

Διακριτά Μαθηματικά
3^ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Πρόβλημα 1 Έξι άτομα βρίσκονται σε ασανσέρ. Με πόσους τρόπους μπορούν να κατέβουν σε 4 ορόφους, αν σε κάθε όροφο πρέπει να κατέβει τουλάχιστον ένα άτομο;

Πρόβλημα 2 Πόσες ακέραιες λύσεις έχει το σύστημα

$$w + x + y + z = 11$$

με $0 \leq w, x, y, z \leq 4$;

Πρόβλημα 3 Σε ένα πίνακα 4×4 χωρισμένο σε 16 μικρά τετράγωνα 1×1 τοποθετούμε 4 λευκά και 4 μαύρα πιόνια, έτσι ώστε να ισχύουν τα ακόλουθα:

(α) Κάθε μικρό τετράγωνο περιέχει το πολύ ένα πιόνι.

(β) Κάθε γραμμή περιέχει 2 πιόνια, ένα λευκό και ένα μαύρο.

(γ) Κάθε στήλη περιέχει 2 πιόνια, ένα λευκό και ένα μαύρο.

Να βρείτε πόσες διαφορετικές τοποθετήσεις υπάρχουν.

Πρόβλημα 4 (i) Να βρείτε κλειστό τύπο για τον αριθμό Stirling 2ου είδους $S(n, 3)$.

(ii) Να αποδείξετε ότι για κάθε $n \geq 3$ ισχύει $B(n) < n!$, όπου $B(n)$ είναι ο n -οστός αριθμός Bell (δηλαδή το πλήθος των διαμερίσεων του $[n]$ σε μη κενά υποσύνολα).

Πρόβλημα 5 Πόσες μεταθέσεις του $1, 2, \dots, 9$ υπάρχουν στις οποίες ακριβώς 5 αριθμοί βρίσκονται στην αρχική τους θέση (δηλαδή υπάρχουν ακριβώς 5 σταθερά σημεία);

Πρόβλημα 6 Να βρεθεί το πλήθος των τοποθετήσεων n (ίδιων) πύργων σε σκακιέρα $n \times n$, ώστε τουλάχιστον ένας από τους πύργους να μην απειλείται.

Πρόβλημα 7 Βρείτε το πλήθος των διατεταγμένων ακολουθιών μήκους $2n$ που αποτελούνται από δύο στοιχεία τύπου 1, δύο στοιχεία τύπου 2, ..., δύο στοιχεία τύπου n , έτσι ώστε να μην υπάρχουν δύο διαδοχικά στοιχεία του ίδιου τύπου.

Πρόβλημα 8 Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν n ζευγάρια (δηλαδή $2n$ διαφορετικά άτομα) σε $2n$ καρέκλες σε σειρά, ώστε κανένα ζευγάρι να μην κάθεται σε δύο γειτονικές καρέκλες;

Πρόβλημα 9 Έστω $q(n)$ ο αριθμός των διαμερίσεων του n στις οποίες κάθε μέρος είναι τουλάχιστον 2. Να αποδειχθεί ότι για κάθε ακέραιο $n \geq 2$ ισχύει

$$q(n) = p(n) - p(n-1),$$

όπου $p(n)$ είναι ο αριθμός των διαμερίσεων του n .

Πρόβλημα 10 Να αποδειχθεί ότι το πλήθος των διαμερίσεων του n σε το πολύ k μέρη είναι ίσο με το πλήθος των διαμερίσεων του $n+k$ σε ακριβώς k μέρη.

Πρόβλημα 11 Να αποδειχθεί ότι για κάθε θετικό ακέραιο n ισχύει

$$p(1) + p(2) + \dots + p(n) < p(2n).$$

Παραδίδετε 7 Προβλήματα έως 10-03-2026.