

Διακριτά Μαθηματικά

Σημειώσεις από τις Διαλέξεις

Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Κρήτης
Ηράκλειο, 2026

1 Αρχή του Περιστερώνα

Ορισμός 1.1 (Πληθικός αριθμός). Ένα σύνολο S λέγεται πεπερασμένο αν υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ και $f : S \rightarrow \{1, \dots, m\}$ η οποία είναι 1-1 και επί. Ο m λέγεται πληθάριθμος του S και θα τον συμβολίζουμε με $\#S$ ή $|S|$.

Πρόταση 1.2. Έστω $f : A \rightarrow B$, όπου A, B πεπερασμένα σύνολα.

a) Αν η f είναι 1-1, τότε $\#A \leq \#B$.

b) Αν η f είναι επί, τότε $\#A \geq \#B$.

Πόρισμα 1.3 (Αρχή Περιστερώνα). Αν $f : A \rightarrow B$ και $\#A > \#B$, τότε η f δεν είναι 1-1. Άρα υπάρχουν $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$ τέτοια ώστε $f(x_1) = f(x_2)$.

Γενικότερα, ισχύει το παρακάτω.

Πρόταση 1.4. Έστω n, m, r θετικοί ακέραιοι με $n > rm$. Αν βάλουμε n μπάλες σε m κουτιά, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα κουτί με τουλάχιστον $r + 1$ μπάλες.

Εφαρμογή 1. Μεταξύ $m + 1$ ακεραίων, υπάρχουν δύο που η διαφορά τους διαιρείται με m .

Απόδειξη. Έστω $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{m+1}\}$ το σύνολο των ακεραίων. Θεωρούμε τα υπόλοιπα της διαίρεσης του κάθε αριθμού με το m . Τα δυνατά υπόλοιπα είναι το σύνολο $B = \{0, 1, \dots, m-1\}$. Επειδή το πλήθος των αριθμών ($m+1$) είναι μεγαλύτερο από το πλήθος των δυνατών υπολοίπων (m), από την Αρχή του Περιστερώνα υπάρχουν τουλάχιστον δύο αριθμοί a_i, a_j που έχουν το ίδιο υπόλοιπο. Συνεπώς, $a_i \equiv a_j \pmod{m} \Rightarrow a_i - a_j = k \cdot m$, άρα η διαφορά τους διαιρείται με το m . $\square$

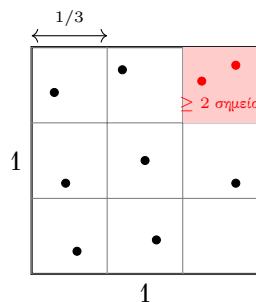
Εφαρμογή 2. Σε μια συνάντηση m ατόμων, υπάρχουν δύο άτομα με το ίδιο πλήθος γνωστών.

Απόδειξη. Έστω m άτομα. Ο αριθμός των γνωστών για κάθε άτομο μπορεί να είναι από 0 έως $m - 1$. Παρατηρούμε ότι δεν γίνεται να υπάρχει ταυτόχρονα άτομο με 0 γνωστούς και άτομο με $m - 1$ γνωστούς (αν κάποιος ξέρει όλους, δεν γίνεται κάποιος να μην ξέρει κανέναν). Άρα, οι δυνατές τιμές για το πλήθος των γνωστών είναι είτε $\{0, 1, \dots, m - 2\}$ είτε $\{1, 2, \dots, m - 1\}$. Σε κάθε περίπτωση, έχουμε m άτομα (περιστέρια) και $m - 1$ δυνατές τιμές πλήθους γνωστών (φωλιές). Από την Αρχή του Περιστερώνα, τουλάχιστον δύο άτομα θα έχουν το ίδιο πλήθος γνωστών. $\square$

Εφαρμογή 3. Δίνονται 10 σημεία στο εσωτερικό τετραγώνου πλευράς 1. Τότε υπάρχουν δύο από αυτά σε απόσταση μικρότερη από 0,48. Επιπλέον, υπάρχουν 3 από αυτά που μπορούν να καλυφθούν από δίσκο ακτίνας $\frac{1}{2}$.

