

Διακριτά Μαθηματικά
2^ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Πρόβλημα 1 Τοποθετούμε σε μία σειρά 3 μπλε πιάτα, 3 κόκκινα πιάτα και 2 πράσινα πιάτα. Πιάτα του ίδιου χρώματος θεωρούνται όμοια.

- (α) Πόσες διαφορετικές διατάξεις υπάρχουν;
- (β) Πόσες από τις διατάξεις έχουν κόκκινο πιάτο και στα δύο άκρα της σειράς;
- (γ) Πόσες από τις διατάξεις έχουν όλα τα μπλε πιάτα διαδοχικά (δίπλα-δίπλα);
- (δ) Πόσες από τις διατάξεις δεν έχουν δύο μπλε πιάτα δίπλα-δίπλα;

Πρόβλημα 2 Να βρεθεί το πλήθος όλων των αναγραμματισμών της λέξης PARABOLA με την προϋπόθεση ότι σύμφωνα και φωνήεντα εναλλάσσονται.

Πρόβλημα 3 30 άτομα ψηφίζουν ανάμεσα σε 5 προτάσεις, με κάθε άτομο να ψηφίζει ακριβώς μία πρόταση. Με πόσους τρόπους μπορεί να κατανεμηθεί το πλήθος των (μυστικών) ψήφων στις 5 προτάσεις; (Δύο αποτελέσματα θεωρούνται διαφορετικά αν κάποια πρόταση πάρει διαφορετικό πλήθος ψήφων.)

Πρόβλημα 4 Να βρεθεί το πλήθος των διατεταγμένων τριάδων (a, b, c) ακεραίων που ικανοποιούν

$$0 \leq a \leq b \leq c \leq 11.$$

Πρόβλημα 5 Να βρεθεί το πλήθος των υποσυνόλων $S \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ που δεν περιέχουν δύο διαδοχικά στοιχεία.

Πρόβλημα 6 Να βρεθεί το πλήθος των συμβολοσειρών μήκους n από τα ψηφία $\{0, 1, 2\}$, οι οποίες δεν περιέχουν κανένα από τα υποσύνολα-συμβολοσειρές

$$100, \quad 101, \quad 200, \quad 201.$$

Πρόβλημα 7 Έστω k θετικός ακέραιος. Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε ένα υποσύνολο τριών διαφορετικών αριθμών από το $\{1, 2, \dots, 3k\}$ έτσι ώστε το άθροισμά τους να διαιρείται με 3;

Πρόβλημα 8 Πόσοι n -ψήφιοι αριθμοί έχουν τα ψηφία τους σε μη φθίνουσα σειρά (δηλαδή $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$)¹;

Πρόβλημα 9 Δέκα σημεία είναι σημειωμένα πάνω σε έναν κύκλο. Πόσα διαφορετικά κυρτά πολύγωνα με τουλάχιστον 3 πλευρές μπορούμε να σχηματίσουμε χρησιμοποιώντας μερικά (ή όλα) από τα δέκα σημεία ως κορυφές;

Πρόβλημα 10 Να βρεθεί το πλήθος των συναρτήσεων

$$f : \{1, 2, \dots, 2014\} \rightarrow \{2015, 2016, 2017, 2018\}$$

που ικανοποιούν ότι το άθροισμα $f(1) + f(2) + \dots + f(2014)$ είναι άρτιος αριθμός.

Πρόβλημα 11 Ένα κουπέ τρένου έχει δύο αντικριστές σειρές από 5 θέσεις η καθεμιά (σύνολο 10 θέσεις). Σε κάθε σειρά υπάρχει ακριβώς μία θέση δίπλα στο παράθυρο (στην άκρη της σειράς).

Ταξιδεύουν 9 επιβάτες. Οι 3 από αυτούς θέλουν οπωσδήποτε να κάθονται προς τη μεριά της μηχανής (δηλ. στη σειρά που «κοιτάει» προς τη μηχανή). Οι υπόλοιποι 6 δεν ενδιαφέρονται για την κατεύθυνση: ανάμεσά τους είναι ένα μικρό αγόρι και η μητέρα του. Το αγόρι θέλει να κάθεται δίπλα στο παράθυρο και ακριβώς δίπλα στη μητέρα του (στην ίδια σειρά).

Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν οι επιβάτες ώστε όλοι να είναι ικανοποιημένοι;

Πρόβλημα 12 Με πόσους τρόπους μπορούν να κατανεμηθούν 4 όμοιες μπλε και 6 όμοιες άσπρες μπάλες σε 10 αριθμημένα κουτιά, αν:

- (a) επιτρέπεται κάποια κουτιά να μείνουν άδεια,
- (b) κάθε κουτί πρέπει να πάρει τουλάχιστον μία μπάλα,
- (c) ακριβώς 2 κουτιά πρέπει να μείνουν άδεια;

Παραδίδετε 5 Προβλήματα έως 03-03-2026.

¹π.χ. 122379999 έχει αυτή την ιδιότητα, ενώ 12330 και 13572468 όχι.