H(z)| < \infty.$$

Για κάθε $z \in C_-$ έχουμε $\operatorname{Re}(z) < 0$, άρα $e^{zT} \to 0$ καθώς $T \to \infty$ και επίσης

$$|e^{zT}| = e^{(\operatorname{Re} z)T} \le 1 \qquad (T > 0).$$

Επομένως

$$|H(z) e^{zT}| \le B \qquad (z \in C_-,\ T > 0),$$

και επειδή $H(z)e^{zT} \to 0$ σημειακά στο C_-, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης (με μέτρο μήκους πάνω στο C_-) παίρνουμε

$$\lim_{T \to \infty} \int_{C_-} H(z) e^{zT}\, dz = 0,$$

δηλαδή

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{C_-} g(z)e^{zT}\Big(1+\frac{z^2}{R^2}\Big)\frac{dz}{z} = 0. \tag{18}$$

8) Συμπέρασμα. Από (15) και τις (16), (17), (18) παίρνουμε: για κάθε σταθερό $R>0$,

$$\limsup_{T\to\infty} |g(0)-g_T(0)| \le \frac{2M}{R}.$$

Δεδομένου $\varepsilon>0$, επιλέγουμε R τόσο μεγάλο ώστε $2M/R \le \varepsilon/2$. Έπειτα, από (18) παίρνουμε T_0 τέτοιο ώστε για $T\ge T_0$ να ισχύει

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_-} g(z)e^{zT}\Big(1+\frac{z^2}{R^2}\Big)\frac{dz}{z}\right| \le \varepsilon/2.$$

Τότε, για κάθε $T\ge T_0$, από (15) προκύπτει $|g(0)-g_T(0)|\le\varepsilon$. Άρα $g_T(0)\to g(0)$.

Τέλος, επειδή $g_T(0)=\int_0^T f(x)\,dx$, συμπεραίνουμε ότι $\int_0^\infty f(x)\,dx$ συγκλίνει και ισούται με $g(0)$. □

Παρατήρηση 3.2 (Γιατί εισάγουμε το βάρος $e^{zT}\Big(1+\frac{z^2}{R^2}\Big)$). Το βάρος έχει διπλό ρόλο. Πρώτον, για $\mathrm{Re}(z)>0$ έχουμε

$$(g-g_T)(z) = \int_T^\infty f(x)e^{-zx}\,dx, \qquad \Rightarrow \qquad (g-g_T)(z)e^{zT} = \int_0^\infty f(T+u)e^{-zu}\,du,$$

οπότε $|(g-g_T)(z)e^{zT}| \le M/\mathrm{Re}(z)$ (ομοιόμορφα ως προς T) και για $\mathrm{Re}(z)<0$ το e^{zT} δίνει εκθετική απόσβεση καθώς $T\to\infty$. Δεύτερον, στον κύκλο $|z|=R$ ισχύει

$$\left|\Big(1+\frac{z^2}{R^2}\Big)\frac{1}{z}\right| = \frac{2|\mathrm{Re}(z)|}{R^2},$$

οπότε ο παράγοντας $|\mathrm{Re}(z)|$ ακυρώνει το $1/\mathrm{Re}(z)$ που προκύπτει από την προηγούμενη εκτίμηση και το ολοκληρωτέο γίνεται τάξης $O(1/R^2)$ πάνω στο τόξο, άρα το ολοκλήρωμα πάνω σε τόξο μήκους $O(R)$ είναι $O(1/R)$. Τέλος, επειδή $e^{zT}\big(1+\frac{z^2}{R^2}\big) = 1+O(z)$ όταν $z\to 0$, το υπόλοιπο στο $z=0$ δεν αλλάζει, οπότε η εισαγωγή του βάρους επιτρέπεται (θεώρημα Cauchy/υπολοίπων).

Παρατήρηση 3.3 (Γιατί παραμορφώνουμε από C_- σε C'_-.). Θέλουμε να εκτιμήσουμε

$$\int_{C_-} g_T(z)e^{zT}\Big(1+\frac{z^2}{R^2}\Big)\frac{dz}{z}.$$

Το περίγραμμα C_- περιέχει τμήμα πάνω στη χορδή $\mathrm{Re}(z)=-\delta$. Εκεί μπορεί να ισχύει

$$|g_T(z)| = \left|\int_0^T f(t)e^{-zt}\,dt\right| \le M\int_0^T e^{\delta t}\,dt \asymp \frac{e^{\delta T}}{\delta},$$

οπότε ο παράγοντας e^{zT} απλώς ακυρώνει το $e^{\delta T}$ και μένει μέγεθος τάξης $1/\delta$, δηλαδή δεν παίρνουμε φθορά όταν $T\to\infty$.

Αντίθετα, στο αριστερό ημικύκλιο

$$C'_- := \{\, |z|=R,\ \mathrm{Re}(z)<0 \,\}$$

έχουμε για $\mathrm{Re}(z)<0$ την εκτίμηση

$$|g_T(z)e^{zT}| \le \frac{M}{|\mathrm{Re}(z)|},$$

ενώ πάνω στον κύκλο $|z| = R$ ισχύει

$$\left|\Big(1+\frac{z^2}{R^2}\Big)\frac{1}{z}\right| = \frac{2|\operatorname{Re}(z)|}{R^2}.$$

Άρα το $1/|\operatorname{Re}(z)|$ ακυρώνεται και το ολοκληρωτέο φράσσεται ομοιόμορφα από $O(1/R^2)$, πράγμα που δίνει

$$\int_{C'_-} g_T(z)e^{zT}\Big(1+\frac{z^2}{R^2}\Big)\frac{dz}{z} = O(1/R).$$

Η αντικατάσταση του C_- από το C'_- επιτρέπεται (παραμόρφωση καμπύλης / θεώρημα Cauchy), διότι η συνάρτηση $z \mapsto g_T(z)e^{zT}\big(1+\frac{z^2}{R^2}\big)\frac{1}{z}$ είναι ολόμορφη στην περιοχή ανάμεσα στις C_- και C'_- (ο «αριστερός θύλακας»), η οποία δεν περιέχει το $z = 0$.

Πόρισμα 3.4 (Tauberian). *Έστω $f : [1,\infty) \to \mathbb{C}$ φραγμένη και ολοκληρώσιμη σε κάθε $[1,T]$. Για $\Re(s) > 0$ θέτουμε*

$$g(s) = \int_1^\infty f(x)\, x^{-s}\, \frac{dx}{x}.$$

Αν υπάρχει ανοικτό $U \subset \mathbb{C}$ με $\{\Re(s) \geq 0\} \subset U$ τέτοιο ώστε το g να έχει ολόμορφη επέκταση στο U, τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^\infty f(x)\,\frac{dx}{x}$ συγκλίνει και ισούται με $g(0)$.