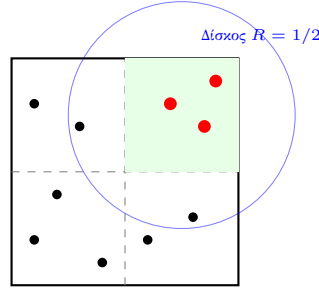
Απόδειξη. Για την απόσταση: Χωρίζουμε το τετράγωνο πλευράς 1 σε $3 \times 3 = 9$ ίσα μικρότερα τετράγωνα πλευράς $1/3$. Επειδή έχουμε 10 σημεία και 9 τετραγωνάκια, από την Αρχή του Περιστερώνα, τουλάχιστον 2 σημεία θα βρεθούν στο ίδιο μικρό τετράγωνο. Η μέγιστη απόσταση (διαγώνιος) μέσα στο μικρό τετράγωνο είναι:

$$d = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3} < 0,48.$$



Σχήμα: 10 σημεία σε 9 τετράγωνα. Ένα κουτί έχει κόκκινο χρώμα και περιέχει 2 σημεία.

Για τον δίσκο ακτίνας $1/2$: Ο δίσκος ακτίνας $1/2$ έχει διάμετρο 1. Ένα τετράγωνο πλευράς 1 μπορεί να καλυφθεί οριακά από κύκλο διαμέτρου $\sqrt{2} \approx 1.41$, οπότε χρειάζεται προσοχή στη διατύπωση. Ωστόσο, μια πιο απλή προσέγγιση για το δεύτερο σκέλος (κάλυψη 3 σημείων). Αν χωρίσουμε το τετράγωνο σε 4 ίσα τετράγωνα πλευράς $1/2$, τότε με 10 σημεία, από την γενικευμένη Αρχή Περιστερών ($\lceil 10/4 \rceil = 3$), θα υπάρχουν τουλάχιστον 3 σημεία στο ίδιο τετράγωνο πλευράς $1/2$.



Χωρίζοντας σε 4 κουτιά, με 10 σημεία, τουλάχιστον ένα έχει $\lceil 10/4 \rceil = 3$ σημεία.

Ένα τετράγωνο πλευράς $1/2$ έχει διαγώνιο $\sqrt{2}/2 \approx 0.707$, άρα καλύπτεται άνετα από δίσκο ακτίνας $1/2$ (που έχει διάμετρο 1). $\square$

Εφαρμογή 4. Τα τελευταία 1000 χρόνια, καθένας μας είχε έναν πρόγονο A , ώστε υπάρχει άτομο P που ήταν πρόγονος και του πατέρα και της μητέρας του A .

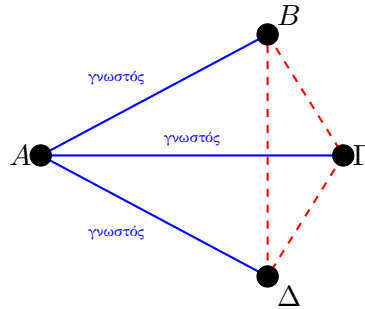
Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι μια γενιά είναι περίπου 30 χρόνια, άρα σε 1000 χρόνια έχουμε περίπου 33 γενιές. Αν όλοι οι πρόγονοι ήταν διαφορετικοί, πριν από n γενιές θα είχαμε 2^n προγόνους. Για $n = 33$, $2^{33} \approx 8.5$ δισεκατομμύρια, αριθμός που υπερβαίνει τον πληθυσμό της Γης εκείνη την εποχή (και σίγουρα τον πληθυσμό της περιοχής καταγωγής). Άρα, αναγκαστικά υπάρχουν επικαλύψεις στο γενεαλογικό δέντρο, δηλαδή άτομα που εμφανίζονται ως πρόγονοι από διαφορετικά κλαδιά (αιμομιξία σε μακρινό βαθμό). $\square$

Εφαρμογή 5. Σε κάθε πεντάγωνο με ακέραιες συντεταγμένες υπάρχει σημείο στο εσωτερικό του ή στην περίμετρό του με ακέραιες συντεταγμένες.

