

Αναλυτική Θεωρία Αριθμών

Σημειώσεις από τις Διαλέξεις

Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Κρήτης
Ηράκλειο, 2026

Περιεχόμενα

1	Η πρώτη αναγωγή	1
1.1	Άθροιση κατά Abel	1
1.2	Ένα φυσικό αντικείμενο: Mellin-τύπου ολοκλήρωμα	6
1.3	Η σύνδεση με την συνάρτηση Mangoldt	6
1.4	Σύνδεση με την συνάρτηση ζ	7
1.5	Συμπέρασμα	8
2	Επέκταση του Ορισμού της συνάρτησης ζ	10
2.1	Μερομορφική συνέχεια της ζ(s) στο $\Re(s) > 0$	13
2.2	Μη μηδενισμός της ζ στη γραμμή $\Re(s) = 1$	14
3	Το «μιαδικό» Korevaar–Zagier	17
3.1	Ένα βοηθητικό λήμμα: σύγκλιση $\int (A(x) - x)/x^2 \Rightarrow A(x) \sim x$	22
4	Βασικά για μιγαδικούς αριθμούς και σύνολα στο \mathbb{C}	28
4.1	Σύγκλιση στο \mathbb{C}	28
4.2	Σειρές μιγαδικών αριθμών	29
4.3	Ομοιόμορφη σύγκλιση	29
5	Η εκθετική και μιγαδικές δυνάμεις	29
6	Ολόμορφες συναρτήσεις και αναλυτική συνέχιση	30
6.1	Τοπολογικές Έννοιες	30
7	Μιγαδικά ολοκληρώματα	32
7.1	Ορισμός και βασική εκτίμηση	32
7.2	Θεώρημα και τύπος Cauchy	32
7.3	Παραμόρφωση διαδρομής (homotopy invariance)	32
7.4	Ένα μικρό λήμμα συμπαγότητας	32
8	Αναλυτικές συναρτήσεις που ορίζονται από ολοκληρώματα	33

1 Η πρώτη αναγωγή

1.1 Άθροιση κατά Abel

Θεώρημα 1.1 (Άθροιση κατά Abel). Έστω $0 < y < x$ πραγματικοί αριθμοί και $f : [y, x] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη. Θεωρούμε την ακολουθία μιγαδικών αριθμών $(a_n)_{n \geq 1}$ και για κάθε $t > 0$ ορίζουμε

$$A(t) := \sum_{n \leq t} a_n.$$

Τότε ισχύει

$$\sum_{y < n \leq x} a_n f(n) = A(x)f(x) - A(y)f(y) - \int_y^x A(t) f'(t) dt.$$

Θεώρημα 1.2 (Τύπος άθροισης Euler). Έστω $0 < y < x$ πραγματικοί αριθμοί και $f : [y, x] \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο f' στο $[y, x]$. Τότε

$$\sum_{y < n \leq x} f(n) = \int_y^x f(t) dt + \int_y^x \{t\} f'(t) dt + \{y\} f(y) - \{x\} f(x),$$

όπου $\{t\} = t - [t]$ είναι το κλασματικό μέρος.

Οι παρακάτω δύο εφαρμογές είναι χαρακτηριστικές για το πώς χρησιμοποιούμε τον τύπο άθροισης.

Θεώρημα 1.3. Για $x \geq 1$ ισχύει

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \log x + \gamma + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right), \quad (4)$$

όπου γ είναι η σταθερά του Euler, οριζόμενη από

$$\gamma = 1 - \int_1^{\infty} \frac{\{t\}}{t^2} dt.$$

Επιπλέον,

$$\gamma = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} - \log x \right).$$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 1.2 για την συνάρτηση $f(t) = 1/t$ και $y = 1$. Τότε $\{1\} = 0$ και $f'(t) = -1/t^2$, άρα

$$\sum_{1 < n \leq x} \frac{1}{n} = \int_1^x \frac{1}{t} dt + \int_1^x \{t\} \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt - \{x\} \frac{1}{x}.$$

Επομένως

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = 1 + \log x - \int_1^x \frac{\{t\}}{t^2} dt - \frac{\{x\}}{x}.$$

Προσθέτουμε και αφαιρούμε $\int_1^{\infty} \frac{\{t\}}{t^2} dt$:

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \log x + \left(1 - \int_1^{\infty} \frac{\{t\}}{t^2} dt\right) + \int_x^{\infty} \frac{\{t\}}{t^2} dt - \frac{\{x\}}{x}.$$

Ορίζοντας $\gamma = 1 - \int_1^{\infty} \frac{\{t\}}{t^2} dt$ παίρνουμε

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \log x + \gamma + \int_x^{\infty} \frac{\{t\}}{t^2} dt - \frac{\{x\}}{x}.$$

Τώρα $0 \leq \{t\} \leq 1$, άρα

$$0 \leq \int_x^{\infty} \frac{\{t\}}{t^2} dt \leq \int_x^{\infty} \frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{x}, \quad 0 \leq \frac{\{x\}}{x} \leq \frac{1}{x}.$$

Άρα το υπόλοιπο είναι $\mathcal{O}(1/x)$ και προκύπτει η (4). Τέλος, καθώς $x \rightarrow \infty$ το $\mathcal{O}(1/x)$ τείνει στο 0, οπότε

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} - \log x \rightarrow \gamma,$$

δηλαδή $\gamma = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} - \log x \right)$. □

Ορισμοί

Για $x \geq 0$ θέτουμε:

$$\pi(x) := \#\{p \leq x : p \text{ πρώτος}\}, \quad \theta(x) := \sum_{p \leq x} \log p,$$

και

$$\psi(x) := \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = \sum_{p^k \leq x} \log p,$$

όπου Λ είναι η συνάρτηση von Mangoldt: $\Lambda(n) = \log p$ αν $n = p^k$ για κάποιον πρώτο p και $k \geq 1$, και $\Lambda(n) = 0$ αλλιώς.

Θεώρημα 1.4. Για κάθε $x \geq 2$ ισχύουν οι ταυτότητες

$$\theta(x) = \pi(x) \log x - \int_2^x \frac{\pi(t)}{t} dt,$$

και

$$\pi(x) = \frac{\theta(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\theta(t)}{t(\log t)^2} dt.$$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 1.1 με $y = 2$,

$$a_n = \mathbf{1}_{\{n \text{ πρώτος}\}}, \quad f(t) = \log t, \quad A(t) = \sum_{n \leq t} a_n = \pi(t).$$

Τότε

$$\sum_{2 < n \leq x} a_n f(n) = \sum_{2 < p \leq x} \log p = \theta(x) - \log 2.$$

Το Θεώρημα 1.1 δίνει

$$\theta(x) - \log 2 = \pi(x) \log x - \pi(2) \log 2 - \int_2^x \pi(t) \frac{dt}{t}.$$

Επειδή $\pi(2) = 1$, οι όροι $\log 2$ απαλείφονται, και παίρνουμε

$$\theta(x) = \pi(x) \log x - \int_2^x \frac{\pi(t)}{t} dt.$$

Εφαρμόζουμε πάλι το Θεώρημα 1.1 με $y = 2$,

$$a_n = (\log n) \mathbf{1}_{\{n \text{ πρώτος}\}}, \quad f(t) = \frac{1}{\log t}, \quad A(t) = \sum_{n \leq t} a_n = \theta(t).$$

Τότε

$$\sum_{2 < n \leq x} a_n f(n) = \sum_{2 < p \leq x} \frac{\log p}{\log p} = \pi(x) - 1,$$

επομένως

$$\pi(x) - 1 = \theta(x) \frac{1}{\log x} - \theta(2) \frac{1}{\log 2} - \int_2^x \theta(t) f'(t) dt.$$

Επειδή $\theta(2) = \log 2$, ο όρος $\theta(2)/\log 2$ είναι 1 και απαλείφεται με το -1 αριστερά. Επίσης

$$f'(t) = \left(\frac{1}{\log t} \right)' = -\frac{1}{t(\log t)^2}.$$

Άρα

$$\pi(x) = \frac{\theta(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\theta(t)}{t(\log t)^2} dt.$$

□

Θεώρημα 1.5. Για κάθε $x \geq 1$ ισχύει

$$0 \leq \psi(x) - \theta(x) \leq \frac{\sqrt{x}(\log x)^2}{2 \log 2}. \quad (2)$$

Ειδικότερα, για $x \geq 2$ έχουμε

$$\psi(x) = \theta(x) + O(\sqrt{x}(\log x)^2).$$

Απόδειξη. Η ανισότητα $\psi(x) - \theta(x) \geq 0$ είναι άμεση, αφού η ψ περιλαμβάνει όλους τους όρους της θ και επιπλέον τις συνεισφορές από πρώτες δυνάμεις p^k με $k \geq 2$.

Για το άνω φράγμα, ξεκινάμε από τον ορισμό

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = \sum_{p^k \leq x} \Lambda(p^k).$$

Ομαδοποιώντας ως προς τον εκθέτη k παίρνουμε

$$\psi(x) = \sum_{k \geq 1} \sum_{p \leq x^{1/k}} \log p = \sum_{k \geq 1} \theta(x^{1/k}).$$

Το άθροισμα ως προς k είναι στην πράξη πεπερασμένο, διότι $\theta(y) = 0$ όταν $y < 2$ (δεν υπάρχουν πρώτοι ≤ 1). Άρα $\theta(x^{1/k}) = 0$ για $x^{1/k} < 2$, δηλαδή για

$$k > \frac{\log x}{\log 2}.$$

Συνεπώς

$$\psi(x) - \theta(x) = \sum_{k \geq 2} \theta(x^{1/k}) = \sum_{2 \leq k \leq \log x / \log 2} \theta(x^{1/k}).$$

Για $k \geq 2$ έχουμε $x^{1/k} \leq \sqrt{x}$, άρα (μονοτονία της θ)

$$\theta(x^{1/k}) \leq \theta(\sqrt{x}) \quad \text{για κάθε } k \geq 2.$$

Επομένως

$$\psi(x) - \theta(x) \leq \theta(\sqrt{x}) \cdot \frac{\log x}{\log 2}.$$

Τέλος,

$$\theta(\sqrt{x}) = \sum_{p \leq \sqrt{x}} \log p \leq \sum_{p \leq \sqrt{x}} \log \sqrt{x} \leq \sqrt{x} \log \sqrt{x}.$$

Άρα

$$\psi(x) - \theta(x) \leq \sqrt{x} \log \sqrt{x} \cdot \frac{\log x}{\log 2} = \sqrt{x} \cdot \frac{(\log x)^2}{2 \log 2},$$

που είναι ακριβώς το (2). □

Λήμμα 1.6. Για $x \geq 3$ ισχύει

$$\int_2^x \frac{dt}{\log t} \leq \frac{C_1 x}{\log x}, \quad \int_2^x \frac{dt}{(\log t)^2} \leq \frac{C_2 x}{(\log x)^2}.$$

Απόδειξη. Θέτουμε $u = \sqrt{x}$. Για $t \in [u, x]$ έχουμε $\log t \geq \log u = \frac{1}{2} \log x$. Άρα

$$\int_2^x \frac{dt}{\log t} = \int_2^u \frac{dt}{\log t} + \int_u^x \frac{dt}{\log t} \leq \frac{u-2}{\log 2} + \frac{x-u}{\frac{1}{2} \log x} = \mathcal{O}\left(\sqrt{x} + \frac{x}{\log x}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

Ομοίως,

$$\int_2^x \frac{dt}{(\log t)^2} \leq u + \frac{x-u}{\left(\frac{1}{2} \log x\right)^2} \ll \sqrt{x} + \frac{x}{(\log x)^2} \ll \frac{x}{(\log x)^2}.$$

□

Θεώρημα 1.7. Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}, \quad (3)$$

$$\theta(x) \sim x, \quad (4)$$

$$\psi(x) \sim x. \quad (5)$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 1.4 έχουμε, για $x \geq 2$,

$$\theta(x) = \pi(x) \log x - \int_2^x \frac{\pi(t)}{t} dt.$$

Διαιρώντας με x και γράφοντας $\frac{\pi(x) \log x}{x} = \frac{\pi(x)}{x/\log x}$ παίρνουμε

$$\frac{\theta(x)}{x} = \frac{\pi(x)}{x/\log x} - \frac{1}{x} \int_2^x \frac{\pi(t)}{t} dt. \quad (6)$$

(3) \implies (4). Υποθέτουμε ότι $\pi(x) \sim x/\log x$. Τότε υπάρχει σταθερά $C > 0$ ώστε για t μεγάλα

$$\pi(t) \leq C \frac{t}{\log t}.$$

Άρα

$$\frac{1}{x} \int_2^x \frac{\pi(t)}{t} dt \ll \frac{1}{x} \int_2^x \frac{dt}{\log t} \ll \frac{1}{\log x}.$$

Συνεπώς

$$\frac{1}{x} \int_2^x \frac{\pi(t)}{t} dt \longrightarrow 0 \quad (x \rightarrow \infty).$$

Επιστρέφοντας στην (6) και χρησιμοποιώντας ότι $\frac{\pi(x)}{x/\log x} \rightarrow 1$, παίρνουμε $\frac{\theta(x)}{x} \rightarrow 1$, δηλαδή $\theta(x) \sim x$.