Απόδειξη. Θέτουμε $F(t) = f(e^t)$ για $t \geq 0$. Τότε

$$g(s) = \int_0^\infty F(t)e^{-st}\, dt$$

(αλλαγή μεταβλητής $x = e^t$). Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 9.3 στο F και παίρνουμε ότι $\int_0^\infty F(t)\, dt$ υπάρχει και ισούται με $g(0)$. Με την αντίστροφη αλλαγή μεταβλητής,

$$\int_0^\infty F(t)\, dt = \int_1^\infty f(x)\, \frac{dx}{x}.$$

□

3.1 Ένα βοηθητικό λήμμα: σύγκλιση $\int (A(x)-x)/x^2 \Rightarrow A(x) \sim x$

Λήμμα 3.5. *Έστω $A : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ αύξουσα. Αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα*

$$\int_1^\infty \frac{A(t)-t}{t^2}\, dt$$

συγκλίνει, τότε $A(x) \sim x$ όταν $x \to \infty$, δηλαδή $\frac{A(x)}{x} \to 1$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε προς άτοπο ότι $\limsup_{x\to\infty} \frac{A(x)}{x} > \lambda > 1$. Τότε υπάρχουν άπειρα x με $A(x) \geq \lambda x$. Για ένα τέτοιο x και για κάθε $t \in [x, \lambda x]$, από την αύξηση παίρνουμε $A(t) \geq A(x) \geq \lambda x$, άρα

$$\int_x^{\lambda x} \frac{A(t)-t}{t^2}\, dt \geq \int_x^{\lambda x} \frac{\lambda x - t}{t^2}\, dt.$$

Με αλλαγή $t = ux$ (δηλαδή $dt = x\, du$) έχουμε

$$\int_x^{\lambda x} \frac{\lambda x - t}{t^2}\, dt = \int_1^\lambda \frac{\lambda - u}{u^2}\, du =: c(\lambda) > 0,$$

σταθερά που εξαρτάται μόνο από λ. Άρα, για άπειρα x ισχύει

$$\left|\int_x^\infty \frac{A(t)-t}{t^2}\, dt - \int_{\lambda x}^\infty \frac{A(t)-t}{t^2}\, dt\right| = \left|\int_x^{\lambda x} \frac{A(t)-t}{t^2}\, dt\right| \geq c(\lambda) > 0.$$

Όμως τα δύο αριστερά ολοκληρώματα είναι *ουρές* ενός συγκλίνοντος ολοκληρώματος, άρα καθώς $x \to \infty$ και τα δύο τείνουν στο 0 και η διαφορά τους πρέπει να τείνει στο 0, άτοπο. Άρα $\limsup_{x\to\infty} A(x)/x \le 1$.

Ομοίως, αν $\liminf_{x\to\infty} A(x)/x < \mu < 1$, τότε για άπειρα x έχουμε $A(x) \le \mu x$ και για $t \in [\mu x, x]$ παίρνουμε $A(t) \le A(x) \le \mu x$, άρα

$$\int_{\mu x}^{x} \frac{A(t)-t}{t^2}\,dt \le \int_{\mu x}^{x} \frac{\mu x - t}{t^2}\,dt = -\int_{\mu}^{1} \frac{u-\mu}{u^2}\,du =: -c'(\mu) < 0,$$

και ξανά παίρνουμε αντίφαση με τη σύγκλιση των ουρών. Άρα $\liminf_{x\to\infty} A(x)/x \ge 1$. Συνεπώς $\frac{A(x)}{x} \to 1$. □

Θεώρημα 3.6. *Έστω $a_n \ge 0$ και*

$$A(x) := \sum_{n\le x} a_n.$$

Υποθέτουμε ότι $A(x) = O(x)$. Θέτουμε τη Dirichlet σειρά

$$F(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \qquad \Re(s) > 1.$$

Υποθέτουμε ότι η $F(s)$ έχει αναλυτική συνέχεια στο $\Re(s) \ge 1$ εκτός από έναν απλό πόλο στο $s = 1$ με υπόλοιπο 1. Τότε

$$A(x) \sim x \qquad (x \to \infty).$$

Απόδειξη. **Βήμα 1: Μερική άθροιση** Για $\Re(s) > 1$ ισχύει η ταυτότητα:

$$\sum_{n\le X} \frac{a_n}{n^s} = \frac{A(X)}{X^s} + s\int_1^X \frac{A(x)}{x^{s+1}}\,dx.$$

Επειδή $A(X) = O(X)$ και $\Re(s) > 1$, έχουμε $A(X)X^{-s} \to 0$ καθώς $X \to \infty$. Άρα, περνώντας στο όριο $X \to \infty$,

$$F(s) = s\int_1^{\infty} \frac{A(x)}{x^{s+1}}\,dx \qquad (\Re(s) > 1). \tag{19}$$

Βήμα 2: Αφαίρεση του πόλου στο $s = 1$ και αναλυτική συνέχεια στο $\Re(z) \ge 0$. Θέτουμε $s = 1 + z$ (οπότε $\Re(z) > 0$) και ορίζουμε

$$H(z) := \frac{F(1+z)}{1+z} - \frac{1}{z}.$$

Η υπόθεση "F έχει απλό πόλο στο $s = 1$ με υπόλοιπο 1" ισοδυναμεί με το ότι $F(1+z) = \frac{1}{z} + (\text{ολόμορφος όρος})$ κοντά στο $z = 0$. Άρα ο $H(z)$ είναι ολόμορφος σε γειτονιά του $z = 0$ και επιπλέον έχει αναλυτική συνέχεια στο $\Re(z) \ge 0$.