Απόδειξη. Οι συντεταγμένες (x, y) μιας κορυφής μπορεί να είναι (άρτιος, άρτιος), (άρτιος, περιττός), (περιττός, άρτιος) ή (περιττός, περιττός). Υπάρχουν δηλαδή 4 δυνατοί συνδυασμοί. Ένα πεντάγωνο έχει 5 κορυφές. Από την Αρχή του Περιστερώνα, τουλάχιστον δύο κορυφές, έστω $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$, έχουν τον ίδιο συνδυασμό. Τότε, τα αθροίσματα $x_1 + x_2$ και $y_1 + y_2$ είναι άρτιοι αριθμοί. Το μέσον M του τμήματος AB έχει συντεταγμένες $(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$, οι οποίες θα είναι ακέραιοι αριθμοί. $\square$

Εφαρμογή 6. Σε κάθε εξάδα ατόμων μπορούμε να βρούμε είτε τριάδα γνωστών είτε τριάδα αγνώστων.

Απόδειξη. Θεωρούμε ένα άτομο A . Από τα υπόλοιπα 5 άτομα, τουλάχιστον 3 έχουν την ίδια σχέση με το A (Αρχή Περιστερώνα: 5 αντικείμενα, 2 κουτιά). Έστω ότι το A έχει 3 γνωστούς (B, Γ, Δ) .



Αν μία από τις διακεκομμένες ήταν **μπλε**, σχηματίζεται **μπλε τρίγωνο**. Αν όλες παραμένουν **κόκκινες**, σχηματίζεται **κόκκινο τρίγωνο** ($B\Gamma\Delta$).

□

Εφαρμογή 7. Αν πάρουμε 19 αριθμούς από την αριθμητική πρόοδο $1, 4, \dots, 100$, υπάρχουν δύο με άθροισμα 104.

Απόδειξη. Η πρόοδος είναι $a_n = 3n - 2$. Το 100 είναι ο 34ος όρος ($3 \cdot 34 - 2 = 100$). Το σύνολο S έχει 34 στοιχεία. Ζητάμε ζεύγη με άθροισμα 104. Θεωρούμε τα ζεύγη:

$$\{4, 100\}, \{7, 97\}, \dots, \{49, 55\}.$$

Γενικά τα ζεύγη είναι της μορφής $\{k, 104 - k\}$. Επίσης, παρατηρούμε ότι από τους 34 αριθμούς της προόδου:

- Ο αριθμός 1 δεν έχει ταίρι στο σύνολο (θα ήθελε το 103).
- Ο αριθμός 52 δεν έχει ταίρι (θα ήθελε το 52, αλλά παίρνουμε διακριτούς αριθμούς).

Τα υπόλοιπα 32 νοούμερα σχηματίζουν 16 ζεύγη με άθροισμα 104.

Δημιουργούμε τις "φωλιές" ως εξής: 16 φωλιές για τα ζεύγη, 1 φωλιά για το $\{1\}$ και 1 φωλιά για το $\{52\}$. Σύνολο 18 φωλιές. Επιλέγουμε 19 αριθμούς (περιστέρια). Από την Αρχή του Περιστερώνα, θα επιλεγούν αναγκαστικά και οι δύο αριθμοί από τουλάχιστον μία φωλιά ζεύγους (αφού οι φωλιές των μονών αριθμών χωράνε μόνο 1). Άρα θα έχουμε άθροισμα 104. □

2 Βασικές Αρχές Απαρίθμησης

Προσθετική Αρχή

Αν $A_1, \dots, A_n$ πεπερασμένα ξένα ανά δύο, τότε:

$$\# \bigcup_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^n \# A_i$$

Πολλαπλασιαστική Αρχή

Έστω ότι μια διαδικασία μπορεί να χωριστεί σε k διαδοχικά στάδια. Αν το 1ο στάδιο μπορεί να ολοκληρωθεί με n_1 τρόπους, το 2ο στάδιο με n_2 τρόπους, ..., και το k -οστό στάδιο με n_k τρόπους, τότε το πλήθος των συνολικών τρόπων με τους οποίους μπορεί να πραγματοποιηθεί η διαδικασία είναι:

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k.$$

Εφαρμογή 8. Ένα εστιατόριο προσφέρει 3 είδη ορεκτικών, 5 κυρίως πιάτα και 2 επιδόρπια. Με πόσους τρόπους μπορεί ένας πελάτης να σχηματίσει ένα πλήρες γεύμα;

Απόδειξη. Σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή, έχουμε 3 στάδια επιλογής:

- 1ο στάδιο (Ορεκτικό): $n_1 = 3$ επιλογές
- 2ο στάδιο (Κυρίως): $n_2 = 5$ επιλογές
- 3ο στάδιο (Επιδόρπιο): $n_3 = 2$ επιλογές

Το συνολικό πλήθος των διαφορετικών γευμάτων είναι:

$$3 \cdot 5 \cdot 2 = 30 \text{ τρόποι.}$$

□

Πρόταση 2.1. Αν $A_1, A_2, \dots, A_k$ είναι πεπερασμένα σύνολα, τότε ο πληθικός αριθμός του καρτεσιανού γινομένου τους είναι το γινόμενο των πληθικών τους αριθμών:

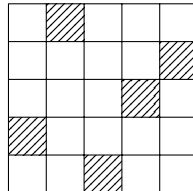
$$\#(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k) = \#A_1 \cdot \#A_2 \cdot \dots \cdot \#A_k$$

Με πόσους τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν n όμοια πιόνια σε μια $n \times n$ σκακιέρα μη αλληλεπιδρώμενα (να μην απειλεί το ένα το άλλο, δηλαδή σε διαφορετικές γραμμές και στήλες);
Απάντηση: $n!$. (Η n πύργοι).

Ερώτηση: Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε ένα μαύρο και ένα άσπρο πιόνι αν δεν θέλουμε να είναι σε ίδια γραμμή ή στήλη (σε σκακιέρα 8×8);

Απάντηση: Το πλήθος των αναδιατάξεων είναι $n!$. Ίδιο με τις μη αλληλεπιδρώμενες.

Συγκεκριμένα για την επιλογή 2 πιονιών: Το πρώτο μπαίνει σε 64 θέσεις. Το δεύτερο έχει αποκλειστεί από 1 γραμμή και 1 στήλη (15 θέσεις), άρα $64 - 15 = 49$. 64×49 . (Σημείωση: Το κείμενο αναφέρεται γενικά σε αναδιατάξεις $n!$, πιθανώς αναφερόμενο στην τοποθέτηση n πύργων).



Σχήμα: Αντιστοιχία πλέγματος με μετάθεση $(2, 5, 1, 3, 4)$.

Άσκηση 1. Θέτουμε

$$X = \{1, 2, \dots, 200\}$$

και ορίζουμε το σύνολο

$$S = \{(a, b, c) \in X^3 : a < b \text{ και } a < c\}.$$

Πόσα στοιχεία έχει το S ;

Απόδειξη. Η συνθήκη $a < b$ και $a < c$ σημαίνει ότι το a είναι αυστηρά μικρότερο από και το b και το c . Παρατηρούμε πρώτα ότι δεν μπορεί να είναι $a = 200$, διότι τότε δεν υπάρχει κανένα $b \in X$ με $b > 200$, ούτε κανένα $c \in X$ με $c > 200$. Άρα αναγκαστικά

$$a \in \{1, 2, \dots, 199\}.$$

Θα διασπάσουμε το S σε ξένα μεταξύ τους υποσύνολα, ανάλογα με την τιμή του a . Για κάθε $k \in \{1, 2, \dots, 199\}$ ορίζουμε

$$A_k = \{(a, b, c) \in S : a = k\}.$$

Τότε τα A_k είναι ξένα ανά δύο και

$$S = \bigsqcup_{k=1}^{199} A_k \implies |S| = \sum_{k=1}^{199} |A_k|$$

(αρχή πρόσθεσης).