(4) \implies (3). Από το Θεώρημα 1.4 έχουμε επίσης

$$\pi(x) = \frac{\theta(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\theta(t)}{t(\log t)^2} dt,$$

άρα

$$\frac{\pi(x)}{x/\log x} = \frac{\theta(x)}{x} + \frac{\log x}{x} \int_2^x \frac{\theta(t)}{t(\log t)^2} dt. \quad (7)$$

Υποθέτουμε $\theta(x) \sim x$. Τότε υπάρχει σταθερά $C > 0$ ώστε για t μεγάλα $\theta(t) \leq Ct$. Έτσι

$$\frac{\log x}{x} \int_2^x \frac{\theta(t)}{t(\log t)^2} dt \ll \frac{\log x}{x} \int_2^x \frac{dt}{(\log t)^2} \ll \frac{1}{\log x}.$$

Στην (7) λοιπόν, ο δεύτερος όρος τείνει στο 0 και ο πρώτος τείνει στο 1, οπότε $\frac{\pi(x)}{x/\log x} \rightarrow 1$, δηλαδή $\pi(x) \sim x/\log x$.

(5) \iff (4). Από το Θεώρημα 1.5 ισχύει $0 \leq \psi(x) - \theta(x) \leq C\sqrt{x}(\log x)^2$ για $x \geq 2$. Διαιρώντας με x παίρνουμε

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\psi(x)}{x} - \frac{\theta(x)}{x} \right) = 0.$$

Άρα $\theta(x) \sim x$ αν και μόνο αν $\psi(x) \sim x$.

Συμπεραίνουμε ότι (3), (4), (5) είναι ισοδύναμες. \square

Εφόσον θέλουμε να αποδείξουμε ότι $\psi(x) \sim x$, κάνουμε την πρώτη βασική αναγωγή, με βάση το παρακάτω Θεώρημα.

Θεώρημα 1.8 (Korevaar–Zagier). Έστω $(a_n)_{n \geq 1}$ ακολουθία με $a_n \geq 0$ και ορίζουμε, για $x \geq 1$,

$$A(x) := \sum_{n \leq x} a_n.$$

Αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_1^\infty \frac{A(x) - x}{x^2} dx$$

συγκλίνει, τότε $A(x) \sim x$, καθώς $x \rightarrow \infty$.

Απόδειξη. Θέτουμε

$$I(y) = \int_y^\infty \frac{A(t) - t}{t^2} dt.$$

Η υπόθεση ότι $\int_1^\infty \frac{A(t) - t}{t^2} dt$ συγκλίνει ισοδυναμεί με $I(y) \rightarrow 0$. Θα αποδείξουμε ότι $A(x)/x \rightarrow 1$.

Υποθέτουμε, προς άτοπο, ότι $\limsup_{x \rightarrow \infty} A(x)/x > 1$. Τότε υπάρχει $\lambda > 1$ και άπειρα x με $A(x) \geq \lambda x$. Για τέτοιο x και κάθε $t \in [x, \lambda x]$ ισχύει $A(t) \geq A(x) \geq \lambda x$, άρα

$$I(x) - I(\lambda x) = \int_x^{\lambda x} \frac{A(t) - t}{t^2} dt \geq \int_x^{\lambda x} \frac{\lambda x - t}{t^2} dt.$$

Με την αλλαγή μεταβλητής $t = vx$ παίρνουμε

$$\int_x^{\lambda x} \frac{\lambda x - t}{t^2} dt = \int_1^\lambda \frac{\lambda - v}{v^2} dv = \lambda - 1 - \log \lambda > 0.$$

Όμως $I(x) \rightarrow 0$ και $I(\lambda x) \rightarrow 0$, άρα $I(x) - I(\lambda x) \rightarrow 0$, άτοπο. Ανάλογα αποκλείεται και η σχέση $\liminf_{x \rightarrow \infty} A(x)/x < 1$. Άρα $A(x)/x \rightarrow 1$. \square

1.2 Ένα φυσικό αντικείμενο: Mellin-τύπου ολοκλήρωμα

Για $\sigma > 1$ ορίζουμε

$$F(\sigma) := \int_1^\infty \frac{\psi(x) - x}{x^{\sigma+1}} dx. \quad (8)$$

Τυπικά,

$$F(1) = \int_1^\infty \frac{\psi(x) - x}{x^2} dx,$$

άρα το ερώτημα είναι αν το $F(\sigma)$ μπορεί να «κατέβει» μέχρι $\sigma = 1$ με πεπερασμένη τιμή. Προς το παρόν εργαζόμαστε μόνο στο $\sigma > 1$, όπου όλα είναι απολύτως νόμιμα.

1.3 Η σύνδεση με την συνάρτηση Mangoldt

Λήμμα 1.9. Για κάθε $\sigma > 1$ ισχύει

$$\int_1^\infty \frac{\psi(x)}{x^{\sigma+1}} dx = \frac{1}{\sigma} \sum_{n=1}^\infty \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma}.$$

Απόδειξη. Από τον ορισμό $\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$ και επειδή $\Lambda(n) \geq 0$, μπορούμε να εφαρμόσουμε Tonelli και να ανταλλάξουμε άθροισμα–ολοκλήρωμα:

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{\psi(x)}{x^{\sigma+1}} dx &= \int_1^\infty \left(\sum_{n \leq x} \Lambda(n) \right) x^{-\sigma-1} dx \\ &= \sum_{n=1}^\infty \Lambda(n) \int_1^\infty \mathbf{1}_{\{n \leq x\}} x^{-\sigma-1} dx = \sum_{n=1}^\infty \Lambda(n) \int_n^\infty x^{-\sigma-1} dx. \end{aligned}$$

Για $\sigma > 0$ έχουμε

$$\int_n^\infty x^{-\sigma-1} dx = \frac{1}{\sigma} n^{-\sigma},$$

οπότε παίρνουμε το ζητούμενο. \square

Επιπλέον για κάθε $\sigma > 1$ ισχύει

$$\int_1^\infty \frac{x}{x^{\sigma+1}} dx = \int_1^\infty x^{-\sigma} dx = \frac{1}{\sigma-1},$$

επομένως παίρνουμε την ακόλουθη ισότητα.

Πρόταση 1.10. Για κάθε $\sigma > 1$ ισχύει

$$F(\sigma) = \frac{1}{\sigma} \sum_{n=1}^\infty \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma} - \frac{1}{\sigma-1}. \quad (9)$$

Άρα το πρόβλημά μας μεταφέρθηκε φυσικά στη μελέτη της σειράς Dirichlet

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma}.$$

1.4 Σύνδεση με την συνάρτηση ζ

Εισάγουμε την συνάρτηση ζ ως σειρά Dirichlet:

$$\zeta(\sigma) := \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\sigma} \quad (\sigma > 1). \quad (10)$$

Λήμμα 1.11 (Παραγωγή της ζ για $\sigma > 1$). Για κάθε $\sigma > 1$ ισχύει

$$\zeta'(\sigma) = - \sum_{n=1}^\infty \frac{\log n}{n^\sigma}.$$

Απόδειξη. Για κάθε $\varepsilon > 0$ η σειρά $\sum_{n \geq 1} \frac{\log n}{n^{1+\varepsilon}}$ συγκλίνει, οπότε η σειρά των παραγώγων συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[1 + \varepsilon, \infty)$ (Weierstrass M -test). Άρα επιτρέπεται η παραγωγή της (10) για $\sigma > 1$. \square

Το κρίσιμο αριθμητικό γεγονός είναι μια ταυτότητα για τη von Mangoldt συνάρτηση.

Λήμμα 1.12 (Ταυτότητα διαιρετών για Λ). Για κάθε ακέραιο $n \geq 1$ ισχύει

$$\log n = \sum_{d|n} \Lambda(d). \quad (11)$$

Απόδειξη. Αν $n = \prod_{j=1}^m p_j^{\alpha_j}$, τότε $\log n = \sum_{j=1}^m \alpha_j \log p_j$. Οι διαιρέτες d του n με $\Lambda(d) \neq 0$ είναι ακριβώς οι δυνάμεις p_j^k με $1 \leq k \leq \alpha_j$, άρα

$$\sum_{d|n} \Lambda(d) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{\alpha_j} \log p_j = \sum_{j=1}^m \alpha_j \log p_j = \log n.$$

□

Λήμμα 1.13. Για κάθε $\sigma > 1$ η σειρά $\sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma}$ συγκλίνει απολύτως.

Απόδειξη. Ισχύει $\Lambda(n) \leq \log n$, άρα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\Lambda(n)|}{n^\sigma} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^\sigma} < \infty \quad (\sigma > 1).$$

□

Θεώρημα 1.14. Για κάθε $\sigma > 1$ ισχύει

$$-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma}. \quad (12)$$

Απόδειξη. Από το Λήμμα 1.11 έχουμε

$$-\zeta'(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^\sigma}.$$

Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα (11):

$$-\zeta'(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} \sum_{d|n} \Lambda(d).$$

Για $\sigma > 1$ όλοι οι όροι είναι μη αρνητικοί, οπότε (Tonelli) αναδιατάσσουμε:

$$\begin{aligned} -\zeta'(\sigma) &= \sum_{d=1}^{\infty} \Lambda(d) \sum_{\substack{n \geq 1 \\ d|n}} \frac{1}{n^\sigma} = \sum_{d=1}^{\infty} \Lambda(d) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(dm)^\sigma} \\ &= \left(\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\Lambda(d)}{d^\sigma} \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^\sigma} \right) = \left(\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\Lambda(d)}{d^\sigma} \right) \zeta(\sigma). \end{aligned}$$

Επειδή $\zeta(\sigma) > 0$ για $\sigma > 1$, διαιρούμε και παίρνουμε την (12). □

1.5 Συμπέρασμα

Συνδυάζοντας την Πρόταση 1.10 με το Θεώρημα 1.14 παίρνουμε, για κάθε $\sigma > 1$,

$$F(\sigma) = -\frac{1}{\sigma} \frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} - \frac{1}{\sigma - 1}. \quad (13)$$

Ξεκινήσαμε από τη ψ και το κριτήριο Korevaar–Zagier, και φτάσαμε στο ότι η μελέτη της σύγκλισης του (??) ισοδυναμεί με το να καταλάβουμε τη συμπεριφορά του δεξιού μέλους του (13) καθώς $\sigma \downarrow 1$.

Γιατί αναγκαστικά θα περάσουμε σε μιγαδική ανάλυση.

Παρατήρηση 1.15 (Γιατί δεν αρκεί να μείνουμε στο $\sigma \in \mathbb{R}$). Μέχρι εδώ δουλέψαμε μόνο με πραγματικά $\sigma > 1$. Το επόμενο βήμα θα ήταν να περάσουμε στο

$$F(1) = \int_1^\infty \frac{\psi(x) - x}{x^2} dx,$$

αλλά αυτό δεν προκύπτει μόνο από τη γνώση του $F(\sigma)$ για $\sigma > 1$. Πράγματι, αν πάρουμε

$$E(x) := x \sin(\log x), \quad F_E(\sigma) := \int_1^\infty \frac{E(x)}{x^{\sigma+1}} dx = \int_1^\infty \frac{\sin(\log x)}{x^\sigma} dx,$$

με την αλλαγή μεταβλητής $u = \log x$ προκύπτει

$$F_E(\sigma) = \int_0^\infty e^{-(\sigma-1)u} \sin u \, du = \frac{1}{(\sigma-1)^2 + 1},$$

άρα $\lim_{\sigma \downarrow 1} F_E(\sigma) = 1$. Πράγματι, ένας γρήγορος τρόπος για τον τελευταίο υπολογισμό είναι

$$\int_0^\infty e^{-(\sigma-1)u} \sin u \, du = \Im \int_0^\infty e^{-(\sigma-1)u} e^{iu} \, du = \Im \int_0^\infty e^{-(\sigma-1-i)u} \, du.$$

Για $\sigma > 1$ έχουμε $\Re(\sigma-1-i) = \sigma-1 > 0$, άρα

$$\int_0^\infty e^{-(\sigma-1-i)u} \, du = \frac{1}{\sigma-1-i}.$$

Επομένως

$$\int_0^\infty e^{-(\sigma-1)u} \sin u \, du = \Im \frac{1}{\sigma-1-i} = \Im \left(\frac{\sigma-1+i}{(\sigma-1)^2+1} \right) = \frac{1}{(\sigma-1)^2+1}.$$

Ωστόσο

$$F_E(1) = \int_1^\infty \frac{\sin(\log x)}{x} dx = \int_0^\infty \sin u \, du,$$

που δεν συγκλίνει. Δηλαδή: ακόμη και πολύ καλή συμπεριφορά για όλα τα $\sigma > 1$ (και μάλιστα ύπαρξη ορίου στο $\sigma \downarrow 1$) δεν εγγυάται σύγκλιση στο $\sigma = 1$.

Η σωστή πρόσθετη πληροφορία είναι να ελέγξουμε την οριακή ευθεία $\Re(s) = 1$, δηλαδή τι συμβαίνει για $s = \sigma + it$. Στο παραπάνω παράδειγμα, ο αντίστοιχος μετασχηματισμός είναι

$$F_E(s) = \frac{1}{(s-1)^2+1},$$

που έχει πόλους στα $s = 1 \pm i$, δηλαδή πάνω στην $\Re(s) = 1$. Αυτές οι ανωμαλίες αντιστοιχούν σε ταλαντώσεις και είναι ακριβώς αυτό που πρέπει να αποκλείσουμε στην περίπτωση της ζ .

2 Επέκταση του Ορισμού της συνάρτησης ζ

Λήμμα 2.1. Έστω $(a_n)_{n \geq 1}$ με $a_n \in \mathbb{C}$ και έστω

$$F(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \quad s = \sigma + it.$$

Αν υπάρχει $\sigma_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^{\sigma_0}} < \infty$, τότε για κάθε $\sigma_1 > \sigma_0$ η σειρά συγκλίνει απολύτως και ομοιόμορφα στο ημιεπίπεδο $\Re(s) \geq \sigma_1$. Επιπλέον, η F είναι ολόμορφη στο $\Re(s) > \sigma_0$ και

$$F'(s) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \log n}{n^s},$$

με ομοιόμορφη σύγκλιση σε κάθε $\Re(s) \geq \sigma_1 > \sigma_0$.