Βήμα 3: Αναπαράσταση του H. Από (19) με $s = 1 + z$ παίρνουμε, για $\Re(z) > 0$,

$$\frac{F(1+z)}{1+z} = \int_1^{\infty} \frac{A(x)}{x^{2+z}}\,dx = \int_1^{\infty} \frac{A(x)}{x}\,x^{-z}\,\frac{dx}{x}.$$

Επίσης για $\Re(z) > 0$ ισχύει

$$\frac{1}{z} = \int_1^{\infty} x^{-z}\,\frac{dx}{x}.$$

Άρα, για $\Re(z) > 0$,

$$H(z) = \int_1^{\infty} \left(\frac{A(x)}{x} - 1\right) x^{-z}\,\frac{dx}{x}. \tag{20}$$

Βήμα 4: Εφαρμογή του Θεωρήματος. Θέτουμε

$$f(x) := \frac{A(x)}{x} - 1.$$

Από $A(x) = O(x)$ έχουμε ότι f είναι φραγμένη στο $[1, \infty)$, και είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε $[1, X]$. Η σχέση (20) λέει ότι για $\Re(z) > 0$ η Mellin μετασχηματισμένη της f είναι $H(z)$, η οποία (από το Βήμα 2) έχει αναλυτική συνέχεια στο $\Re(z) \geq 0$. Άρα, από το Θεώρημα 9.3, το ολοκλήρωμα

$$\int_1^\infty \left(\frac{A(x)}{x} - 1\right) \frac{dx}{x} = \int_1^\infty \frac{A(x) - x}{x^2} \, dx$$

συγκλίνει.

Βήμα 5: Συμπέρασμα $A(x) \sim x$. Η $A(x)$ είναι αύξουσα (επειδή $a_n \geq 0$). Επομένως, από το Λήμμα 3.5 συμπεραίνουμε $\frac{A(x)}{x} \to 1$, δηλαδή $A(x) \sim x$. □

Μένει να αποδείξουμε ότι τα παραπάνω μπορούμε να τα εφαρμόσουμε για την συνάρτηση ψ.

Θεώρημα 3.7 (Εκτίμηση Chebyshev). *Ορίζουμε τη συνάρτηση von Mangoldt*

$$\Lambda(n) := \begin{cases} \log p, & \text{αν } n = p^k \text{ για κάποιο πρώτο } p \text{ και } k \geq 1, \\ 0, & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

και τη συνάρτηση Chebyshev

$$\psi(x) := \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \qquad (x \geq 1).$$

Τότε ισχύει

$$\psi(x) \asymp x \qquad \text{ομοιόμορφα για } x \geq 2,$$

δηλαδή υπάρχουν σταθερές $c_1, c_2 > 0$ ώστε $c_1 x \leq \psi(x) \leq c_2 x$ για κάθε $x \geq 2$.

Απόδειξη. **1) Ένα λήμμα για εναλλασσόμενες σειρές.** Αν $(a_n)_{n\geq 1}$ είναι ακολουθία μη αρνητικών πραγματικών που φθίνει προς το 0, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1} a_n$ συγκλίνει και ισχύει

$$a_1 - a_2 \;\leq\; \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1} a_n \;\leq\; a_1 - a_2 + a_3. \tag{21}$$

Πράγματι, τα μερικά αθροίσματα γράφονται ως

$$(a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots \geq a_1 - a_2,$$

ενώ

$$(a_1 - a_2 + a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots \leq a_1 - a_2 + a_3,$$

επειδή $a_{2j-1} - a_{2j} \geq 0$ και $a_{2j} - a_{2j+1} \geq 0$.

2) Ορισμός της $T(x)$ και ταύτιση με $\sum_{n\leq x} \log n$. Για $x \geq 1$ θέτουμε

$$T(x) := \sum_{n \leq x} \psi\left(\frac{x}{n}\right).$$

Θα δείξουμε ότι

$$T(x) = \sum_{n \leq x} \log n. \tag{22}$$

Χρησιμοποιούμε την κλασική ταυτότητα

$$\sum_{d\,|\,n} \Lambda(d) = \log n, \tag{23}$$

η οποία προκύπτει από την παραγοντοποίηση $n = \prod p^{\alpha_p}$: το άθροισμα στα $d|n$ με $\Lambda(d) \neq 0$ δίνει $\sum_p \alpha_p \log p = \log n$. Άρα

$$\sum_{n\le x} \log n = \sum_{n\le x} \sum_{d\,|\,n} \Lambda(d) = \sum_{d\le x} \Lambda(d) \sum_{\substack{n\le x\\ d|n}} 1 = \sum_{d\le x} \Lambda(d) \sum_{k\le x/d} 1.$$

Αλλά

$$\sum_{d\le x} \Lambda(d) \sum_{k\le x/d} 1 = \sum_{k\le x} \sum_{d\le x/k} \Lambda(d) = \sum_{k\le x} \psi\Big(\frac{x}{k}\Big) = T(x),$$

οπότε ισχύει (22).

3) Ασύμπτωτη για $\sum_{n\le x} \log n$ και συνέπεια για $T(x)$. Για $x \ge 2$ έχουμε (σύγκριση αθροίσματος με ολοκλήρωμα)

$$\int_1^x \log t\, dt \;\le\; \sum_{n\le x} \log n \;\le\; \int_1^x \log t\, dt + \log x,$$

άρα

$$\sum_{n\le x} \log n = x\log x - x + \mathcal{O}(\log x) \qquad (x\ge 2). \tag{24}$$

Με (22) συμπεραίνουμε

$$T(x) = x\log x - x + \mathcal{O}(\log x) \qquad (x\ge 2). \tag{25}$$

Επομένως

$$T(x) - 2T\Big(\frac{x}{2}\Big) = (\log 2)\, x + \mathcal{O}(\log x) \qquad (x\ge 2). \tag{26}$$

(Πράγματι, αντικαθιστώντας την (25) στα δύο μέλη και απλοποιώντας, παίρνουμε τον κύριο όρο $(\log 2)x$, ενώ τα σφάλματα παραμένουν $\mathcal{O}(\log x)$.)

4) Εναλλασσόμενο άθροισμα για $T(x) - 2T(x/2)$. Από τον ορισμό,

$$T(x) - 2T\Big(\frac{x}{2}\Big) = \sum_{n\le x} \psi\Big(\frac{x}{n}\Big) - 2\sum_{n\le x/2} \psi\Big(\frac{x}{2n}\Big).$$

Επειδή $\psi(y) = 0$ για $0 < y < 1$ (το άθροισμα είναι κενό), έχουμε $\psi(x/(2n)) = 0$ όταν $x/2 < n \le x$, οπότε

$$\sum_{n\le x/2} \psi\Big(\frac{x}{2n}\Big) = \sum_{n\le x} \psi\Big(\frac{x}{2n}\Big).$$

Άρα

$$T(x) - 2T\Big(\frac{x}{2}\Big) = \sum_{n\le x} \psi\Big(\frac{x}{n}\Big) - 2\sum_{n\le x} \psi\Big(\frac{x}{2n}\Big). \tag{27}$$