Σταθεροποιούμε τώρα το $a = k$. Τότε η ανισότητα $a < b$ ισοδυναμεί με $b \in \{k+1, k+2, \dots, 200\}$, άρα υπάρχουν $200 - k$ επιλογές για το b . Ομοίως, από $a < c$ έχουμε $c \in \{k+1, k+2, \dots, 200\}$, άρα υπάρχουν $200 - k$ επιλογές και για το c . Οι επιλογές του b και του c είναι ανεξάρτητες (δεν υπάρχει περιορισμός μεταξύ τους· επιτρέπεται ακόμη και $b = c$), οπότε

$$|A_k| = (200 - k)(200 - k) = (200 - k)^2.$$

Άρα

$$|S| = \sum_{k=1}^{199} (200 - k)^2.$$

Θέτοντας $m = 200 - k$, όταν $k = 1$ παίρνουμε $m = 199$ και όταν $k = 199$ παίρνουμε $m = 1$, άρα

$$|S| = \sum_{m=1}^{199} m^2.$$

Χρησιμοποιούμε τον γνωστό τύπο

$$\sum_{m=1}^n m^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

με $n = 199$, και βρίσκουμε

$$|S| = \frac{199 \cdot 200 \cdot 399}{6} = \frac{15,880,200}{6} = 2,646,700.$$

Άρα το σύνολο S έχει 2,646,700 στοιχεία. □

Άσκηση 2. Πόσοι θετικοί ακέραιοι τετραψήφιοι αριθμοί έχουν τουλάχιστον ένα ψηφίο που είναι 2 ή 3;

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε την αρχή του συμπληρώματος.

Βήμα 1: Μετράμε όλους τους τετραψήφιους θετικούς ακεραίους. Ένας τετραψήφιος αριθμός έχει μορφή $\overline{abcd}$, όπου $a \in \{1, 2, \dots, 9\}$ και $b, c, d \in \{0, 1, \dots, 9\}$. Άρα ο συνολικός αριθμός τετραψήφιων θετικών ακεραίων είναι

$$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000.$$

Βήμα 2: Μετράμε πόσοι δεν έχουν κανένα ψηφίο ίσο με 2 ή 3. Δηλαδή, θέλουμε τετραψήφιους $\overline{abcd}$ τέτοιους ώστε

$$a \notin \{2, 3\}, \quad b \notin \{2, 3\}, \quad c \notin \{2, 3\}, \quad d \notin \{2, 3\}.$$

Για το πρώτο ψηφίο a επιτρέπονται οι τιμές 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, δηλαδή 7 επιλογές. Για καθένα από τα b, c, d επιτρέπονται όλα τα ψηφία 0, 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, δηλαδή 8 επιλογές (αφαιρούμε τα 2 και 3 από τα 10 ψηφία).

Επομένως, ο αριθμός των τετραψήφιων που δεν περιέχουν κανένα 2 ή 3 είναι

$$7 \cdot 8^3 = 7 \cdot 512 = 3584.$$

Βήμα 3: Αφαιρούμε από το σύνολο. Άρα οι τετραψήφιοι που έχουν τουλάχιστον ένα ψηφίο ίσο με 2 ή 3 είναι

$$9000 - 3584 = 5416.$$

Συνεπώς, η απάντηση είναι 5416.

□

Άσκηση 3. Έστω $n \geq 2$ θετικός ακέραιος με

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k},$$

όπου $p_1, \dots, p_k$ είναι διαφορετικοί πρώτοι αριθμοί και $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ θετικοί ακέραιοι. Πόσους θετικούς διαιρέτες έχει ο n ;

Απόδειξη. Θυμίζουμε ότι ένας θετικός ακέραιος d λέγεται διαιρέτης του n αν και μόνο αν $d \mid n$, δηλαδή αν υπάρχει ακέραιος q ώστε $n = dq$.

Ιδέα: Κάθε διαιρέτης d του n προκύπτει επιλέγοντας πόσες φορές θα εμφανίζεται κάθε πρώτος p_i στον d , με εκθέτη από 0 μέχρι α_i .