Απόδειξη. Για s με $\Re(s) = \sigma \geq \sigma_1$ έχουμε

$$\left| \frac{a_n}{n^s} \right| = \frac{|a_n|}{n^\sigma} \leq \frac{|a_n|}{n^{\sigma_1}}.$$

Επειδή $\sum_{n \geq 1} \frac{|a_n|}{n^{\sigma_1}} < \infty$, το M -κριτήριο του Weierstrass δίνει ομοιόμορφη σύγκλιση στο $\Re(s) \geq \sigma_1$. Άρα η F είναι συνεχής εκεί.

Για την ολομορφία, παρατηρούμε ότι κάθε όρος $s \mapsto a_n n^{-s} = a_n e^{-s \log n}$ είναι ολόμορφη και για $\sigma \geq \sigma_1$ ισχύει

$$\left| \frac{a_n \log n}{n^s} \right| = \frac{|a_n| \log n}{n^\sigma} \leq \frac{|a_n| \log n}{n^{\sigma_1}}.$$

Αλλά για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $\log n \leq n^\varepsilon$ για n αρκετά μεγάλο, οπότε (π.χ. παίρνοντας $\varepsilon = (\sigma_1 - \sigma_0)/2$) η $\sum \frac{|a_n| \log n}{n^{\sigma_1}}$ συγκλίνει. Άρα η σειρά των παραγώγων συγκλίνει ομοιόμορφα όταν $\Re(s) \geq \sigma_1$. Από το Θεώρημα 6.7 συμπεραίνουμε ότι F είναι ολόμορφη και ότι επιτρέπεται παραγωγίση όρο-όρο. \square

Πρόταση 2.2. Για $\Re(s) > 1$ ορίζουμε

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Τότε η σειρά συγκλίνει απολύτως για $\Re(s) > 1$, ορίζει ολόμορφη συνάρτηση στο $\{s : \Re(s) > 1\}$, και για κάθε $\Re(s) > 1$ ισχύει

$$\zeta'(s) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^s},$$

με ομοιόμορφη σύγκλιση σε κάθε ημιεπίπεδο $\Re(s) \geq 1 + \delta$ ($\delta > 0$).

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το Λήμμα 2.1 με $a_n \equiv 1$ και $\sigma_0 = 1$. \square

Παρατήρηση 2.3. Θέτουμε $H_1 := \{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > 1\}$. Η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο H_1 .

Πράγματι, έστω προς άτοπο ότι συγκλίνει ομοιόμορφα στο H_1 . Τότε, από το κριτήριο Cauchy για ομοιόμορφη σύγκλιση, για $\varepsilon = 1$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $\ell > k \geq N$ και κάθε $s \in H_1$ να ισχύει

$$\left| \sum_{n=k}^{\ell} \frac{1}{n^s} \right| < 1.$$

Ειδικότερα, αυτό ισχύει για κάθε πραγματικό $s > 1$ (αφού $(1, \infty) \subset H_1$). Για πραγματικό $s > 1$ όλοι οι όροι είναι θετικοί, άρα

$$\sum_{n=k}^{\ell} \frac{1}{n^s} < 1 \quad (\ell > k \geq N, s > 1).$$

Αφήνοντας τώρα $s \rightarrow 1^+$, και χρησιμοποιώντας ότι για κάθε σταθερά ℓ, k έχουμε $\frac{1}{n^s} \rightarrow \frac{1}{n}$, παίρνουμε

$$\sum_{n=k}^{\ell} \frac{1}{n} \leq 1 \quad (\ell > k \geq N).$$

Τέλος, αφήνοντας $\ell \rightarrow \infty$ καταλήγουμε ότι

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n} \leq 1 \quad (k \geq N),$$

άτοπο, επειδή η αρμονική σειρά αποκλίνει. Άρα η αρχική υπόθεση είναι ψευδής.

Πρόταση 2.4. *Θέτουμε*

$$F(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

Τότε η F είναι καλά ορισμένη και ολόμορφη στο $\Re(s) > 1$, και

$$F'(s) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n) \log n}{n^s},$$

με ομοιόμορφη σύγκλιση σε κάθε $\Re(s) \geq 1 + \delta$.

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε ότι $0 \leq \Lambda(n) \leq \log n$ για κάθε $n \geq 2$. Για $\sigma > 1$ έχουμε

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{|\Lambda(n)|}{n^{\sigma}} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n^{\sigma}} < \infty,$$

άρα εφαρμόζουμε το Λήμμα 2.1 με $\sigma_0 = 1$. □

Πρόταση 2.5. *Θεωρούμε το ημιεπίπεδο $\Omega := \{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > 1\}$. Υποθέτουμε ότι για κάθε πραγματικό $s > 1$ έχει ήδη αποδειχθεί η ταυτότητα*

$$-\zeta'(s) = \zeta(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

Τότε η ίδια ταυτότητα ισχύει για κάθε μιγαδικό $s \in \Omega$.

Απόδειξη. Από την Πρόταση 2.2 η ζ και η ζ' είναι ολόμορφες στο Ω . Από την Πρόταση 2.4 η

$$F(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$$

είναι ολόμορφη στο Ω . Άρα και το γινόμενο $\zeta(s)F(s)$ είναι ολόμορφη συνάρτηση στο Ω .

Ορίζουμε την ολόμορφη συνάρτηση

$$H(s) := -\zeta'(s) - \zeta(s)F(s) \quad (s \in \Omega).$$

Από την υπόθεση, για κάθε πραγματικό $s > 1$ ισχύει $H(s) = 0$. Το σύνολο $(1, \infty) \subset \Omega$ έχει σημείο συσσώρευσης εντός του Ω (π.χ. στο $s = 2$), άρα από την Αρχή Αναλυτικής Συνέχισης (Identity Theorem) συμπεραίνουμε ότι $H \equiv 0$ σε όλο το Ω . Δηλαδή

$$-\zeta'(s) = \zeta(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s},$$

για κάθε $s \in \Omega$. □

Λήμμα 2.6. Έστω $\Omega \subset \mathbb{C}$ ανοικτό, $s_0 \in \Omega$ και $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφη. Υποθέτουμε ότι $f \not\equiv 0$ και ότι $f(s_0) = 0$. Τότε υπάρχει ακέραιος $m \geq 1$ και ολόμορφη συνάρτηση h σε κάποια γειτονιά του s_0 με $h(s_0) \neq 0$ τέτοια ώστε

$$f(s) = (s - s_0)^m h(s)$$

για s κοντά στο s_0 . Ο m είναι μοναδικός και λέγεται τάξη (ή πολλαπλότητα) του μηδενικού στο s_0 .

Απόδειξη. Επειδή f είναι ολόμορφη, υπάρχει $r > 0$ και ανάπτυγμα Taylor

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (s - s_0)^n \quad (|s - s_0| < r).$$

Από $f(s_0) = 0$ παίρνουμε $a_0 = 0$. Επειδή $f \not\equiv 0$, δεν είναι όλοι οι συντελεστές μηδέν, άρα υπάρχει ελάχιστος $m \geq 1$ με $a_m \neq 0$. Τότε

$$f(s) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n (s - s_0)^n = (s - s_0)^m \sum_{k=0}^{\infty} a_{m+k} (s - s_0)^k.$$

Θέτουμε

$$h(s) := \sum_{k=0}^{\infty} a_{m+k} (s - s_0)^k.$$

Η h είναι ολόμορφη στο $|s - s_0| < r$ και $h(s_0) = a_m \neq 0$. Η μοναδικότητα του m προκύπτει από τη μοναδικότητα του Taylor αναπτύγματος. □

Θεώρημα 2.7. Για κάθε s με $\Re(s) > 1$ ισχύει $\zeta(s) \neq 0$.

Απόδειξη. Έστω προς άτοπο ότι υπάρχει s_0 με $\Re(s_0) > 1$ και $\zeta(s_0) = 0$. Η ζ είναι ολόμορφη στο $\Re(s) > 1$, άρα το s_0 είναι μηδενικό κάποιας τάξης $m \geq 1$, δηλαδή υπάρχει ολόμορφη h κοντά στο s_0 με $h(s_0) \neq 0$ ώστε

$$\zeta(s) = (s - s_0)^m h(s).$$

Τότε

$$\zeta'(s) = m(s - s_0)^{m-1}h(s) + (s - s_0)^m h'(s),$$

οπότε η $\zeta'(s)$ έχει μηδενικό ακριβώς τάξης $m-1$ στο s_0 . Ισοδύναμα, $-\zeta'(s)$ έχει μηδενικό ακριβώς τάξης $m-1$ στο s_0 .

Από την Πρόταση 2.5 έχουμε στο $\Re(s) > 1$ την ταυτότητα

$$-\zeta'(s) = \zeta(s) F(s), \quad F(s) := \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

Η F είναι ολόμορφη στο $\Re(s) > 1$ (από απόλυτη σύγκλιση), άρα κοντά στο s_0 είναι πεπερασμένη. Επομένως το γινόμενο $\zeta(s)F(s)$ έχει μηδενικό τάξης τουλάχιστον m στο s_0 , αφού η ζ έχει τάξη m εκεί.

Άρα το αριστερό μέλος $-\zeta'(s)$ θα έπρεπε να έχει μηδενικό τάξης $\geq m$ στο s_0 , που αντιφάσκει με το ότι έχει τάξη ακριβώς $m-1$. Άτοπο. Συνεπώς $\zeta(s) \neq 0$ για $\Re(s) > 1$. \square

2.1 Μερομορφική συνέχεια της $\zeta(s)$ στο $\Re(s) > 0$

Θεώρημα 2.8. Για $s \in \mathbb{C}$ με $\sigma = \Re(s) > 1$ ισχύει

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \int_1^\infty \frac{\{t\}}{t^{s+1}} dt.$$

Απόδειξη. Από τον τύπο αθροίσεως του Euler, παίρνουμε

$$\sum_{n \leq x} n^{-s} = 1 + \int_1^x t^{-s} dt + \int_1^x \{t\} (t^{-s})' dt - \frac{\{x\}}{x^s}.$$

Υπολογίζοντας τα παραπάνω ολοκληρώματα καταλήγουμε στην ισότητα

$$\sum_{n \leq x} n^{-s} = \frac{x^{1-s}}{1-s} + \frac{s}{s-1} - \frac{\{x\}}{x^s} - s \int_1^x \frac{\{t\}}{t^{s+1}} dt.$$

Περνώντας στο όριο $x \rightarrow \infty$ (και χρησιμοποιώντας ότι $\sigma > 1$ ώστε $x^{1-s} \rightarrow 0$ και $\{x\}/x^s \rightarrow 0$), παίρνουμε το ζητούμενο. \square

Θεώρημα 2.9. Η σχέση του Θεωρήματος 2.8 δίνει αναλυτική συνέχιση της $\zeta(s)$ στο ημιεπίπεδο $\sigma > 0$, με απλό πόλο στο $s = 1$ και υπόλοιπο 1.

Απόδειξη. Εφόσον η συνάρτηση

$$s \mapsto \frac{s}{s-1} = \frac{1}{s-1} + 1$$

είναι αναλυτική σε κάθε σημείο του $\sigma > 0$ εκτός από έναν απλό πόλο στο $s = 1$ με υπόλοιπο 1, αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση

$$f(s) = \int_1^\infty \frac{\{t\}}{t^{s+1}} dt$$

είναι αναλυτική στο $\sigma > 0$.

Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$f_m(s) = \int_1^m \frac{\{t\}}{t^{s+1}} dt \quad \text{για } s \in \mathbb{C} \text{ με } \sigma > 0.$$

Επειδή το ολοκληρωτέο είναι αναλυτική συνάρτηση του s , δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι f_m είναι αναλυτική στο ημιεπίπεδο $\sigma > 0$.

Εναλλακτικά, γράφουμε το $f_m(s)$ ως δυναμοσειρά. Παρατηρούμε ότι

$$f_m(s) = \int_1^m \{t\} e^{-(s+1)\log t} dt = \int_1^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{t\} (-\log t)^n (s+1)^n}{n!} dt,$$

και ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{\{t\} (-\log t)^n (s+1)^n}{n!} \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(|\log t|(|s|+1))^n}{n!} = e^{|\log t|(|s|+1)}.$$

Άρα

$$\int_1^m \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{\{t\} (-\log t)^n (s+1)^n}{n!} \right| dt \leq \int_1^m t^{|s|+1} dt < \infty.$$

Με το θεώρημα Fubini, μπορούμε να αλλάξουμε τη σειρά ολοκλήρωσης και αθροίσεως και παίρνουμε

$$f_m(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(s+1)^n}{n!} \int_1^m \{t\} (-\log t)^n dt,$$

που είναι δυναμοσειρά ως προς το s .

Για να δούμε ότι $f_m \rightarrow f$ ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $\sigma > 0$, θεωρούμε το ημιεπίπεδο $\sigma \geq \delta$ και παίρνουμε

$$|f_m(s) - f(s)| \leq \int_m^{\infty} \frac{1}{t^{\sigma+1}} dt \ll \frac{1}{\sigma m^{\sigma}} \leq \frac{1}{\delta m^{\delta}}.$$

Άρα, αν $\varepsilon, \delta > 0$ δοθούν, μπορούμε να διαλέξουμε $M > 0$ που εξαρτάται από ε, δ αλλά όχι από το s (π.χ. $M = (\delta\varepsilon)^{-1/\delta}$) τέτοιο ώστε $|f_m(s) - f(s)| < \varepsilon$ για κάθε $m > M$ και κάθε $s \in \mathbb{C}$ με $\sigma \geq \delta$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. \square

2.2 Μη μηδενισμός της ζ στη γραμμή $\Re(s) = 1$

Λήμμα 2.10. Για $\Re(s) > 1$ ισχύει

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s},$$

και η σειρά συγκλίνει απολύτως και ομοιόμορφα σε κάθε ημιεπίπεδο $\Re(s) \geq 1 + \varepsilon$.