Με αλλαγή δείκτη $m = 2n$ έχουμε

$$2\sum_{n\le x} \psi\Big(\frac{x}{2n}\Big) = 2\sum_{\substack{m\le x\\ 2|m}} \psi\Big(\frac{x}{m}\Big),$$

και έτσι το δεξί μέλος του (27) γράφεται ως

$$\sum_{\substack{m\le x\\ m \text{ περιττός}}} \psi\Big(\frac{x}{m}\Big) - \sum_{\substack{m\le x\\ m \text{ άρτιος}}} \psi\Big(\frac{x}{m}\Big) = \sum_{n\le x}(-1)^{n-1}\psi\Big(\frac{x}{n}\Big).$$

Επιπλέον, αν $n > x$ τότε $x/n < 1$ και $\psi(x/n) = 0$, άρα

$$T(x) - 2T\Big(\frac{x}{2}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\psi\Big(\frac{x}{n}\Big). \tag{28}$$

5) Εφαρμογή του (21). Για σταθερό $x \ge 2$ θέτουμε $a_n := \psi(x/n)$. Επειδή η ψ είναι μη φθίνουσα ως συνάρτηση του ορίσματος και x/n φθίνει με το n, η ακολουθία (a_n) είναι μη αύξουσα. Επίσης $a_n = 0$ για $n > x$, άρα $a_n \to 0$. Επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε το (21) στη σειρά (28) και παίρνουμε

$$\psi(x) - \psi\Big(\frac{x}{2}\Big) \;\le\; \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\psi\Big(\frac{x}{n}\Big) \;\le\; \psi(x) - \psi\Big(\frac{x}{2}\Big) + \psi\Big(\frac{x}{3}\Big). \tag{29}$$

Συνδυάζοντας (26) και (28)–(29) παίρνουμε, για κάθε $x \ge 2$,

$$\psi(x) - \psi\Big(\frac{x}{2}\Big) \le (\log 2)\,x + \mathcal{O}(\log x), \tag{30}$$

$$\psi(x) - \psi\Big(\frac{x}{2}\Big) + \psi\Big(\frac{x}{3}\Big) \ge (\log 2)\,x + \mathcal{O}(\log x). \tag{31}$$

6) Άνω φράγμα $\psi(x) \ll x$. Θέτουμε r τον μέγιστο ακέραιο με $2^r < x$ (οπότε $x/2^{r+1} < 1$ και $\psi(x/2^{r+1}) = 0$). Γράφουμε τηλεσκοπικά

$$\psi(x) = \sum_{j=0}^{r}\Big(\psi\Big(\frac{x}{2^j}\Big) - \psi\Big(\frac{x}{2^{j+1}}\Big)\Big).$$

Εφαρμόζοντας την (30) στο $x/2^j$, παίρνουμε

$$\psi\Big(\frac{x}{2^j}\Big) - \psi\Big(\frac{x}{2^{j+1}}\Big) \le (\log 2)\,\frac{x}{2^j} + \mathcal{O}\big(\log(x/2^j)\big).$$

Αθροίζοντας για $j = 0, \dots, r$,

$$\psi(x) \le (\log 2)\,x\sum_{j=0}^{r}\frac{1}{2^j} + \mathcal{O}\left(\sum_{j=0}^{r}\log(x/2^j)\right).$$

Έχουμε $\sum_{j=0}^{r} 2^{-j} \le 2$ και

$$\sum_{j=0}^{r}\log(x/2^j) = (r+1)\log x - (\log 2)\sum_{j=0}^{r} j = \mathcal{O}\big((\log x)^2\big),$$

άρα

$$\psi(x) \le 2(\log 2)\,x + \mathcal{O}\big((\log x)^2\big) \ll x \qquad (x \ge 2). \tag{32}$$

7) Κάτω φράγμα $\psi(x) \gg x$. Από (31) και (32) (εφαρμοσμένη στο $x/3$) παίρνουμε

$$\psi(x) - \psi\Big(\frac{x}{2}\Big) \ge (\log 2)\,x - \psi\Big(\frac{x}{3}\Big) + \mathcal{O}(\log x) \ge (\log 2)\,x - \frac{2(\log 2)}{3}x + \mathcal{O}\big((\log x)^2\big),$$

δηλαδή
$$\psi(x) - \psi\Big(\frac{x}{2}\Big) \ge \frac{\log 2}{3}\, x + \mathcal{O}\big((\log x)^2\big). \tag{33}$$
Άρα υπάρχει $x_0 \ge 2$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \ge x_0$ να ισχύει
$$\psi(x) - \psi\Big(\frac{x}{2}\Big) \ge \frac{\log 2}{6}\, x. \tag{34}$$
Τότε, για $x \ge x_0$, τηλεσκοπώντας όπως πριν και εφαρμόζοντας (34) στα $x/2^j$ όσο $x/2^j \ge x_0$, παίρνουμε
$$\psi(x) \ge \sum_{0\le j\le J} \Big(\psi\Big(\frac{x}{2^j}\Big) - \psi\Big(\frac{x}{2^{j+1}}\Big)\Big) \ge \frac{\log 2}{6} \sum_{0\le j\le J} \frac{x}{2^j} \ge \frac{\log 2}{6}\, x,$$
όπου J είναι ο μέγιστος ακέραιος με $x/2^J \ge x_0$ (οπότε $\sum_{j=0}^{J} 2^{-j} \ge 1$). Τέλος, αν θέσουμε
$$c_1 := \min\Big\{\frac{\log 2}{6},\ \min_{2\le x\le x_0} \frac{\psi(x)}{x}\Big\} > 0,$$
τότε $c_1 x \le \psi(x)$ για όλα τα $x \ge 2$.

Από (32) παίρνουμε επίσης $\psi(x) \le c_2 x$ για κάποιο $c_2 > 0$ και για όλα τα $x \ge 2$. Άρα $\psi(x) \asymp x$ ομοιόμορφα για $x \ge 2$. □

Παρατήρηση 3.8 (Γιατί η ψ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος 3.6). Θέτουμε $a_n := \Lambda(n) \ge 0$ και
$$A(x) = \sum_{n\le x} a_n = \sum_{n\le x} \Lambda(n) = \psi(x).$$
Από την εκτίμηση Chebyshev, Θεώρημα 3.7, που αποδείξαμε προηγουμένως έχουμε $\psi(x) \ll x$, άρα $A(x) = O(x)$. Η αντίστοιχη Dirichlet σειρά είναι
$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$
Για $\Re(s) > 1$ γνωρίζουμε ότι
$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s},$$
δηλαδή $F(s) = -\zeta'(s)/\zeta(s)$ στο ημιεπίπεδο $\Re(s) > 1$.