Ακριβέστερα: Έστω d θετικός διαιρέτης του n . Στην πρώιμη παραγοντοποίηση του d μπορούν να εμφανίζονται μόνο οι πρώτοι $p_1, \dots, p_k$ (αφού αν κάποιος άλλος πρώτος r διαιρούσε το d , τότε θα διαιρούσε και το n , άτοπο). Άρα ο d γράφεται μοναδικά στη μορφή

$$d = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}$$

με $\beta_i \geq 0$ ακέραιους.

Επειδή $d \mid n$, για κάθε i πρέπει να ισχύει $\beta_i \leq \alpha_i$: αν είχαμε $\beta_i > \alpha_i$, τότε ο $p_i^{\beta_i}$ θα διαιρούσε τον d και άρα και τον n , όμως αυτό είναι αδύνατο αφού στον n ο p_i εμφανίζεται μόνο με δύναμη α_i . Συνεπώς

$$0 \leq \beta_i \leq \alpha_i \quad \text{για κάθε } i = 1, 2, \dots, k.$$

Μετράμε τις επιλογές:

- Για τον β_1 έχουμε $\alpha_1 + 1$ επιλογές: $0, 1, 2, \dots, \alpha_1$.
- Για τον β_2 έχουμε $\alpha_2 + 1$ επιλογές: $0, 1, 2, \dots, \alpha_2$.
- ...
- Για τον β_k έχουμε $\alpha_k + 1$ επιλογές.

Οι επιλογές αυτές είναι ανεξάρτητες, άρα από τον κανόνα του γινομένου ο συνολικός αριθμός δυνατών k -άδων $(\beta_1, \dots, \beta_k)$ (και άρα διαιρετών d) είναι

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1).$$

Άρα ο n έχει ακριβώς

$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$

θετικών διαιρέτες.

Παράδειγμα: Για $n = 20$ έχουμε $20 = 2^2 \cdot 5^1$. Άρα το πλήθος των διαιρετών είναι $(2+1)(1+1) = 6$. Πράγματι οι θετικοί διαιρέτες είναι

$$1, 2, 4, 5, 10, 20.$$

□

Τέσσερις εκδοχές για παγωτά

Υποθέτουμε ότι υπάρχουν n διαθέσιμες γεύσεις και θέλουμε να φτιάξουμε επιλογές με k μπάλες.

- **Χωνάκι:** οι μπάλες έχουν σειρά (άρα οι διατάξεις διακρίνονται).
- **κυπελλάκι:** η σειρά δεν έχει σημασία (άρα μετράμε σύνολα/πολυσύνολα γεύσεων).

1) (Opening Day) Χωνάκι, επιτρέπονται επαναλήψεις

Άσκηση 4. Πόσα διαφορετικά χωνάκια με k μπάλες μπορούν να φτιαχτούν από n γεύσεις, αν επιτρέπονται επαναλήψεις (δηλ. μπορεί να επιλεγεί η ίδια γεύση πολλές φορές) και η σειρά των μπαλών στο χωνάκι μετράει;

Απόδειξη. Για κάθε μία από τις k θέσεις επιλέγουμε μία από τις n γεύσεις, ανεξάρτητα. Άρα, με τον κανόνα του γινομένου,

$$\underbrace{n \cdot n \cdots n}_{k \text{ φορές}} = n^k.$$

□

2) (Second Day) Χωνάκι, δεν επιτρέπονται επαναλήψεις

Άσκηση 5. Πόσα διαφορετικά χωνάκια με k μπάλες μπορούν να φτιαχτούν από n γεύσεις, αν δεν επιτρέπονται επαναλήψεις (κάθε γεύση το πολύ μία φορά) και η σειρά των μπαλών στο χωνάκι μετράει; (Υποθέτουμε $k \leq n$.)