Απόδειξη. Προκύπτει άμεσα από τα παραπάνω. \square

Λήμμα 2.11. Για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$P(\theta) := 3 + 4 \cos \theta + \cos(2\theta) = 2(1 + \cos \theta)^2 \geq 0.$$

Λήμμα 2.12. Έστω $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Για $\sigma > 1$ θέτουμε

$$G(\sigma) := |\zeta(\sigma)|^3 |\zeta(\sigma + it)|^4 |\zeta(\sigma + 2it)|.$$

Τότε:

1. $G(\sigma) \geq 1$ για κάθε $\sigma > 1$.

2. Πιο συγκεκριμένα,

$$-\frac{d}{d\sigma} \log G(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma} P(t \log n) \geq 0,$$

όπου P είναι όπως στο Λήμμα 2.11.

Απόδειξη. Για $\sigma > 1$ έχουμε $\zeta(\sigma) \neq 0$, άρα οι ποσότητες ζ'/ζ ορίζονται και είναι ολόμορφες.

Βήμα 1: Παράγωγος του $\log G(\sigma)$. Για κάθε $u \in \mathbb{R}$ και $\sigma > 1$ ισχύει

$$\frac{d}{d\sigma} \log |\zeta(\sigma + iu)| = \Re \left(\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + iu) \right).$$

Πράγματι, γράφουμε

$$\zeta(\sigma + it) = u(\sigma, t) + iv(\sigma, t), \quad u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R},$$

και υποθέτουμε ότι $\zeta(\sigma + it) \neq 0$. Τότε

$$\log |\zeta(\sigma + it)| = \frac{1}{2} \log(u(\sigma, t)^2 + v(\sigma, t)^2),$$

οπότε, για t σταθερό,

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \log |\zeta(\sigma + it)| = \frac{u u_\sigma + v v_\sigma}{u^2 + v^2}.$$

Από την άλλη, επειδή η ζ είναι ολόμορφη, έχουμε

$$\zeta'(\sigma + it) = u_\sigma(\sigma, t) + i v_\sigma(\sigma, t),$$

άρα

$$\frac{\zeta'(\sigma + it)}{\zeta(\sigma + it)} = \frac{u_\sigma + i v_\sigma}{u + i v} = \frac{(u_\sigma + i v_\sigma)(u - i v)}{u^2 + v^2} = \frac{u u_\sigma + v v_\sigma}{u^2 + v^2} + i \frac{u v_\sigma - v u_\sigma}{u^2 + v^2}.$$

Συνεπώς

$$\Re \left(\frac{\zeta'(\sigma + it)}{\zeta(\sigma + it)} \right) = \frac{u u_\sigma + v v_\sigma}{u^2 + v^2} = \frac{\partial}{\partial \sigma} \log |\zeta(\sigma + it)|.$$

Επειδή $(\log \zeta)' = \zeta'/\zeta$ όπου $\zeta \neq 0$, καταλήγουμε

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \log |\zeta(\sigma + it)| = \Re((\log \zeta)'(\sigma + it)).$$

Άρα

$$\frac{d}{d\sigma} \log G(\sigma) = 3 \Re \left(\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) \right) + 4 \Re \left(\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + it) \right) + \Re \left(\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + 2it) \right).$$

Επομένως

$$-\frac{d}{d\sigma} \log G(\sigma) = 3 \Re \left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) \right) + 4 \Re \left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + it) \right) + \Re \left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + 2it) \right).$$

Βήμα 2: Χρήση της Dirichlet σειράς (Λήμμα 2.10). Για $\sigma > 1$ έχουμε

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + iu) = \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma + iu}} = \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma} e^{-iu \log n},$$

και επειδή η σύγκλιση είναι απόλυτη, παίρνουμε πραγματικά μέρη όρο-όρο:

$$\Re\left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + iu)\right) = \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma} \cos(u \log n).$$

Άρα

$$-\frac{d}{d\sigma} \log G(\sigma) = \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma} \left(3 + 4 \cos(t \log n) + \cos(2t \log n)\right) = \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma} P(t \log n).$$

Με το Λήμμα 2.11 έχουμε $P(\cdot) \geq 0$ και με $\Lambda(n) \geq 0$ παίρνουμε

$$-\frac{d}{d\sigma} \log G(\sigma) \geq 0.$$

Άρα $\frac{d}{d\sigma} \log G(\sigma) \leq 0$, δηλαδή η $\log G$ είναι φθίνουσα ως προς σ .

Βήμα 3: Πέρασμα στο όριο $\sigma \rightarrow \infty$. Για κάθε σταθερό u έχουμε

$$\zeta(\sigma + iu) = 1 + \sum_{n \geq 2} n^{-(\sigma + iu)} \Rightarrow |\zeta(\sigma + iu) - 1| \leq \sum_{n \geq 2} n^{-\sigma} \xrightarrow{\sigma \rightarrow \infty} 0.$$

Άρα $\zeta(\sigma + iu) \rightarrow 1$, οπότε $G(\sigma) \rightarrow 1$ όταν $\sigma \rightarrow \infty$. Επειδή $\log G$ είναι φθίνουσα στο σ , έχουμε για κάθε $\sigma > 1$:

$$\log G(\sigma) \geq \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \log G(\sigma) = 0,$$

δηλαδή $G(\sigma) \geq 1$. □

Θεώρημα 2.13. Ισχύει $\zeta(s) \neq 0$ για κάθε $s \in \mathbb{C}$ με $\Re(s) = 1$.

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι $\zeta(1 + it) \neq 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Υποθέτουμε, προς άτοπο, ότι

$$\zeta(1 + it) = 0.$$

Από το Θεώρημα 2.9, η $\zeta(s)$ είναι αναλυτική σε κάθε σημείο της ευθείας $\Re(s) = 1$ εκτός από ένα απλό πόλο στο $s = 1$. Άρα $\zeta^3(\sigma)$ έχει πόλο τάξης 3 στο $\sigma = 1$ και επίσης $\zeta^4(\sigma + it)$ έχει μηδενικό τάξης τουλάχιστον 4 στο $\sigma = 1$ (δηλαδή στο σημείο $s = 1 + it$). Συνεπώς

$$\lim_{\sigma \rightarrow 1^+} \zeta^4(\sigma + it) \zeta^3(\sigma) = 0.$$

Επιπλέον, επειδή ζ είναι αναλυτική στο σημείο $1 + 2it$ (αφού $t \neq 0$), είναι και συνεχής εκεί, οπότε

$$\lim_{\sigma \rightarrow 1^+} \zeta(\sigma + 2it) = \zeta(1 + 2it).$$

Άρα

$$\lim_{\sigma \rightarrow 1^+} \zeta^4(\sigma + it) \zeta^3(\sigma) \zeta(\sigma + 2it) = 0.$$

Όμως, από το Λήμμα 2.12 ισχύει ότι για κάθε $\sigma > 1$,

$$|\zeta^4(\sigma + it) \zeta^3(\sigma) \zeta(\sigma + 2it)| \geq 1.$$

Επομένως το όριο καθώς $\sigma \rightarrow 1^+$ δεν μπορεί να είναι 0, που είναι άτοπο. Άρα η υπόθεση $\zeta(1 + it) = 0$ είναι ψευδής, και συνεπώς $\zeta(1 + it) \neq 0$ για κάθε $t \neq 0$. Μαζί με το $t = 0$ (όπου υπάρχει πόλος), παίρνουμε ότι $\zeta(s) \neq 0$ για κάθε s με $\Re(s) = 1$. □

Παρατήρηση 2.14. Γιατί επιλέξαμε αυτές τις δυνάμεις; Το τριγ βασίζεται σε δύο ταυτόχρονες απαιτήσεις:

(i) **Θέλουμε μη αρνητικότητα.** Θέλουμε ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο $P(\theta)$ τέτοιο ώστε

$$P(\theta) = a_0 + a_1 \cos \theta + a_2 \cos(2\theta) \geq 0 \quad \forall \theta,$$

για να συμπεράνουμε ότι

$$-\frac{d}{d\sigma} \log G(\sigma) = \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma} P(t \log n) \geq 0.$$

Το απλούστερο “τετράγωνο” που δίνει πολυώνυμο μέχρι βαθμό 2 είναι

$$(1 + \cos \theta)^2 = \frac{1}{2} (3 + 4 \cos \theta + \cos(2\theta)).$$

Για να πάρουμε ακέραιους συντελεστές (ώστε να αντιστοιχούν σε ακέραιες δυνάμεις της ζ), πολλαπλασιάζουμε επί 2 και παίρνουμε ακριβώς

$$P(\theta) = 3 + 4 \cos \theta + \cos(2\theta) = 2(1 + \cos \theta)^2 \geq 0.$$

Αυτό εξηγεί το σχήμα των δυνάμεων 3, 4, 1.

(ii) **Θέλουμε το μηδενικό να “νικάει” τον πόλο στο 1.** Κοντά στο $\sigma = 1$ έχουμε $|\zeta(\sigma)| \asymp (\sigma - 1)^{-1}$ (πόλος τάξης 1), ενώ αν υπήρχε μηδενικό στο $1 + it$ τάξης $m \geq 1$ τότε $|\zeta(\sigma + it)| \ll (\sigma - 1)^m$. Άρα, αν πάρεις

$$|\zeta(\sigma)|^{a_0} |\zeta(\sigma + it)|^{a_1}$$

με ίδιους εκθέτες $a_0 = a_1$ (όπως θα προέκυπτε από το πολυώνυμο $1 + \cos \theta$ ή $2 + 2 \cos \theta$), τότε για απλό μηδενικό ($m = 1$) θα έχεις εκθέτη

$$-(a_0) + a_1 m = -a_0 + a_0 \cdot 1 = 0,$$

δηλαδή το γινόμενο δεν τείνει αναγκαστικά στο 0 όταν $\sigma \downarrow 1$, άρα δεν παίρνεις αντίφαση από το $G(\sigma) \geq 1$.

Στο δικό μας $G(\sigma)$ οι εκθέτες είναι $a_0 = 3$ για τον πόλο στο $s = 1$ και $a_1 = 4$ για το υποτιθέμενο μηδενικό στο $1 + it$. Τότε για $m = 1$ παίρνεις

$$-3 + 4 \cdot 1 = 1 > 0,$$

οπότε αναγκαστικά $G(\sigma) \rightarrow 0$ αν υπήρχε μηδενικό, και έτσι κλείνει η αντίφαση. Γι’ αυτό οι “συγκεκριμένες” δυνάμεις είναι ακριβώς αυτές που χρειάζονται: προέρχονται από τετράγωνο (άρα μη αρνητικότητα) και ταυτόχρονα έχουν $4 > 3$ (άρα το μηδενικό υπερिशύει του πόλου).

3 Το «μιγαδικό» Korevaar–Zagier

Θεώρημα 3.1 (Korevaar–Zagier). Έστω $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ φραγμένη και ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό φραγμένο υποδιάστημα του $[0, \infty)$. Θέτουμε

$$g(s) := \int_0^\infty f(x) e^{-sx} dx \quad (\operatorname{Re}(s) > 0).$$

Υποθέτουμε ότι υπάρχει ανοικτό σύνολο $G \subset \mathbb{C}$ με $\{\operatorname{Re}(s) \geq 0\} \subset G$ και ολόμορφη επέκταση της g στο G (την οποία συμβολίζουμε πάλι με g). Τότε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int_0^\infty f(x) dx$$

συγκλίνει και ισχύει

$$\int_0^\infty f(x) dx = g(0).$$

Απόδειξη. Θέτουμε $M := \sup_{x \geq 0} |f(x)| < \infty$. Για $T > 0$ ορίζουμε

$$g_T(s) := \int_0^T f(x)e^{-sx} dx \quad (s \in \mathbb{C}).$$

1) Το g_T είναι ολόμορφο (entire). Για κάθε $s \in \mathbb{C}$ το $x \mapsto f(x)e^{-sx}$ είναι ολοκληρώσιμο στο $[0, T]$, άρα το $g_T(s)$ ορίζεται. Επιπλέον, για $h \neq 0$ γράφουμε

$$\frac{g_T(s+h) - g_T(s)}{h} = \int_0^T f(x)e^{-sx} \frac{e^{-hx} - 1}{h} dx.$$

Για σταθερό s και για h μικρό, ισχύει (με το θεώρημα μέσης τιμής στην πραγματική μεταβλητή)

$$\left| \frac{e^{-hx} - 1}{h} \right| \leq x e^{|h|x} \leq x e^x \quad (0 \leq x \leq T),$$

οπότε το ολοκληρωτέο κυριαρχείται από την ολοκληρώσιμη συνάρτηση $M x e^x e^{|s|x}$, όπου $M = \sup_{[0, T]} |f|$. Άρα, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης, μπορούμε να περάσουμε στο όριο $h \rightarrow 0$ μέσα στο ολοκλήρωμα και παίρνουμε

$$g'_T(s) = \int_0^T f(x)e^{-sx} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{-hx} - 1}{h} dx = - \int_0^T x f(x) e^{-sx} dx.$$

Επομένως g_T είναι μιγαδικά παραγωγίσιμη σε κάθε $s \in \mathbb{C}$, άρα ολόμορφη στο \mathbb{C} .

2) Στόχος. Αρκεί να δείξουμε ότι $g_T(0) \rightarrow g(0)$ όταν $T \rightarrow \infty$. Πράγματι, $g_T(0) = \int_0^T f(x) dx$, άρα το $\int_0^\infty f$ συγκλίνει και ισούται με $g(0)$.