Από τη σχέση που αποδείχθηκε για τη ζ (αναλυτική συνέχιση της ζ στο $\Re(s) > 0$ με απλό πόλο στο $s = 1$ και υπόλοιπο 1), συμπεραίνουμε ότι:

- Η $\zeta(s)$ είναι ολόμορφη στο $\Re(s) \ge 1$ εκτός από απλό πόλο στο $s = 1$.
- Στο $\Re(s) \ge 1$ δεν υπάρχουν μηδενικά της ζ (η $\zeta(s) = \sum_{n\ge1} n^{-s}$ έχει θετική πραγματική τιμή για $s > 1$, και η αναλυτική της συνέχεια στο $\Re(s) \ge 1$ δεν μπορεί να αποκτήσει μηδενικό πάνω στη γραμμή $\Re(s) = 1$ χωρίς να παραβιάζεται η γνωστή μορφή του πόλου στο 1).

Συνεπώς, η συνάρτηση $F(s) = -\zeta'(s)/\zeta(s)$ έχει αναλυτική συνέχεια στο $\Re(s) \ge 1$ εκτός από ενδεχόμενες ιδιομορφίες στα σημεία όπου $\zeta(s) = 0$ και στο $s = 1$. Στο $\Re(s) \ge 1$ όμως δεν έχουμε μηδενικά, άρα η μόνη ιδιομορφία προέρχεται από το $s = 1$.

Τέλος, επειδή κοντά στο $s = 1$ έχουμε
$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + h(s) \qquad \text{με } h \text{ ολόμορφη κοντά στο } 1,$$

παίρνουμε

$$\zeta'(s) = -\frac{1}{(s-1)^2} + h'(s), \qquad -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{1}{s-1} + (\text{ολόμορφος όρος κοντά στο } 1).$$

Άρα η $F(s) = -\zeta'(s)/\zeta(s)$ έχει *απλό πόλο* στο $s = 1$ με *υπόλοιπο* 1.

Με άλλα λόγια, για την ακολουθία $a_n = \Lambda(n)$ ισχύουν όλες οι υποθέσεις του Θεωρήματος 3.6.

4 Το Θεώρημα Dirichlet σε αριθμητικές προόδους

Θεωρούμε $q \geq 2$ και $(a, q) = 1$. Ορίζουμε τη συνάρτηση Chebyshev σε αριθμητική πρόοδο

$$\psi(x; q, a) := \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv a \pmod{q}}} \Lambda(n).$$

Για $\operatorname{Re}(s) > 1$ ορίζουμε τη Dirichlet σειρά

$$F_{q,a}(s) := \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \equiv a \pmod{q}}} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

Επειδή $\Lambda(n) \geq 0$ και $\psi(x; q, a) \leq \psi(x)$, από το Chebyshev φράγμα για την ψ έχουμε $\psi(x; q, a) = O(x)$ και η $F_{q,a}(s)$ συγκλίνει για $\operatorname{Re}(s) > 1$.

Θεώρημα 4.1 (Θεώρημα Dirichlet για πρώτους σε αριθμητικές προόδους (αναλυτική μορφή)). *Έστω $q \geq 2$ και a με $(a, q) = 1$. Ορίζουμε*

$$\psi(x; q, a) := \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv a \pmod{q}}} \Lambda(n), \qquad F_{q,a}(s) := \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \equiv a \pmod{q}}} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \qquad (\operatorname{Re}(s) > 1).$$

Τότε:

1. *Η $F_{q,a}(s)$ επεκτείνεται μερομορφικά στο ημιεπίπεδο $\operatorname{Re}(s) \geq 1$ και έχει εκεί* μοναδικό *απλό πόλο στο $s = 1$, με υπόλοιπο*
$$\operatorname{Res}_{s=1} F_{q,a}(s) = \frac{1}{\varphi(q)}.$$
2. *Ισχύει η ασυμπτωτική*
$$\psi(x; q, a) \sim \frac{x}{\varphi(q)} \qquad (x \to \infty).$$
Ισοδύναμα, υπάρχουν άπειροι πρώτοι $p \equiv a \pmod{q}$.

Μερική άθροιση Θέτουμε $A(x) := \psi(x; q, a)$. Για $\operatorname{Re}(s) > 1$ ισχύει η κλασική ταυτότητα μερικής άθροισης

$$\sum_{\substack{n \leq X \\ n \equiv a \ (q)}} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = \frac{A(X)}{X^s} + s \int_1^X \frac{A(x)}{x^{s+1}}\, dx.$$

Επειδή $A(X) = O(X)$ και $\operatorname{Re}(s) > 1$, έχουμε $A(X)X^{-s} \to 0$ όταν $X \to \infty$, οπότε περνώντας στο όριο

$$F_{q,a}(s) = s \int_1^\infty \frac{\psi(x; q, a)}{x^{s+1}}\, dx, \tag{35}$$

για $\operatorname{Re}(s) > 1$. Ακριβώς όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος των Πρώτων, για να πάρουμε ασυμπτωτική της $\psi(x; q, a)$ χρειαζόμαστε πληροφορία για την αναλυτική επέκταση της $F_{q,a}(s)$ μέχρι την ευθεία $\operatorname{Re}(s) = 1$.

4.1 Ορθογωνιότητα χαρακτήρων και αναγωγή σε $-L'/L$

Λήμμα 4.2 (Ορθογωνιότητα). *Για $(a,q)=1$ και κάθε ακέραιο n ισχύει*

$$\mathbf{1}_{n\equiv a\ (q)} = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \pmod q} \overline{\chi}(a)\, \chi(n),$$

όπου το άθροισμα τρέχει σε όλους τους Dirichlet χαρακτήρες modulo q (επεκτεινόμενους με $\chi(n)=0$ όταν $(n,q)>1$).