Απόδειξη. Για την 1η θέση έχουμε n επιλογές, για τη 2η $n - 1$, ..., για την k -οστή $n - k + 1$. Άρα

$$n(n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

□

Ημέρα 3: αδιάκριτες μπάλες (δεν έχει σημασία η σειρά), δεν επιτρέπονται επαναλήψεις γεύσης

Υστερα από δύο μέρες συνεχούς εξυπηρέτησης με χωνάκια, οι υπάλληλοι χρειάζονται ένα διάλειμμα. Την 3η μέρα κρατάμε τον περιορισμό «καμία γεύση πάνω από μία φορά», αλλά αντικαθιστούμε τα χωνάκια με κυπελλάκια. Τα κυπελλάκια είναι αρκετά μεγάλα ώστε η σειρά των μπαλών να μην έχει σημασία: ένα κυπελλάκι με chocolate και vanilla μετράει μία φορά, ανεξάρτητα από το ποια γεύση “είναι από πάνω”. Με αυτούς τους κανόνες, πόσα διαφορετικά κυπελλάκια των k μπαλών υπάρχουν;

Απόδειξη. Θα συμβολίσουμε την απάντηση με $\binom{n}{k}$ (διαβάζεται « n choose k »): δηλαδή $\binom{n}{k}$ είναι ο αριθμός των διαφορετικών κυπελλακίων που παίρνουμε διαλέγοντας k μπάλες από n γεύσεις, χωρίς να επαναλαμβάνεται γεύση.

Θυμόμαστε την Ημέρα 2: εκεί δεν επιτρέπαμε επαναλήψεις αλλά η σειρά μετρούσε, οπότε είχαμε συνολικά

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

διαφορετικά χωνάκια.

Τώρα, πάρε ένα συγκεκριμένο κυπελλάκι με k μπάλες, όλες διαφορετικών γεύσεων. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να βάλουμε αυτές τις k μπάλες σε χωνάκι (όπου η σειρά μετράει); Αυτό είναι απλώς μια μετάθεση των k διακριτών γεύσεων, άρα υπάρχουν $k!$ τρόποι.

Άρα: (α) πρώτα διαλέγουμε το κυπελλάκι (δηλ. το σύνολο των k γεύσεων) με $\binom{n}{k}$ τρόπους και (β) μετά διατάσσουμε τις k γεύσεις στο χωνάκι με $k!$ τρόπους. Επομένως

$$\binom{n}{k} \cdot k! = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Άρα

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Το $\binom{n}{k}$ ονομάζεται διωνυμικός συντελεστής. □

Ημέρα 4: αδιάκριτες μπάλες (δεν έχει σημασία η σειρά), επιτρέπονται επαναλήψεις γεύσης

Την τελευταία μέρα, το κατάστημα αφαιρεί τον περιορισμό και επιτρέπει να πάρουμε όσες μπάλες θέλουμε από μια γεύση. Υπάρχουν ακόμα n γεύσεις. Πόσα k -μπάλα κυπελλάκια υπάρχουν;

Είναι δελεαστικό να σκεφτούμε «από την Ημέρα 1 είχαμε n^k χωνάκια και τώρα δεν μας νοιάζει η σειρά, άρα να διαιρέσουμε με $k!$ ». Όμως αυτό είναι λάθος: το $k!$ μετράει διατάξεις διαφορετικών αντικειμένων. Αν υπάρχουν επαναλήψεις, δεν αντιστοιχούν $k!$ διαφορετικά χωνάκια στην ίδια επιλογή γεύσεων (π.χ. όταν όλες οι μπάλες είναι ίδια γεύση, υπάρχει μόνο ένα χωνάκι, άρα η διαίρεση με $k!$ δεν βγάζει νόημα).

Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο *αστέρια και μπάρες* (stars and bars). Χρησιμοποιούμε k αστέρια, κάθε ένα αντιστοιχεί σε μία μπάλα παγωτού, και $n-1$ μπάρες ως διαχωριστικά ανάμεσα στις γεύσεις. Όσα αστέρια εμφανίζονται πριν από την 1η μπάρα είναι μπάλες της 1ης γεύσης, όσα είναι ανάμεσα στην 1η και 2η μπάρα είναι της 2ης, κ.ο.κ. Έτσι επιτρέπεται και «πολλές μπάλες της ίδιας γεύσης» (πολλά αστέρια ανάμεσα σε δύο μπάρες) και «καμία μπάλα μιας γεύσης» (δύο μπάρες κολλητά).