3) Επιλογή καμπύλης ολοκλήρωσης γύρω από το 0. Σταθεροποιούμε $R > 0$. Θέτουμε

$$L_R := \{it : |t| \leq 2R\} \cup \{\operatorname{Re}(s) = 0\} \subset G.$$

Για κάθε σημείο $z \in L_R$ υπάρχει ανοικτός δίσκος $B(z, r_z) \subset G$ (επειδή το G είναι ανοικτό). Από συμπαγεία του L_R (Heine–Borel) παίρνουμε πεπερασμένη υποκάλυψη, άρα υπάρχει $\delta = \delta(R) > 0$ τέτοια ώστε

$$D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2R, \operatorname{Re}(z) > -2\delta\} \subset G.$$

Τότε επίσης η κλειστή καμπύλη

$$C := \partial\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R, \operatorname{Re}(z) \geq -\delta\}$$

βρίσκεται μέσα στο D και περικλείει το 0. (Γεωμετρικά: είναι τόξο του κύκλου $|z| = R$ για $\operatorname{Re}(z) \geq -\delta$ μαζί με τη χορδή $\operatorname{Re}(z) = -\delta$.)

4) Τύπος Cauchy για $g - g_T$ και «κόλπο» Carleman. Η συνάρτηση $h_T(z) := g(z) - g_T(z)$ είναι ολόμορφη στο D (ως διαφορά δύο ολόμορφων). Άρα από τον τύπο του Cauchy στο 0 παίρνουμε

$$g(0) - g_T(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{g(z) - g_T(z)}{z} dz. \quad (14)$$

Παρατηρούμε τώρα ότι:

- Η $(g - g_T)(z)e^{zT}$ είναι ολόμορφη στο D και στο $z = 0$ έχει την ίδια τιμή με $g - g_T$.
- Η $(g - g_T)(z)e^{zT} \cdot \frac{z}{R^2}$ είναι επίσης ολόμορφη στο D , άρα το ολοκλήρωμά της πάνω στο C είναι 0.

Συνεπώς, προσθέτοντας το μηδέν στο (14), παίρνουμε την ισοδυναμία

$$g(0) - g_T(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C (g(z) - g_T(z)) e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{dz}{z}. \quad (15)$$

5) Διάσπαση $C = C_+ \cup C_-$. Θέτουμε

$$C_+ := C \cap \{\operatorname{Re}(z) \geq 0\}, \quad C_- := C \cap \{\operatorname{Re}(z) \leq 0\}.$$

(Τα σημεία με $\operatorname{Re}(z) = 0$ είναι πεπερασμένα και δεν παίζουν ρόλο.)

6) Εκτίμηση στο C_+ . Για $z \in C_+$ ισχύει $|z| = R$ και $\operatorname{Re}(z) > 0$, οπότε

$$g(z) - g_T(z) = \int_T^\infty f(t) e^{-zt} dt, \quad \Rightarrow \quad |g(z) - g_T(z)| \leq M \int_T^\infty e^{-(\operatorname{Re} z)t} dt = \frac{M e^{-(\operatorname{Re} z)T}}{\operatorname{Re} z}.$$

Επιπλέον, για $|z| = R$ έχουμε

$$\left| \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{1}{z} \right| = \frac{|1 + e^{2i\theta}|}{R} = \frac{2|\cos \theta|}{R} = \frac{2|\operatorname{Re}(z)|}{R^2},$$

όπου $z = R e^{i\theta}$. Άρα, στο C_+ ,

$$\left| (g - g_T)(z) e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{1}{z} \right| \leq \frac{M e^{-(\operatorname{Re} z)T}}{\operatorname{Re} z} \cdot e^{(\operatorname{Re} z)T} \cdot \frac{2|\operatorname{Re}(z)|}{R^2} = \frac{2M}{R^2}.$$

Επομένως

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_+} (g - g_T)(z) e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{dz}{z} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2M}{R^2} \cdot \operatorname{length}(C_+) \leq \frac{M}{R}, \quad (16)$$

αφού $\operatorname{length}(C_+) \leq \pi R$.

7) Εκτίμηση στο C_- : διάσπαση σε g και g_T . Από (15),

$$\int_{C_-} (g - g_T)(\cdot) = \int_{C_-} g(\cdot) - \int_{C_-} g_T(\cdot).$$

(i) Ο όρος με g_T . Η συνάρτηση

$$z \mapsto g_T(z) e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{1}{z}$$

είναι ολόμορφη σε περιοχή που περιέχει τον «αριστερό θύλακα» που περικλείεται ανάμεσα στο C_- και στο αριστερό ημικύκλιο

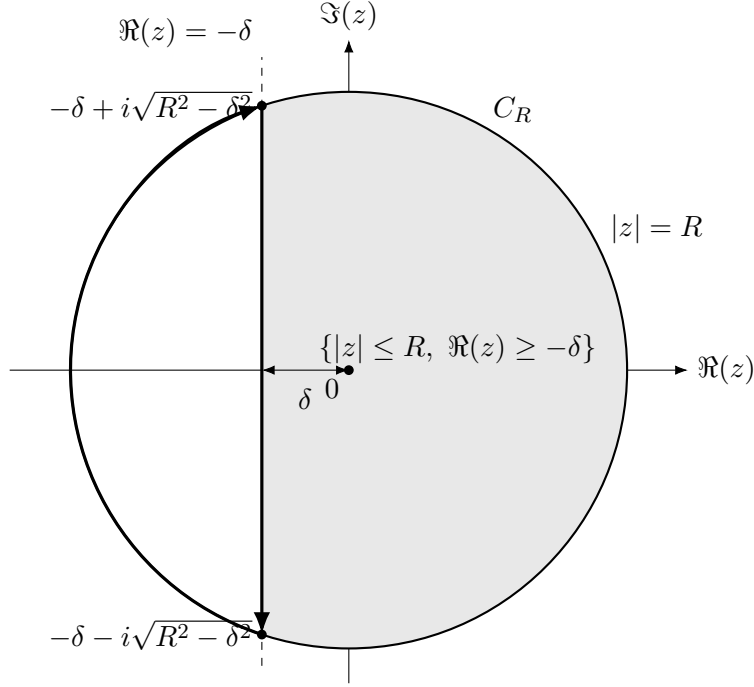
$$C'_- := \{|z| = R, \operatorname{Re}(z) < 0\}$$

(εφόσον ο θύλακας αυτός δεν περιέχει το 0). Άρα, με παραμόρφωση καμπύλης (θεώρημα Cauchy),

$$\int_{C_-} g_T(z) e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{dz}{z} = \int_{C'_-} g_T(z) e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{dz}{z}.$$

Για $z \in C'_-$ έχουμε $\operatorname{Re}(z) < 0$ και

$$|g_T(z)| \leq \int_0^T |f(t)| e^{-(\operatorname{Re} z)t} dt \leq M \int_0^T e^{-(\operatorname{Re} z)t} dt \leq M \frac{e^{-(\operatorname{Re} z)T}}{|\operatorname{Re} z|}.$$



Σχήμα 1: Το χωρίο $\{|z| \leq R, \Re(z) \geq -\delta\}$ (σκιασμένο) και το περίγραμμα C_R : η χορδή $\Re(z) = -\delta$ (κάθοδος) και το τόξο $|z| = R$ στο $\Re(z) \geq -\delta$ (άνοδος).

Άρα, όπως πριν (και πάλι $|z| = R$),

$$\left| g_T(z) e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{1}{z} \right| \leq \frac{M e^{-(\Re z)T}}{|\Re z|} \cdot e^{(\Re z)T} \cdot \frac{2|\Re z|}{R^2} = \frac{2M}{R^2}.$$

Έτσι παίρνουμε, ακριβώς όπως στο (16),

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_-} g_T(z) e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{dz}{z} \right| \leq \frac{M}{R}. \quad (17)$$

(ii) Ο όρος με g . Θέτουμε

$$H(z) := g(z) \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{1}{z}.$$

Επειδή το C_- είναι συμπαγές, το $0 \notin C_-$ και η g είναι ολόμορφη (άρα συνεχής) σε γειτονιά του C_- , η H είναι συνεχής στο C_- και συνεπώς ομοιόμορφα φραγμένη εκεί:

$$B := \sup_{z \in C_-} |H(z)| < \infty.$$

Για κάθε $z \in C_-$ έχουμε $\Re(z) < 0$, άρα $e^{zT} \rightarrow 0$ καθώς $T \rightarrow \infty$ και επίσης

$$|e^{zT}| = e^{(\Re z)T} \leq 1 \quad (T > 0).$$

Επομένως

$$|H(z)e^{zT}| \leq B \quad (z \in C_-, T > 0),$$

και επειδή $H(z)e^{zT} \rightarrow 0$ σημειακά στο C_- , από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης (με μέτρο μήκους πάνω στο C_-) παίρνουμε

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{C_-} H(z) e^{zT} dz = 0,$$

δηλαδή

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_-} g(z) e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{dz}{z} = 0. \quad (18)$$

8) Συμπέρασμα. Από (15) και τις (16), (17), (18) παίρνουμε: για κάθε σταθερό $R > 0$,

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} |g(0) - g_T(0)| \leq \frac{2M}{R}.$$

Δεδομένου $\varepsilon > 0$, επιλέγουμε R τόσο μεγάλο ώστε $2M/R \leq \varepsilon/2$. Έπειτα, από (18) παίρνουμε T_0 τέτοιο ώστε για $T \geq T_0$ να ισχύει

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_-} g(z) e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{dz}{z} \right| \leq \varepsilon/2.$$

Τότε, για κάθε $T \geq T_0$, από (15) προκύπτει $|g(0) - g_T(0)| \leq \varepsilon$. Άρα $g_T(0) \rightarrow g(0)$.

Τέλος, επειδή $g_T(0) = \int_0^T f(x) dx$, συμπεραίνουμε ότι $\int_0^\infty f(x) dx$ συγκλίνει και ισούται με $g(0)$. \square

Παρατήρηση 3.2 (Γιατί εισάγουμε το βάρος $e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)$). Το βάρος έχει διπλό ρόλο. Πρώτον, για $\operatorname{Re}(z) > 0$ έχουμε

$$(g - g_T)(z) = \int_T^\infty f(x) e^{-zx} dx, \quad \Rightarrow \quad (g - g_T)(z) e^{zT} = \int_0^\infty f(T+u) e^{-zu} du,$$

οπότε $|(g - g_T)(z) e^{zT}| \leq M/\operatorname{Re}(z)$ (ομοιόμορφα ως προς T) και για $\operatorname{Re}(z) < 0$ το e^{zT} δίνει εκθετική απόσβεση καθώς $T \rightarrow \infty$. Δεύτερον, στον κύκλο $|z| = R$ ισχύει

$$\left| \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{1}{z} \right| = \frac{2|\operatorname{Re}(z)|}{R^2},$$

οπότε ο παράγοντας $|\operatorname{Re}(z)|$ ακυρώνει το $1/\operatorname{Re}(z)$ που προκύπτει από την προηγούμενη εκτίμηση και το ολοκληρωτέο γίνεται τάξης $O(1/R^2)$ πάνω στο τόξο, άρα το ολοκλήρωμα πάνω σε τόξο μήκους $O(R)$ είναι $O(1/R)$. Τέλος, επειδή $e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) = 1 + O(z)$ όταν $z \rightarrow 0$, το υπόλοιπο στο $z = 0$ δεν αλλάζει, οπότε η εισαγωγή του βάρους επιτρέπεται (θεώρημα Cauchy/υπολοίπων).

Παρατήρηση 3.3 (Γιατί παραμορφώνουμε από C_- σε C'_-). Θέλουμε να εκτιμήσουμε

$$\int_{C_-} g_T(z) e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{dz}{z}.$$

Το περίγραμμα C_- περιέχει τμήμα πάνω στη χορδή $\operatorname{Re}(z) = -\delta$. Εκεί μπορεί να ισχύει

$$|g_T(z)| = \left| \int_0^T f(t) e^{-zt} dt \right| \leq M \int_0^T e^{\delta t} dt \asymp \frac{e^{\delta T}}{\delta},$$

οπότε ο παράγοντας e^{zT} απλώς ακυρώνει το $e^{\delta T}$ και μένει μέγεθος τάξης $1/\delta$, δηλαδή δεν παίρνουμε φθορά όταν $T \rightarrow \infty$.

Αντίθετα, στο αριστερό ημικύκλιο

$$C'_- := \{|z| = R, \operatorname{Re}(z) < 0\}$$

έχουμε για $\operatorname{Re}(z) < 0$ την εκτίμηση

$$|g_T(z) e^{zT}| \leq \frac{M}{|\operatorname{Re}(z)|},$$

ενώ πάνω στον κύκλο $|z| = R$ ισχύει

$$\left| \left(1 + \frac{z^2}{R^2} \right) \frac{1}{z} \right| = \frac{2|\operatorname{Re}(z)|}{R^2}.$$

Άρα το $1/|\operatorname{Re}(z)|$ ακυρώνεται και το ολοκληρωτέο φράσσεται ομοιόμορφα από $O(1/R^2)$, πράγμα που δίνει

$$\int_{C'_-} g_T(z) e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2} \right) \frac{dz}{z} = O(1/R).$$

Η αντικατάσταση του C_- από το C'_- επιτρέπεται (παραμόρφωση καμπύλης / θεώρημα Cauchy), διότι η συνάρτηση $z \mapsto g_T(z) e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2} \right) \frac{1}{z}$ είναι ολόμορφη στην περιοχή ανάμεσα στις C_- και C'_- (ο «αριστερός θύλακας»), η οποία δεν περιέχει το $z = 0$.