Απόδειξη. Αν $(n,q)>1$, τότε $\chi(n)=0$ για κάθε χ, ενώ $\mathbf{1}_{n\equiv a(q)}=0$ επειδή $(a,q)=1$. Αν $(n,q)=1$, τότε η ταυτότητα είναι ακριβώς η ορθογωνιότητα των χαρακτήρων της ομάδας $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$:

$$\frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi} \overline{\chi}(a)\chi(n) = \begin{cases} 1, & n\equiv a \pmod q, \\ 0, & n \not\equiv a \pmod q. \end{cases}$$

□

Για $\mathrm{Re}(s)>1$, από το Λήμμα 4.2 παίρνουμε

$$F_{q,a}(s) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \pmod q} \overline{\chi}(a) \sum_{n\ge1} \frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n^s}. \tag{36}$$

Ορισμός $L(s,\chi)$ (ως Dirichlet σειρά, χωρίς Euler προϊόν). Για κάθε χαρακτήρα χ ορίζουμε

$$L(s,\chi) := \sum_{n\ge1} \frac{\chi(n)}{n^s}, \qquad \mathrm{Re}(s)>1,$$

και επίσης

$$F_\chi(s) := \sum_{n\ge1} \frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n^s}, \qquad \mathrm{Re}(s)>1.$$

Λήμμα 4.3. *Για κάθε $n\ge1$ ισχύει $\sum_{d|n}\Lambda(d)=\log n$.*

Απόδειξη. (Όπως στο ΠΘΠ.) Αν $n=p^k$, τότε $\sum_{d|p^k}\Lambda(d) = \Lambda(p)+\cdots+\Lambda(p^k) = \log p = \log(p^k)/k$; αλλά μόνο το $d=p$ συμβάλλει, άρα $\sum_{d|p^k}\Lambda(d)=\log p^k=\log n$. Αν n δεν είναι δύναμη πρώτου, το άθροισμα είναι $0=\log n$; συνολικά παίρνουμε την ταυτότητα. □

Πρόταση 4.4. *Για $\mathrm{Re}(s)>1$ ισχύει η ταυτότητα*

$$-L'(s,\chi) = L(s,\chi)\, F_\chi(s). \tag{37}$$

Απόδειξη. (Ακριβώς όπως στο ΠΘΠ για την ζ, αλλά με χ.) Για $\sigma:=\mathrm{Re}(s)>1$ Για $\sigma:=\mathrm{Re}(s)>1$ οι σειρές

$$L(s,\chi) = \sum_{m\ge1}\frac{\chi(m)}{m^s}, \qquad F_\chi(s) = \sum_{n\ge1}\frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n^s}$$

συγκλίνουν απολύτως, αφού

$$\sum_{m\ge1}\frac{|\chi(m)|}{m^\sigma} \le \sum_{m\ge1}\frac{1}{m^\sigma} < \infty, \qquad \sum_{n\ge1}\frac{|\Lambda(n)\chi(n)|}{n^\sigma} \le \sum_{n\ge1}\frac{\Lambda(n)}{n^\sigma} < \infty.$$

Επομένως μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε τις δύο σειρές και να αναδιατάξουμε το διπλό άθροισμα (Tonelli/Fubini), οπότε παίρνουμε το Cauchy product:

$$\begin{aligned} L(s,\chi)F_\chi(s) &= \left(\sum_{m\geq 1}\frac{\chi(m)}{m^s}\right)\left(\sum_{n\geq 1}\frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n^s}\right) \\ &= \sum_{m\geq 1}\sum_{n\geq 1}\frac{\chi(m)\Lambda(n)\chi(n)}{(mn)^s}. \end{aligned}$$

Τώρα ομαδοποιούμε τους όρους ως προς $k = mn$: για σταθερό $k \geq 1$ οι λύσεις $mn = k$ αντιστοιχούν ακριβώς στους διαιρέτες $d \mid k$ θέτοντας $n = d$ και $m = k/d$. Άρα

$$\sum_{m\geq 1}\sum_{n\geq 1}\frac{\chi(m)\Lambda(n)\chi(n)}{(mn)^s} = \sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^s}\sum_{d\mid k}\chi\left(\frac{k}{d}\right)\Lambda(d)\chi(d),$$

δηλαδή

$$L(s,\chi)F_\chi(s) = \sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^s}\sum_{d\mid k}\chi\left(\frac{k}{d}\right)\chi(d)\Lambda(d).$$

Αν $(k,q) = 1$, τότε $\chi(k/d)\chi(d) = \chi(k)$ και

$$\sum_{d\mid k}\chi\left(\frac{k}{d}\right)\chi(d)\Lambda(d) = \chi(k)\sum_{d\mid k}\Lambda(d) = \chi(k)\log k$$

με το Λήμμα 4.3. Αν $(k,q) > 1$, τότε $\chi(k) = 0$ και κάθε όρος στο άθροισμα είναι 0 (επειδή τότε d ή k/d έχει κοινό διαιρέτη με q), άρα πάλι ο συντελεστής είναι $\chi(k)\log k = 0$. Συνεπώς

$$L(s,\chi)F_\chi(s) = \sum_{k\geq 1}\frac{\chi(k)\log k}{k^s}.$$

Τέλος,

$$L'(s,\chi) = \frac{d}{ds}\sum_{k\geq 1}\frac{\chi(k)}{k^s} = -\sum_{k\geq 1}\frac{\chi(k)\log k}{k^s},$$

οπότε παίρνουμε (37). □

Θεώρημα 4.5. *Για κάθε χαρακτήρα χ και κάθε s με $\mathrm{Re}(s) > 1$ ισχύει $L(s,\chi) \neq 0$.*

Απόδειξη. (Ίδια ακριβώς ιδέα με το Θεώρημα 2.7 στο ΠΘΠ.) Έστω προς άτοπο ότι $L(s_0,\chi) = 0$ για κάποιο s_0 με $\mathrm{Re}(s_0) > 1$, και έστω $m \geq 1$ η τάξη του μηδενικού. Τότε $-L'(s,\chi)$ έχει μηδενικό τάξης ακριβώς $m-1$ στο s_0. Όμως από την Πρόταση 4.4 έχουμε $-L'(s,\chi) = L(s,\chi)F_\chi(s)$, όπου F_χ είναι ολόμορφη στο $\mathrm{Re}(s) > 1$ (από απόλυτη σύγκλιση), άρα το δεξί μέλος έχει μηδενικό τάξης τουλάχιστον m στο s_0. Αντίφαση. Άρα $L(s,\chi) \neq 0$ στο $\mathrm{Re}(s) > 1$. □

Πόρισμα 4.6. *Στο $\mathrm{Re}(s) > 1$ ισχύει*

$$-\frac{L'}{L}(s,\chi) = \sum_{n\geq 1}\frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n^s}.$$

Απόδειξη. Διαιρούμε την (37) με $L(s,\chi)$ (επιτρέπεται από το Θεώρημα 4.5). □

Άρα, από (36) και το Κορ. 4.6, παίρνουμε στο $\mathrm{Re}(s) > 1$:

$$F_{q,a}(s) = -\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi \pmod q}\overline{\chi}(a)\,\frac{L'}{L}(s,\chi). \tag{38}$$

4.2 Αναλυτική συνέχεια των $L(s,\chi)$ στο $\mathrm{Re}(s)>0$ (όπως για την ζ)

Λήμμα 4.7. *Αν χ είναι μη κύριος χαρακτήρας modulo q, τότε τα μερικά αθροίσματα*

$$S_\chi(x) := \sum_{n\le x}\chi(n)$$

είναι φραγμένα, δηλαδή $S_\chi(x)=O(1)$.