Παράδειγμα: για 3 γεύσεις coffee, mint chip, chocolate και $k = 5$, το κυπελλάκι με 2 coffee, 2 mint chip, 1 chocolate γράφεται ως

$$\underbrace{**}_{\text{coffee}} \mid \underbrace{**}_{\text{mintchip}} \mid \underbrace{*}_{\text{chocolate}}.$$

Δύο μπάρες αρκούν για 3 γεύσεις.

Για παράδειγμα, τα διαγράμματα

$$**** \mid ** \mid *** \quad \text{και} \quad * \mid \mid **$$

αντιστοιχούν αντίστοιχα σε

$$\underbrace{***}_{\text{coffee}} \mid \underbrace{**}_{\text{mintchip}} \mid \underbrace{***}_{\text{chocolate}} \quad \text{και} \quad \underbrace{*}_{\text{coffee}} \mid \underbrace{}_{\text{mintchip}} \mid \underbrace{**}_{\text{chocolate}},$$

δηλαδή στο πρώτο έχουμε 4 μπάλες coffee, 2 mint chip, 3 chocolate, ενώ στο δεύτερο 1 coffee, 0 mint chip, 2 chocolate.

Γενικά, για να χωρίσουμε σε n περιοχές (γεύσεις) χρειαζόμαστε $n-1$ μπάρες και για k μπάλες χρειαζόμαστε k αστέρια. Άρα έχουμε συνολικά $n+k-1$ θέσεις που θα γεμίσουν με k αστέρια και $n-1$ μπάρες. Επιλέγουμε ποιες k από αυτές τις $n+k-1$ θέσεις θα καταληφθούν από αστέρια (τα αστέρια είναι όμοια, άρα η σειρά δεν μετράει), οπότε έχουμε

$$\binom{n+k-1}{k}$$

διαφορετικές διατάξεις αστεριών και μπαρών. Κάθε τέτοια διάταξη αντιστοιχεί μοναδικά σε ένα κυπελλάκι, και αντίστροφα. Άρα ο αριθμός των k -μπαλων κυπελλακίων, όταν επιτρέπονται επαναλήψεις γεύσης, είναι

$$\boxed{\binom{n+k-1}{k}}.$$

Άσκηση 6. Έχουμε 3 γεύσεις παγωτού: βανίλια, σοκολάτα και φράουλα. Θέλουμε να φτιάξουμε ένα χωνάκι με συνολικά k μπάλες, έτσι ώστε

v μπάλες να είναι βανίλια, c μπάλες να είναι σοκολάτα, s μπάλες να είναι φράουλα,

όπου $v, c, s \geq 0$ και $v + c + s = k$. Πόσα διαφορετικά χωνάκια υπάρχουν (δηλαδή πόσες διαφορετικές σειρές γεύσεων μήκους k με αυτές τις πληθικότητες);

Απόδειξη. Οι k μπάλες στο χωνάκι έχουν θέσεις (κάτω–πάνω), άρα η σειρά μετράει. Θα επιλέξουμε σε ποιες θέσεις μπαίνει κάθε γεύση.

Πρώτα διαλέγουμε ποιες v από τις k θέσεις θα είναι βανίλια: αυτό γίνεται με

$$\binom{k}{v}$$

τρόπους.

Απομένουν $k - v$ θέσεις. Από αυτές διαλέγουμε ποιες c θα είναι σοκολάτα: αυτό γίνεται με

$$\binom{k-v}{c}$$

τρόπους.

Οι υπόλοιπες θέσεις είναι αναγκαστικά φράουλα, και είναι

$$k - v - c = s$$

θέσεις.

Άρα, με τον κανόνα του γινομένου,

$$\binom{k}{v} \binom{k-v}{c} = \frac{k!}{v!(k-v)!} \cdot \frac{(k-v)!}{c!s!} = \frac{k!}{v!c!s!}.$$

Επομένως ο αριθμός των χωνάκων είναι

$$\boxed{\frac{k!}{v!c!s!}}.$$

□