Πόρισμα 3.4 (Tauberian). Έστω $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ φραγμένη και ολοκληρώσιμη σε κάθε $[1, T]$. Για $\Re(s) > 0$ θέτουμε

$$g(s) = \int_1^\infty f(x) x^{-s} \frac{dx}{x}.$$

Αν υπάρχει ανοικτό $U \subset \mathbb{C}$ με $\{\Re(s) \geq 0\} \subset U$ τέτοιο ώστε το g να έχει ολόμορφη επέκταση στο U , τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^\infty f(x) \frac{dx}{x}$ συγκλίνει και ισούται με $g(0)$.

Απόδειξη. Θέτουμε $F(t) = f(e^t)$ για $t \geq 0$. Τότε

$$g(s) = \int_0^\infty F(t) e^{-st} dt$$

(αλλαγή μεταβλητής $x = e^t$). Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 9.3 στο F και παίρνουμε ότι $\int_0^\infty F(t) dt$ υπάρχει και ισούται με $g(0)$. Με την αντίστροφη αλλαγή μεταβλητής,

$$\int_0^\infty F(t) dt = \int_1^\infty f(x) \frac{dx}{x}.$$

□

3.1 Ένα βοηθητικό λήμμα: σύγκλιση $\int (A(x) - x)/x^2 \Rightarrow A(x) \sim x$

Λήμμα 3.5. Έστω $A : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ αύξουσα. Αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_1^\infty \frac{A(t) - t}{t^2} dt$$

συγκλίνει, τότε $A(x) \sim x$ όταν $x \rightarrow \infty$, δηλαδή $\frac{A(x)}{x} \rightarrow 1$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε προς άτοπο ότι $\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{A(x)}{x} > \lambda > 1$. Τότε υπάρχουν άπειρα x με $A(x) \geq \lambda x$. Για ένα τέτοιο x και για κάθε $t \in [x, \lambda x]$, από την αύξηση παίρνουμε $A(t) \geq A(x) \geq \lambda x$, άρα

$$\int_x^{\lambda x} \frac{A(t) - t}{t^2} dt \geq \int_x^{\lambda x} \frac{\lambda x - t}{t^2} dt.$$

Με αλλαγή $t = ux$ (δηλαδή $dt = x du$) έχουμε

$$\int_x^{\lambda x} \frac{\lambda x - t}{t^2} dt = \int_1^\lambda \frac{\lambda - u}{u^2} du =: c(\lambda) > 0,$$

σταθερά που εξαρτάται μόνο από λ . Άρα, για άπειρα x ισχύει

$$\left| \int_x^\infty \frac{A(t) - t}{t^2} dt - \int_{\lambda x}^\infty \frac{A(t) - t}{t^2} dt \right| = \left| \int_x^{\lambda x} \frac{A(t) - t}{t^2} dt \right| \geq c(\lambda) > 0.$$

Όμως τα δύο αριστερά ολοκληρώματα είναι ουρές ενός συγκλίνοντος ολοκληρώματος, άρα καθώς $x \rightarrow \infty$ και τα δύο τείνουν στο 0 και η διαφορά τους πρέπει να τείνει στο 0, άτοπο. Άρα $\limsup_{x \rightarrow \infty} A(x)/x \leq 1$.

Ομοίως, αν $\liminf_{x \rightarrow \infty} A(x)/x < \mu < 1$, τότε για άπειρα x έχουμε $A(x) \leq \mu x$ και για $t \in [\mu x, x]$ παίρνουμε $A(t) \leq A(x) \leq \mu x$, άρα

$$\int_{\mu x}^x \frac{A(t) - t}{t^2} dt \leq \int_{\mu x}^x \frac{\mu x - t}{t^2} dt = - \int_{\mu}^1 \frac{u - \mu}{u^2} du =: -c'(\mu) < 0,$$

και ξανά παίρνουμε αντίφαση με τη σύγκλιση των ουρών. Άρα $\liminf_{x \rightarrow \infty} A(x)/x \geq 1$. Συνεπώς $\frac{A(x)}{x} \rightarrow 1$. \square

Θεώρημα 3.6. Έστω $a_n \geq 0$ και

$$A(x) := \sum_{n \leq x} a_n.$$

Υποθέτουμε ότι $A(x) = O(x)$. Θέτουμε τη Dirichlet σειρά

$$F(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \quad \Re(s) > 1.$$

Υποθέτουμε ότι η $F(s)$ έχει αναλυτική συνέχεια στο $\Re(s) \geq 1$ εκτός από έναν απλό πόλο στο $s = 1$ με υπόλοιπο 1. Τότε

$$A(x) \sim x \quad (x \rightarrow \infty).$$

Απόδειξη. Βήμα 1: Μερική άθροιση Για $\Re(s) > 1$ ισχύει η ταυτότητα:

$$\sum_{n \leq X} \frac{a_n}{n^s} = \frac{A(X)}{X^s} + s \int_1^X \frac{A(x)}{x^{s+1}} dx.$$

Επειδή $A(X) = O(X)$ και $\Re(s) > 1$, έχουμε $A(X)X^{-s} \rightarrow 0$ καθώς $X \rightarrow \infty$. Άρα, περνώντας στο όριο $X \rightarrow \infty$,

$$F(s) = s \int_1^{\infty} \frac{A(x)}{x^{s+1}} dx \quad (\Re(s) > 1). \quad (19)$$

Βήμα 2: Αφαίρεση του πόλου στο $s = 1$ και αναλυτική συνέχεια στο $\Re(z) \geq 0$. Θέτουμε $s = 1 + z$ (οπότε $\Re(z) > 0$) και ορίζουμε

$$H(z) := \frac{F(1+z)}{1+z} - \frac{1}{z}.$$

Η υπόθεση “ F έχει απλό πόλο στο $s = 1$ με υπόλοιπο 1” ισοδυναμεί με το ότι $F(1+z) = \frac{1}{z} +$ (ολόμορφος όρος) κοντά στο $z = 0$. Άρα ο $H(z)$ είναι ολόμορφος σε γειτονιά του $z = 0$ και επιπλέον έχει αναλυτική συνέχεια στο $\Re(z) \geq 0$.

Βήμα 3: Αναπαράσταση του H . Από (19) με $s = 1 + z$ παίρνουμε, για $\Re(z) > 0$,

$$\frac{F(1+z)}{1+z} = \int_1^{\infty} \frac{A(x)}{x^{2+z}} dx = \int_1^{\infty} \frac{A(x)}{x} x^{-z} \frac{dx}{x}.$$

Επίσης για $\Re(z) > 0$ ισχύει

$$\frac{1}{z} = \int_1^{\infty} x^{-z} \frac{dx}{x}.$$

Άρα, για $\Re(z) > 0$,

$$H(z) = \int_1^{\infty} \left(\frac{A(x)}{x} - 1 \right) x^{-z} \frac{dx}{x}. \quad (20)$$

Βήμα 4: Εφαρμογή του Θεωρήματος. Θέτουμε

$$f(x) := \frac{A(x)}{x} - 1.$$

Από $A(x) = O(x)$ έχουμε ότι f είναι φραγμένη στο $[1, \infty)$, και είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε $[1, X]$. Η σχέση (20) λέει ότι για $\Re(z) > 0$ η Mellin μετασχηματισμένη της f είναι $H(z)$, η οποία (από το Βήμα 2) έχει αναλυτική συνέχεια στο $\Re(z) \geq 0$. Άρα, από το Θεώρημα 9.3, το ολοκλήρωμα

$$\int_1^\infty \left(\frac{A(x)}{x} - 1 \right) \frac{dx}{x} = \int_1^\infty \frac{A(x) - x}{x^2} dx$$

συγκλίνει.

Βήμα 5: Συμπέρασμα $A(x) \sim x$. Η $A(x)$ είναι αύξουσα (επειδή $a_n \geq 0$). Επομένως, από το Λήμμα 3.5 συμπεραίνουμε $\frac{A(x)}{x} \rightarrow 1$, δηλαδή $A(x) \sim x$. \square

Μένει να αποδείξουμε ότι τα παραπάνω μπορούμε να τα εφαρμόσουμε για την συνάρτηση ψ .

Θεώρημα 3.7 (Εκτίμηση Chebyshev). Ορίζουμε τη συνάρτηση von Mangoldt

$$\Lambda(n) := \begin{cases} \log p, & \text{αν } n = p^k \text{ για κάποιο πρώτο } p \text{ και } k \geq 1, \\ 0, & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

και τη συνάρτηση Chebyshev

$$\psi(x) := \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \quad (x \geq 1).$$

Τότε ισχύει

$$\psi(x) \asymp x \quad \text{ομοίμορφα για } x \geq 2,$$

δηλαδή υπάρχουν σταθερές $c_1, c_2 > 0$ ώστε $c_1 x \leq \psi(x) \leq c_2 x$ για κάθε $x \geq 2$.

Απόδειξη. 1) Ένα λήμμα για εναλλασσόμενες σειρές. Αν $(a_n)_{n \geq 1}$ είναι ακολουθία μη αρνητικών πραγματικών που φθίνει προς το 0, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1} a_n$ συγκλίνει και ισχύει

$$a_1 - a_2 \leq \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1} a_n \leq a_1 - a_2 + a_3. \quad (21)$$

Πράγματι, τα μερικά αθροίσματα γράφονται ως

$$(a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots \geq a_1 - a_2,$$

ενώ

$$(a_1 - a_2 + a_3) - (a_4 - a_5) - \dots \leq a_1 - a_2 + a_3,$$

επειδή $a_{2j-1} - a_{2j} \geq 0$ και $a_{2j} - a_{2j+1} \geq 0$.

2) Ορισμός της $T(x)$ και ταύτιση με $\sum_{n \leq x} \log n$. Για $x \geq 1$ θέτουμε

$$T(x) := \sum_{n \leq x} \psi\left(\frac{x}{n}\right).$$

Θα δείξουμε ότι

$$T(x) = \sum_{n \leq x} \log n. \quad (22)$$

Χρησιμοποιούμε την κλασική ταυτότητα

$$\sum_{d|n} \Lambda(d) = \log n, \quad (23)$$

η οποία προκύπτει από την παραγοντοποίηση $n = \prod p^{\alpha_p}$: το άθροισμα στα $d|n$ με $\Lambda(d) \neq 0$ δίνει $\sum_p \alpha_p \log p = \log n$. Άρα

$$\sum_{n \leq x} \log n = \sum_{n \leq x} \sum_{d|n} \Lambda(d) = \sum_{d \leq x} \Lambda(d) \sum_{\substack{n \leq x \\ d|n}} 1 = \sum_{d \leq x} \Lambda(d) \sum_{k \leq x/d} 1.$$

Αλλά

$$\sum_{d \leq x} \Lambda(d) \sum_{k \leq x/d} 1 = \sum_{k \leq x} \sum_{d \leq x/k} \Lambda(d) = \sum_{k \leq x} \psi\left(\frac{x}{k}\right) = T(x),$$

οπότε ισχύει (22).

3) Ασύμπτωτη για $\sum_{n \leq x} \log n$ και συνέπεια για $T(x)$. Για $x \geq 2$ έχουμε (σύγκριση αθροίσματος με ολοκλήρωμα)

$$\int_1^x \log t dt \leq \sum_{n \leq x} \log n \leq \int_1^x \log t dt + \log x,$$

άρα

$$\sum_{n \leq x} \log n = x \log x - x + \mathcal{O}(\log x) \quad (x \geq 2). \quad (24)$$

Με (22) συμπεραίνουμε

$$T(x) = x \log x - x + \mathcal{O}(\log x) \quad (x \geq 2). \quad (25)$$

Επομένως

$$T(x) - 2T\left(\frac{x}{2}\right) = (\log 2)x + \mathcal{O}(\log x) \quad (x \geq 2). \quad (26)$$

(Πράγματι, αντικαθιστώντας την (25) στα δύο μέλη και απλοποιώντας, παίρνουμε τον κύριο όρο $(\log 2)x$, ενώ τα σφάλματα παραμένουν $\mathcal{O}(\log x)$.)