Απόδειξη. Εφόσον χ είναι μη κύριος, υπάρχει a με $(a,q)=1$ και $\chi(a)\neq 1$. Τότε, επειδή ο πολλαπλασιασμός με a μεταθέτει το πλήρες σύστημα υπολοίπων modulo q, έχουμε

$$\sum_{n=1}^{q}\chi(n)=\sum_{n=1}^{q}\chi(an)=\chi(a)\sum_{n=1}^{q}\chi(n),$$

άρα $\sum_{n=1}^{q}\chi(n)=0$. Γράφοντας $N=kq+r$ με $0\le r<q$ παίρνουμε

$$\sum_{n=1}^{N}\chi(n)=k\sum_{n=1}^{q}\chi(n)+\sum_{n=1}^{r}\chi(n)=\sum_{n=1}^{r}\chi(n),$$

οπότε $\left|\sum_{n=1}^{N}\chi(n)\right|\le\sum_{n=1}^{r}|\chi(n)|\le r\le q$. □

Πρόταση 4.8. *Αν χ είναι μη κύριος χαρακτήρας modulo q, τότε η $L(s,\chi)$ επεκτείνεται ως ολόμορφη συνάρτηση στο ημιεπίπεδο $\mathrm{Re}(s)>0$.*

Απόδειξη. (Όπως το Θεώρημα 2.9.) Για $\mathrm{Re}(s)>1$ εφαρμόζουμε μερική άθροιση στη Dirichlet σειρά του $L(s,\chi)$:

$$L(s,\chi)=\sum_{n\ge1}\frac{\chi(n)}{n^s}=s\int_1^\infty\frac{S_\chi(x)}{x^{s+1}}\,dx.$$

Από το Λήμμα 4.7 έχουμε $S_\chi(x)=O(1)$, άρα το ολοκλήρωμα συγκλίνει για $\mathrm{Re}(s)>0$. Επιπλέον ο ολοκληρωτέος πυρήνας είναι ολόμορφος ως προς s και η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη σε συμπαγή, οπότε η $L(s,\chi)$ είναι ολόμορφη στο $\mathrm{Re}(s)>0$. □

Πρόταση 4.9. *Για τον κύριο χαρακτήρα χ_0 modulo q ισχύει για $\mathrm{Re}(s)>1$ η ταυτότητα*

$$L(s,\chi_0)=\zeta(s)\sum_{d\mid q}\frac{\mu(d)}{d^s}.$$

Άρα η $L(s,\chi_0)$ έχει μερομορφική συνέχεια στο $\mathrm{Re}(s)>0$ με απλό πόλο στο $s=1$ και υπόλοιπο $\sum_{d\mid q}\mu(d)/d=\prod_{p\mid q}(1-1/p)=\varphi(q)/q$.

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα

$$\mathbf{1}_{(n,q)=1}=\sum_{d\mid(n,q)}\mu(d)=\sum_{d\mid q,\ d\mid n}\mu(d).$$

Τότε για $\mathrm{Re}(s)>1$,

$$L(s,\chi_0)=\sum_{(n,q)=1}\frac{1}{n^s}=\sum_{n\ge1}\frac{1}{n^s}\sum_{\substack{d\mid q\\ d\mid n}}\mu(d)=\sum_{d\mid q}\mu(d)\sum_{m\ge1}\frac{1}{(dm)^s}=\zeta(s)\sum_{d\mid q}\frac{\mu(d)}{d^s}.$$

Το συμπέρασμα για τον πόλο και το υπόλοιπο προκύπτει από το αντίστοιχο για την ζ. Πράγματι, θέτουμε

$$h(s):=\sum_{d\mid q}\frac{\mu(d)}{d^s}.$$

Επειδή το q είναι σταθερό, το άθροισμα είναι *πεπερασμένο* (τρέχει σε πεπερασμένο πλήθος διαιρετών d). Κάθε όρος $d^{-s} = e^{-s\log d}$ είναι ολόμορφος σε όλο το $\mathbb{C}$, άρα και το h είναι *ολόμορφο σε όλο το* $\mathbb{C}$.

Αν $\zeta(s)$ έχει απλό πόλο στο $s = 1$ με υπόλοιπο 1 και h είναι ολόμορφη, τότε

$$\mathrm{Res}_{s=1}\big(\zeta(s)h(s)\big) = h(1)\ \mathrm{Res}_{s=1}\,\zeta(s) = h(1).$$

Επομένως, από $L(s, \chi_0) = \zeta(s)\,h(s)$ παίρνουμε

$$\mathrm{Res}_{s=1}\,L(s, \chi_0) = h(1) = \sum_{d|q} \frac{\mu(d)}{d} = \prod_{p|q}\left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{\varphi(q)}{q}.$$

□

4.3 Μη μηδενισμός στη γραμμή $\mathrm{Re}(s) = 1$, $t \neq 0$

Θεώρημα 4.10. *Για κάθε Dirichlet χαρακτήρα χ και κάθε $t \neq 0$ ισχύει*

$$L(1 + it, \chi) \neq 0.$$

Απόδειξη. (Όπως στο Θεώρημα των Πρώτων για τη $\zeta(1 + it) \neq 0$, με το ίδιο τριγωνομετρικό πολυώνυμο.) Χρησιμοποιούμε την ανισότητα

$$3 + 4\cos\theta + \cos(2\theta) = 2(1 + \cos\theta)^2 \geq 0.$$

Για $\sigma > 1$ θέτουμε

$$\mathcal{G}(\sigma) := \zeta(\sigma)^3\,L(\sigma + it, \chi)^4\,L(\sigma + 2it, \chi^2).$$

Για $\sigma > 1$ όλα τα μέλη είναι μη μηδενικά (για ζ από το Θεώρημα 2.7 του ΠΘΠ, για L από το Θεώρημα 4.5), άρα η $\log|\mathcal{G}(\sigma)|$ είναι καλά ορισμένη.

Παραγωγίζοντας ως προς σ και χρησιμοποιώντας (α) την ταυτότητα $-\zeta'/\zeta = \sum \Lambda(n)n^{-s}$ από την απόδειξη του Θεωρήματος των Πρώτων, (β) το Πόρισμα 4.6 για $-L'/L$, παίρνουμε για $\sigma > 1$:

$$-\frac{d}{d\sigma}\log|\mathcal{G}(\sigma)| = \sum_{n\geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma}\Big(3 + 4\ \mathrm{Re}(\chi(n)n^{-it}) + \mathrm{Re}(\chi(n)^2 n^{-2it})\Big)\ \geq\ 0.$$

Για να ελέγξουμε το

$$3 + 4\ \mathrm{Re}\big(\chi(n)n^{-it}\big) + \mathrm{Re}\big(\chi(n)^2 n^{-2it}\big),$$

αρκεί να το κάνουμε για n με $\Lambda(n) \neq 0$, δηλαδή για $n = p^k$. Αν $p \nmid q$, τότε $\chi(p)$ είναι ρίζα της μονάδας, άρα υπάρχει $\phi_p \in \mathbb{R}$ με $\chi(p) = e^{i\phi_p}$. Με πλήρη πολλαπλασιαστικότητα παίρνουμε

$$\chi(p^k) = \chi(p)^k = e^{ik\phi_p}, \qquad (p^k)^{-it} = e^{-it\log(p^k)} = e^{-ikt\log p}.$$

Θέτοντας

$$\theta_p := \phi_p - t\log p,$$

έχουμε

$$\chi(p^k)\,p^{-ikt} = e^{ik(\phi_p - t\log p)} = e^{ik\theta_p} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Re}\big(\chi(p^k)p^{-ikt}\big) = \mathrm{Re}(e^{ik\theta_p}) = \cos(k\theta_p),$$

και επίσης

$$\chi(p^k)^2\,p^{-i2kt} = e^{i2k\theta_p} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Re}\big(\chi(p^k)^2 p^{-i2kt}\big) = \cos(2k\theta_p).$$

Άρα, για $n = p^k$ με $p \nmid q$,

$$3 + 4\ \mathrm{Re}\big(\chi(n)n^{-it}\big) + \mathrm{Re}\big(\chi(n)^2 n^{-2it}\big) = 3 + 4\cos(k\theta_p) + \cos(2k\theta_p).$$

Αν $p \mid q$, τότε $\chi(p^k) = 0$ και οι δύο πραγματικοί όροι μηδενίζονται, οπότε μένει απλώς 3. Άρα $\frac{d}{d\sigma} \log |\mathcal{G}(\sigma)| \leq 0$ και η $\log |\mathcal{G}(\sigma)|$ είναι μη αύξουσα στο $(1, \infty)$. Άρα για κάθε $1 < \sigma \leq 2$ ισχύει

$$\log |\mathcal{G}(\sigma)| \geq \log |\mathcal{G}(2)|.$$

Επειδή $\mathcal{G}(2) \neq 0$ (όλες οι συναρτήσεις $\zeta(2)$, $L(2 + it, \chi)$, $L(2 + 2it, \chi^2)$ είναι πεπερασμένες και μη μηδενικές), έχουμε $|\mathcal{G}(2)| > 0$. Θέτοντας

$$c := |\mathcal{G}(2)|,$$

παίρνουμε

$$|\mathcal{G}(\sigma)| \geq c \qquad (1 < \sigma \leq 2).$$

Έστω προς άτοπο ότι $L(1 + it, \chi) = 0$ για κάποιο $t \neq 0$. Επειδή η $L(s, \chi)$ είναι ολόμορφη σε γειτονιά του $1 + it$, το $1 + it$ είναι μηδενικό κάποιας τάξης $m \geq 1$, δηλαδή υπάρχει ολόμορφη h με $h(1 + it) \neq 0$ ώστε

$$L(s, \chi) = (s - (1 + it))^m h(s) \qquad (\text{για } s \text{ κοντά στο } 1 + it).$$

Θέτοντας $s = \sigma + it$ και αφήνοντας $\sigma \downarrow 1$ παίρνουμε

$$|L(\sigma + it, \chi)| \asymp |\sigma - 1|^m.$$

Επομένως, ο παράγοντας $L(\sigma + it, \chi)^4$ έχει μηδενικό τάξης $4m$ στο $\sigma = 1$.

Από την άλλη, η $\zeta(s)$ έχει απλό πόλο στο $s = 1$, άρα $\zeta(\sigma)^3$ έχει πόλο τάξης 3 στο $\sigma = 1$ και

$$|\zeta(\sigma)^3| \asymp (\sigma - 1)^{-3} \qquad (\sigma \downarrow 1).$$

Τέλος, επειδή $2t \neq 0$, το σημείο $1+2it$ δεν είναι το 1, άρα ο παράγοντας $L(s, \chi^2)$ είναι ολόμορφος σε γειτονιά του $1 + 2it$ και συνεπώς φραγμένος και μη μηδενικός εκεί:

$$|L(\sigma + 2it, \chi^2)| \asymp 1 \qquad (\sigma \downarrow 1).$$

Συνεπώς, για $\sigma \downarrow 1$,

$$|\mathcal{G}(\sigma)| = |\zeta(\sigma)|^3 \, |L(\sigma + it, \chi)|^4 \, |L(\sigma + 2it, \chi^2)| \asymp (\sigma - 1)^{-3} \cdot (\sigma - 1)^{4m} \cdot 1 = (\sigma - 1)^{4m-3}.$$

Επειδή $m \geq 1$, έχουμε $4m - 3 \geq 1$, άρα $(\sigma - 1)^{4m-3} \to 0$ όταν $\sigma \downarrow 1$. Δηλαδή $|\mathcal{G}(\sigma)| \to 0$ καθώς $\sigma \downarrow 1$, σε αντίφαση με το κάτω φράγμα $|\mathcal{G}(\sigma)| \geq c > 0$ για $1 < \sigma \leq 2$. $\square$

Παρατήρηση 4.11. Αν $t = 0$ και χ είναι *μη πραγματικός* μη κύριος χαρακτήρας, τότε $\chi^2 \neq \chi_0$ και η ίδια απόδειξη (με $t = 0$) δίνει $L(1, \chi) \neq 0$. Για πραγματικούς μη κυρίους χαρακτήρες έχουμε $\chi^2 = \chi_0$ και τότε εμφανίζεται πόλος στο $L(s, \chi^2)$ στο $s = 1$, οπότε το παραπάνω επιχείρημα δεν αρκεί. Εκεί χρειάζεται το κλασικό θεώρημα του Dirichlet $L(1, \chi) \neq 0$.