4) Εναλλασσόμενο άθροισμα για $T(x) - 2T(x/2)$. Από τον ορισμό,

$$T(x) - 2T\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{n \leq x} \psi\left(\frac{x}{n}\right) - 2 \sum_{n \leq x/2} \psi\left(\frac{x}{2n}\right).$$

Επειδή $\psi(y) = 0$ για $0 < y < 1$ (το άθροισμα είναι κενό), έχουμε $\psi(x/(2n)) = 0$ όταν $x/2 < n \leq x$, οπότε

$$\sum_{n \leq x/2} \psi\left(\frac{x}{2n}\right) = \sum_{n \leq x} \psi\left(\frac{x}{2n}\right).$$

Άρα

$$T(x) - 2T\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{n \leq x} \psi\left(\frac{x}{n}\right) - 2 \sum_{n \leq x} \psi\left(\frac{x}{2n}\right). \quad (27)$$

Με αλλαγή δείκτη $m = 2n$ έχουμε

$$2 \sum_{n \leq x} \psi\left(\frac{x}{2n}\right) = 2 \sum_{\substack{m \leq x \\ 2|m}} \psi\left(\frac{x}{m}\right),$$

και έτσι το δεξί μέλος του (27) γράφεται ως

$$\sum_{\substack{m \leq x \\ m \text{ περιττός}}} \psi\left(\frac{x}{m}\right) - \sum_{\substack{m \leq x \\ m \text{ άρτιος}}} \psi\left(\frac{x}{m}\right) = \sum_{n \leq x} (-1)^{n-1} \psi\left(\frac{x}{n}\right).$$

Επιπλέον, αν $n > x$ τότε $x/n < 1$ και $\psi(x/n) = 0$, άρα

$$T(x) - 2T\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \psi\left(\frac{x}{n}\right). \quad (28)$$

5) Εφαρμογή του (21). Για σταθερό $x \geq 2$ θέτουμε $a_n := \psi(x/n)$. Επειδή η ψ είναι μη φθίνουσα ως συνάρτηση του ορίσματος και x/n φθίνει με το n , η ακολουθία (a_n) είναι μη αύξουσα. Επίσης $a_n = 0$ για $n > x$, άρα $a_n \rightarrow 0$. Επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε το (21) στη σειρά (28) και παίρνουμε

$$\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \psi\left(\frac{x}{n}\right) \leq \psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) + \psi\left(\frac{x}{3}\right). \quad (29)$$

Συνδυάζοντας (26) και (28)–(29) παίρνουμε, για κάθε $x \geq 2$,

$$\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) \leq (\log 2)x + \mathcal{O}(\log x), \quad (30)$$

$$\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) + \psi\left(\frac{x}{3}\right) \geq (\log 2)x + \mathcal{O}(\log x). \quad (31)$$

6) Άνω φράγμα $\psi(x) \ll x$. Θέτουμε r τον μέγιστο ακέραιο με $2^r < x$ (οπότε $x/2^{r+1} < 1$ και $\psi(x/2^{r+1}) = 0$). Γράφουμε τηλεσκοπικά

$$\psi(x) = \sum_{j=0}^r \left(\psi\left(\frac{x}{2^j}\right) - \psi\left(\frac{x}{2^{j+1}}\right) \right).$$

Εφαρμόζοντας την (30) στο $x/2^j$, παίρνουμε

$$\psi\left(\frac{x}{2^j}\right) - \psi\left(\frac{x}{2^{j+1}}\right) \leq (\log 2) \frac{x}{2^j} + \mathcal{O}(\log(x/2^j)).$$

Αθροίζοντας για $j = 0, \dots, r$,

$$\psi(x) \leq (\log 2)x \sum_{j=0}^r \frac{1}{2^j} + \mathcal{O}\left(\sum_{j=0}^r \log(x/2^j)\right).$$

Έχουμε $\sum_{j=0}^r 2^{-j} \leq 2$ και

$$\sum_{j=0}^r \log(x/2^j) = (r+1) \log x - (\log 2) \sum_{j=0}^r j = \mathcal{O}((\log x)^2),$$

άρα

$$\psi(x) \leq 2(\log 2)x + \mathcal{O}((\log x)^2) \ll x \quad (x \geq 2). \quad (32)$$

7) Κάτω φράγμα $\psi(x) \gg x$. Από (31) και (32) (εφαρμοσμένη στο $x/3$) παίρνουμε

$$\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) \geq (\log 2)x - \psi\left(\frac{x}{3}\right) + \mathcal{O}(\log x) \geq (\log 2)x - \frac{2(\log 2)}{3}x + \mathcal{O}((\log x)^2),$$

δηλαδή

$$\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) \geq \frac{\log 2}{3}x + \mathcal{O}((\log x)^2). \quad (33)$$

Άρα υπάρχει $x_0 \geq 2$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \geq x_0$ να ισχύει

$$\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) \geq \frac{\log 2}{6}x. \quad (34)$$

Τότε, για $x \geq x_0$, τηλεσκοπώντας όπως πριν και εφαρμόζοντας (34) στα $x/2^j$ όσο $x/2^j \geq x_0$, παίρνουμε

$$\psi(x) \geq \sum_{0 \leq j \leq J} \left(\psi\left(\frac{x}{2^j}\right) - \psi\left(\frac{x}{2^{j+1}}\right) \right) \geq \frac{\log 2}{6} \sum_{0 \leq j \leq J} \frac{x}{2^j} \geq \frac{\log 2}{6}x,$$

όπου J είναι ο μέγιστος ακέραιος με $x/2^J \geq x_0$ (οπότε $\sum_{j=0}^J 2^{-j} \geq 1$). Τέλος, αν θέσουμε

$$c_1 := \min \left\{ \frac{\log 2}{6}, \min_{2 \leq x \leq x_0} \frac{\psi(x)}{x} \right\} > 0,$$

τότε $c_1 x \leq \psi(x)$ για όλα τα $x \geq 2$.

Από (32) παίρνουμε επίσης $\psi(x) \leq c_2 x$ για κάποιον $c_2 > 0$ και για όλα τα $x \geq 2$. Άρα $\psi(x) \asymp x$ ομοιόμορφα για $x \geq 2$. \square

Παρατήρηση 3.8 (Γιατί η ψ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος 3.6). Θέτουμε $a_n := \Lambda(n) \geq 0$ και

$$A(x) = \sum_{n \leq x} a_n = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = \psi(x).$$

Από την εκτίμηση Chebyshev που αποδείξαμε προηγουμένως έχουμε $\psi(x) \ll x$, άρα $A(x) = O(x)$.

Η αντίστοιχη Dirichlet σειρά είναι

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

Για $\Re(s) > 1$ γνωρίζουμε ότι

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s},$$

δηλαδή $F(s) = -\zeta'(s)/\zeta(s)$ στο ημιεπίπεδο $\Re(s) > 1$.

Από τη σχέση που αποδείχθηκε για τη ζ (αναλυτική συνέχιση της ζ στο $\Re(s) > 0$ με απλό πόλο στο $s = 1$ και υπόλοιπο 1), συμπεραίνουμε ότι:

- Η $\zeta(s)$ είναι ολόμορφη στο $\Re(s) \geq 1$ εκτός από απλό πόλο στο $s = 1$.
- Στο $\Re(s) \geq 1$ δεν υπάρχουν μηδενικά της ζ (η $\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} n^{-s}$ έχει θετική πραγματική τιμή για $s > 1$, και η αναλυτική της συνέχεια στο $\Re(s) \geq 1$ δεν μπορεί να αποκτήσει μηδενικό πάνω στη γραμμή $\Re(s) = 1$ χωρίς να παραβιάζεται η γνωστή μορφή του πόλου στο 1).

Συνεπώς, η συνάρτηση $F(s) = -\zeta'(s)/\zeta(s)$ έχει αναλυτική συνέχεια στο $\Re(s) \geq 1$ εκτός από ενδεχόμενες ιδιομορφίες στα σημεία όπου $\zeta(s) = 0$ και στο $s = 1$. Στο $\Re(s) \geq 1$ όμως δεν έχουμε μηδενικά, άρα η μόνη ιδιομορφία προέρχεται από το $s = 1$.

Τέλος, επειδή κοντά στο $s = 1$ έχουμε

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + h(s) \quad \text{με } h \text{ ολόμορφη κοντά στο } 1,$$

παίρνουμε

$$\zeta'(s) = -\frac{1}{(s-1)^2} + h'(s), \quad -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{1}{s-1} + (\text{ολόμορφος όρος κοντά στο } 1).$$

Άρα η $F(s) = -\zeta'(s)/\zeta(s)$ έχει απλό πόλο στο $s = 1$ με υπόλοιπο 1.

Με άλλα λόγια, για την ακολουθία $a_n = \Lambda(n)$ ισχύουν όλες οι υποθέσεις του Θεωρήματος 3.6.

Παράρτημα

4 Βασικά για μιγαδικούς αριθμούς και σύνολα στο \mathbb{C}

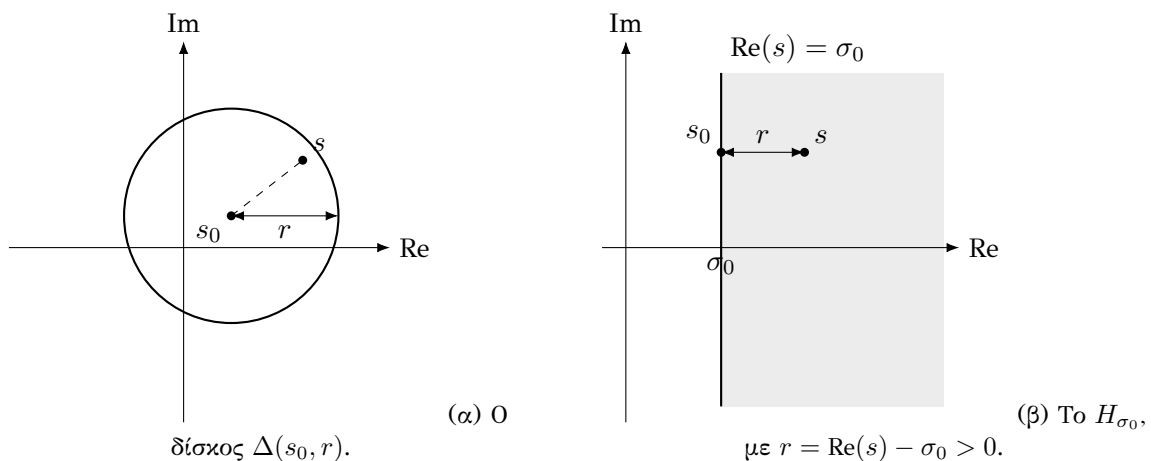
Ορισμός 4.1. Κάθε $s \in \mathbb{C}$ γράφεται μοναδικά ως $s = \sigma + it$, όπου $\sigma = \operatorname{Re}(s) \in \mathbb{R}$ και $t = \operatorname{Im}(s) \in \mathbb{R}$. Το μέτρο του s είναι $|s| = \sqrt{\sigma^2 + t^2}$.

Ορισμός 4.2 (Δίσκοι και ημιεπίπεδα). Για $s_0 \in \mathbb{C}$ και $r > 0$ θέτουμε

$$\Delta(s_0, r) = \{s \in \mathbb{C} : |s - s_0| < r\}.$$

Για $\sigma_0 \in \mathbb{R}$ θέτουμε

$$H_{\sigma_0} = \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > \sigma_0\}.$$



Σχήμα 2: Δίσκος και δεξί ημιεπίπεδο.

Πρόταση 4.3 (Ανισότητες για το μέτρο). Για $z, w \in \mathbb{C}$ ισχύουν:

$$|z + w| \leq |z| + |w|, \quad |zw| = |z||w|, \quad |z/w| = |z|/|w| \quad (w \neq 0).$$

4.1 Σύγκλιση στο \mathbb{C}

Ορισμός 4.4 (Σύγκλιση ακολουθίας στο \mathbb{C}). Λέμε ότι μια ακολουθία $(z_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{C}$ συγκλίνει στο $z \in \mathbb{C}$ (και γράφουμε $z_n \rightarrow z$) αν

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \text{ ώστε } \forall n \geq N, \quad |z_n - z| < \varepsilon.$$

Πρόταση 4.5 (Κανόνες ορίων). Αν $z_n \rightarrow z$ και $w_n \rightarrow w$ στο \mathbb{C} , τότε:

$$z_n + w_n \rightarrow z + w, \quad z_n w_n \rightarrow zw, \quad |z_n| \rightarrow |z|.$$

Αν επιπλέον $w \neq 0$ και $w_n \neq 0$ για n μεγάλα, τότε

$$\frac{z_n}{w_n} \rightarrow \frac{z}{w}.$$

4.2 Σειρές μιγαδικών αριθμών

Ορισμός 4.6 (Σειρά και μερικά αθροίσματα). Για $(z_n)_{n \geq 0} \subset \mathbb{C}$ θέτουμε $S_N = \sum_{n=0}^N z_n$. Λέμε ότι $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ συγκλίνει αν η ακολουθία (S_N) συγκλίνει σε κάποιο $S \in \mathbb{C}$.

Πρόταση 4.7 (Κριτήριο Cauchy). Η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \text{ ώστε } \forall m > n \geq N, \quad \left| \sum_{k=n+1}^m z_k \right| < \varepsilon.$$

Ορισμός 4.8 (Απόλυτη σύγκλιση). Λέμε ότι $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ συγκλίνει απολύτως αν $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n| < \infty$.

Θεώρημα 4.9 (Απόλυτη σύγκλιση \Rightarrow σύγκλιση). Αν $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n| < \infty$, τότε η $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ συγκλίνει και

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} z_n \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |z_n|.$$

4.3 Ομοιόμορφη σύγκλιση

Ορισμός 4.10 (Ομοιόμορφη σύγκλιση). Έστω $A \subseteq \mathbb{C}$ και $f_n, f : A \rightarrow \mathbb{C}$. Λέμε ότι $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο A αν

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \text{ ώστε } \forall n \geq N \forall s \in A, \quad |f_n(s) - f(s)| < \varepsilon.$$

Παρατήρηση 4.11. Η ομοιόμορφη σύγκλιση $f_n \rightarrow f$ στο A ισοδυναμεί με

$$\sup_{s \in A} |f_n(s) - f(s)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Θεώρημα 4.12 (Κριτήριο M του Weierstrass). Έστω $f_n : A \rightarrow \mathbb{C}$ και $M_n \geq 0$ ώστε $|f_n(s)| \leq M_n$ για κάθε $s \in A$. Αν $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$, τότε $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο A .

5 Η εκθετική και μιγαδικές δυνάμεις

Ορισμός 5.1 (Εκθετική). Η $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ορίζεται από

$$e^z = \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Παρατήρηση 5.2 (Σύγκλιση της εκθετικής). Για $z_n = \frac{z^n}{n!}$ ισχύει $\left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = \frac{|z|}{n+1} \rightarrow 0$, άρα η σειρά της εκθετικής συγκλίνει απολύτως για κάθε $z \in \mathbb{C}$.

Πρόταση 5.3 (Βασικές ιδιότητες). Για $z, w \in \mathbb{C}$ ισχύουν $e^{z+w} = e^z e^w$, $e^0 = 1$, και

$$|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}.$$

Επίσης $e^{it} = \cos t + i \sin t$ για $t \in \mathbb{R}$.

Ορισμός 5.4 (Μιγαδική δύναμη y^s για $y > 0$). Για $y > 0$ και $s \in \mathbb{C}$ θέτουμε

$$y^s := e^{s \ln y},$$

όπου $\ln y$ είναι ο πραγματικός λογάριθμος του θετικού y .

6 Ολόμορφες συναρτήσεις και αναλυτική συνέχιση

6.1 Τοπολογικές Έννοιες

Ορισμός 6.1 (Ανοιχτό/κλειστό). $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ είναι ανοιχτό αν για κάθε $z \in \Omega$ υπάρχει $r > 0$ με $\Delta(z, r) \subset \Omega$. F είναι κλειστό αν $\mathbb{C} \setminus F$ είναι ανοιχτό.

Ορισμός 6.2 (Συμπαγές). Ένα $K \subseteq \mathbb{C}$ λέγεται συμπαγές αν είναι κλειστό και φραγμένο.

Ορισμός 6.3 (Συνεκτικό). Ω λέγεται συνεκτικό αν δεν γράφεται ως ένωση δύο ξένων, μη κενών, ανοικτών (στη σχετική τοπολογία) συνόλων.

Ορισμός 6.4 (Ολόμορφη). Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοιχτό. Μία $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ λέγεται ολόμορφη αν για κάθε $s \in \Omega$ υπάρχει

$$f'(s) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(s+h) - f(s)}{h}.$$

Πρόταση 6.5 (Αλγεβρικές πράξεις). Αν f, g είναι ολόμορφες στο Ω , τότε $f + g$ και fg είναι ολόμορφες. Αν επιπλέον $g(s) \neq 0$ σε Ω , τότε και f/g είναι ολόμορφη.

Θεώρημα 6.6 (Weierstrass: όριο ολόμορφων). Έστω Ω ανοιχτό και $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφες. Αν $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές $K \subseteq \Omega$, τότε f είναι ολόμορφη στο Ω .

Θεώρημα 6.7 (Θεώρημα Weierstrass: όριο ολόμορφων και σύγκλιση παραγώγων). Έστω $\Omega \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό και $(f_n)_{n \geq 1}$ ακολουθία ολόμορφων συναρτήσεων $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Υποθέτουμε ότι:

1. $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές $K \subset \Omega$,
2. $f'_n \rightarrow g$ ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές $K \subset \Omega$.

Τότε η f είναι ολόμορφη στο Ω , ισχύει $f' = g$ στο Ω , και μάλιστα για κάθε $k \geq 1$ έχουμε $f_n^{(k)} \rightarrow f^{(k)}$ ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές.

Θεώρημα 6.8. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοιχτό και $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία αναλυτικών συναρτήσεων στο Ω . Υποθέτουμε ότι υπάρχει $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ τέτοια ώστε $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο K του Ω . Τότε, η f είναι αναλυτική στο Ω και ισχύει ότι $f'_n \rightarrow f'$ ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο K του Ω .

Απόδειξη. Έστω $s \in \Omega$. Αφού το Ω είναι ανοιχτό, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $\overline{\Delta}(s, \delta) \subseteq \Omega$. Οι f_n είναι συνεχείς στο Ω , άρα και στον κλειστό δίσκο $\overline{\Delta}(s, \delta)$. Αφού $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στον $\overline{\Delta}(s, \delta)$, έπεται ότι η f είναι συνεχής στον $\overline{\Delta}(s, \delta)$. Ειδικότερα, η f είναι συνεχής στο s . Συμπεραίνουμε έτσι ότι η f είναι συνεχής στο Ω .

Έστω τώρα γ τριγωνική καμπύλη τέτοια ώστε η εικόνα της γ^* καθώς και το εσωτερικό της τρίγωνο $T(\gamma^*)$ να περιέχονται στο Ω . Αφού κάθε f_n είναι αναλυτική στο Ω , για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\int_{\gamma} f_n(s) ds = 0.$$

Αφού $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο συμπαγές σύνολο γ^* , έχουμε

$$\left| \int_{\gamma} f_n(s) ds - \int_{\gamma} f(s) ds \right| \leq \max_{s \in \gamma^*} |f_n(s) - f(s)| \cdot \ell(\gamma) \rightarrow 0,$$

(όπου $\ell(\gamma)$ είναι το μήκος της γ). Συνεπώς,

$$\int_{\gamma} f(s) ds = 0.$$

Αφού η f είναι και συνεχής στο Ω , από το Θεώρημα Morera βλέπουμε ότι η f είναι αναλυτική στο Ω .

Θεωρούμε τώρα ανοικτό δίσκο $\Delta(s_0, \delta_0)$ ώστε $\overline{\Delta}(s_0, \delta_0) \subseteq \Omega$ και έστω $C(s_0, \delta_0)$ η περιφέρεια του δίσκου. Από τον τύπο του Cauchy έχουμε

$$f'_n(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(s_0, \delta_0)} \frac{f_n(z)}{(z-s)^2} dz \quad \text{για κάθε } s \in \Delta(s_0, \delta_0),$$

και

$$f'(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(s_0, \delta_0)} \frac{f(z)}{(z-s)^2} dz \quad \text{για κάθε } s \in \Delta(s_0, \delta_0).$$

Παρατηρούμε ότι αν $s \in \Delta(s_0, \delta_0/2)$, τότε $|z-s| \geq \delta_0/2$ για κάθε $z \in C(s_0, \delta_0)$, άρα

$$|f'_n(s) - f'(s)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{C(s_0, \delta_0)} \frac{|f_n(z) - f(z)|}{|z-s|^2} |dz| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \max_{z \in C(s_0, \delta_0)} |f_n(z) - f(z)| \int_{C(s_0, \delta_0)} \frac{1}{(\delta_0/2)^2} |dz|.$$

Επειδή $\ell(C(s_0, \delta_0)) = 2\pi\delta_0$, παίρνουμε

$$\sup_{s \in \Delta(s_0, \delta_0/2)} |f'_n(s) - f'(s)| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \max_{z \in C(s_0, \delta_0)} |f_n(z) - f(z)| \cdot \frac{2\pi\delta_0}{(\delta_0/2)^2} = \frac{4}{\delta_0} \max_{z \in C(s_0, \delta_0)} |f_n(z) - f(z)| \rightarrow 0$$

καθώς $n \rightarrow \infty$. Έτσι αποδεικνύουμε ότι για κάθε $s_0 \in \Omega$ υπάρχει $\delta_0 = \delta_0(s_0) > 0$ τέτοιο ώστε $f'_n \rightarrow f'$ ομοιόμορφα στον $\Delta(s_0, \delta_0/2)$.

Έστω τώρα K συμπαγές υποσύνολο του Ω . Θεωρώντας την ανοικτή κάλυψη του K από δίσκους $\Delta(s, \delta(s)/2)$, $s \in K$, και περνώντας σε πεπερασμένη υποκάλυψη, βρίσκουμε $s_1, \dots, s_N \in K$ και $\delta_1, \dots, \delta_N > 0$ ώστε

$$K \subseteq \Delta(s_1, \delta_1/2) \cup \dots \cup \Delta(s_N, \delta_N/2),$$

και το $f'_n \rightarrow f'$ ομοιόμορφα σε κάθε έναν από αυτούς τους δίσκους. Αφού το πλήθος των δίσκων είναι πεπερασμένο, συμπεραίνουμε ότι $f'_n \rightarrow f'$ ομοιόμορφα στο K . \square

Θεώρημα 6.9. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ ακολουθία αναλυτικών συναρτήσεων στο Ω . Υποθέτουμε ότι υπάρχει $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ τέτοια ώστε η σειρά $\sum_{n=1}^\infty f_n$ να συγκλίνει στην f ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο K του Ω . Τότε, η f είναι αναλυτική στο Ω και για κάθε συμπαγές $K \subseteq \Omega$ ισχύει ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^\infty f'_n$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο K προς την f' .

Απόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $s_n = f_1 + \dots + f_n$. Κάθε s_n είναι αναλυτική στο Ω και $s_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές $K \subseteq \Omega$. Από το Θεώρημα A.1.1 έπεται ότι η f είναι αναλυτική στο Ω και ότι $s'_n \rightarrow f'$ ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές $K \subseteq \Omega$. Επειδή

$$s'_n = f'_1 + \dots + f'_n,$$

συμπεραίνουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^\infty f'_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο K προς την f' . \square

Θεώρημα 6.10 (Identity theorem). Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και συνεκτικό και $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφη. Αν το σύνολο $\{s \in \Omega : f(s) = 0\}$ έχει σημείο συσσώρευσης μέσα στο Ω , τότε $f \equiv 0$ στο Ω .

Πόρισμα 6.11 (Μοναδικότητα αναλυτικής συνέχισης). Αν f, g είναι ολόμορφες σε ανοικτό, συνεκτικό Ω και συμφωνούν σε σύνολο με σημείο συσσώρευσης στο Ω , τότε $f \equiv g$ στο Ω .

7 Μιγαδικά ολοκληρώματα

7.1 Ορισμός και βασική εκτίμηση

Ορισμός 7.1 (Ολοκλήρωμα κατά μήκος καμπύλης). Έστω $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ τμηματικά C^1 και F συνεχής σε σύνολο που περιέχει την $\gamma([a, b])$. Ορίζουμε

$$\int_{\gamma} F(s) ds := \int_a^b F(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Πρόταση 7.2 (ML-ανισότητα). Αν $|F(s)| \leq M$ πάνω στην καμπύλη γ και $\ell(\gamma)$ είναι το μήκος της, τότε

$$\left| \int_{\gamma} F(s) ds \right| \leq M \ell(\gamma).$$

7.2 Θεώρημα και τύπος Cauchy

Θεώρημα 7.3 (Θεώρημα Cauchy). Αν F είναι ολόμορφη σε ανοικτό σύνολο που περιέχει ένα απλό κλειστό περιγράμμα Γ και το εσωτερικό του, τότε

$$\int_{\Gamma} F(s) ds = 0.$$

Θεώρημα 7.4 (Τύπος Cauchy). Αν F είναι ολόμορφη σε ανοικτό σύνολο που περιέχει τον κλειστό δίσκο $\overline{\Delta}(s_0, r)$, τότε για κάθε $s \in \Delta(s_0, r)$ ισχύει

$$F(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-s_0|=r} \frac{F(w)}{w-s} dw.$$

Πόρισμα 7.5 (Ειδική περίπτωση: «υπόλοιπο στο 0» χωρίς Laurent). Αν H είναι ολόμορφη σε γειτονιά ενός απλού κλειστού περιγράμματος Γ που περιέχει το 0 στο εσωτερικό του, τότε

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{H(s)}{s} ds = H(0).$$

7.3 Παραμόρφωση διαδρομής (homotopy invariance)

Θεώρημα 7.6 (Παραμόρφωση διαδρομής: κλειστές καμπύλες). Έστω F ολόμορφη σε ανοικτό σύνολο $U \subseteq \mathbb{C}$ και Γ_0, Γ_1 δύο τμηματικά C^1 κλειστές καμπύλες που είναι ομοτοπικές μέσα στο U . Τότε

$$\int_{\Gamma_0} F(s) ds = \int_{\Gamma_1} F(s) ds.$$

Παρατήρηση 7.7. Στο Κεφ. 9 αυτό χρησιμοποιείται όταν το integrand περιέχει $g_{\Gamma}(s)$ (που είναι entire), οπότε μπορούμε να παραμορφώσουμε το «αριστερό» κομμάτι μιας καμπύλης σε πιο βολική καμπύλη για εκτιμήσεις. Για το μέρος που περιέχει $g(s)$ (όχι entire), δεν επιτρέπεται γενικά τέτοια παραμόρφωση.

7.4 Ένα μικρό λήμμα συμπαγότητας

Λήμμα 7.8. Έστω $A \subset \mathbb{C}$ συμπαγές και g ολόμορφη σε γειτονιά κάθε σημείου του A (δηλ. για κάθε $a \in A$ υπάρχει $\delta_a > 0$ ώστε g είναι ολόμορφη στο $\Delta(a, \delta_a)$). Τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε g να είναι ολόμορφη σε όλη τη $\{z : \text{dist}(z, A) < \delta\}$.

Απόδειξη. Οι δίσκοι $\Delta(a, \delta_a/2)$ σχηματίζουν ανοικτό κάλυμμα του A . Από συμπαγότητα υπάρχει πεπερασμένο υποκάλυμμα $\Delta(a_j, \delta_{a_j}/2)$, $j = 1, \dots, m$. Θέτουμε $\delta = \min_j \delta_{a_j}/2 > 0$. Αν $\text{dist}(z, A) < \delta$, διάλεξε $a \in A$ με $|z - a| < \delta$. Υπάρχει j με $|a - a_j| < \delta_{a_j}/2$. Τότε $|z - a_j| \leq |z - a| + |a - a_j| < \delta + \delta_{a_j}/2 \leq \delta_{a_j}$, άρα $z \in \Delta(a_j, \delta_{a_j})$ όπου g είναι ολόμορφη. \square

8 Αναλυτικές συναρτήσεις που ορίζονται από ολοκληρώματα

Θεώρημα 8.1 (Ολοκληρωτική ομοιομορφία σε συμπαγή \Rightarrow ολόμορφοτητα). Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και $f : [a, b] \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ τέτοια ώστε:

- για κάθε $x \in [a, b]$, η $s \mapsto f(x, s)$ είναι ολόμορφη στο Ω ,
- για κάθε συμπαγές $K \subseteq \Omega$ υπάρχει $g_K \in L^1([a, b])$ με $|f(x, s)| \leq g_K(x)$ για όλα τα $s \in K$.

Τότε

$$F(s) := \int_a^b f(x, s) dx$$

είναι ολόμορφη στο Ω και επιτρέπεται παραγωγή μέσα στο ολοκλήρωμα:

$$F'(s) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial s} f(x, s) dx.$$