

Διακριτά Μαθηματικά
1ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Πρόβλημα 1 Ένα πολυσύχναστο αεροδρόμιο έχει 1500 απογειώσεις την ημέρα. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δύο αεροπλάνα που αναγκαστικά απογειώνονται μέσα σε χρονικό διάστημα μικρότερο του ενός λεπτού.

Πρόβλημα 2 Διαλέγουμε 129 σημεία μέσα σε ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς 100. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν τρία από τα επιλεγμένα σημεία που σχηματίζουν τρίγωνο εμβαδού το πολύ 68.

Πρόβλημα 3 Χρωματίζουμε όλα τα σημεία του $\mathbb{R}^2$ με ακέραιες συντεταγμένες (δηλαδή όλα τα $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$) με ένα από 6 χρώματα. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ορθογώνιο με κορυφές σε σημεία του $\mathbb{Z}^2$ του οποίου και οι 4 κορυφές είναι του ίδιου χρώματος (μονοχρωματικό ορθογώνιο). Μπορούμε να κάνουμε την πρόταση ισχυρότερη, επιβάλλοντας περιορισμό στο μέγεθος ενός τέτοιου μονοχρωματικού ορθογωνίου;

Πρόβλημα 4 (i) Πόσες συναρτήσεις υπάρχουν από $[n]$ προς $[n]$ που δεν είναι 1-1;

(ii) Να αποδείξετε ότι το πλήθος των υποσυνόλων του $[n]$ που έχουν περιττό πλήθος στοιχείων είναι 2^{n-1} .

Πρόβλημα 5 (i) Μια εταιρεία έχει 20 υπαλλήλους: 12 άνδρες και 8 γυναίκες. Πόσες επιτροπές 5 ατόμων υπάρχουν που περιέχουν τουλάχιστον έναν άνδρα και τουλάχιστον μία γυναίκα;

(ii) Σε ένα πρωτάθλημα στίβου συμμετέχουν 49 χώρες. Η σημαία κάθε χώρας έχει 3 οριζόντιες λωρίδες διαφορετικών χρωμάτων. Κανένα χρώμα εκτός από κόκκινο, λευκό, μπλε, πράσινο δεν χρησιμοποιείται. Είναι αλήθεια ότι υπάρχουν 3 χώρες με πανομοιότυπες σημαίες;

Πρόβλημα 6 Μια αντιπροσωπεία αυτοκινήτων απασχολεί 5 πωλητές. Κάθε πωλητής παίρνει μπόνους 100 δολάρια για κάθε αυτοκίνητο που πουλάει. Χθες πουλήθηκαν συνολικά 7 αυτοκίνητα. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους θα μπορούσε να έχει συμβεί αυτό; (Θεωρούμε δύο σενάρια διαφορετικά αν οδηγούν σε διαφορετικές πληρωμές μπόνους.)

Πρόβλημα 7 Πόσοι θετικοί ακέραιοι 6-ψήφιοι υπάρχουν των οποίων το άθροισμα των ψηφίων είναι το πολύ 51;

Πρόβλημα 8 Από μια τάξη 30 μαθητών, πόσοι τρόποι υπάρχουν να επιλέξουμε μια ποδοσφαιρική ομάδα 11 ατόμων και μια μπασκετική ομάδα 5 ατόμων αν:

(i) κανείς δεν επιτρέπεται να είναι και στις δύο ομάδες,

(ii) επιτρέπεται οποιοσδήποτε αριθμός κοινών μελών,

(iii) το πολύ ένα άτομο επιτρέπεται να είναι και στις δύο ομάδες;

Πρόβλημα 9 Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε 7 πύργους σε μια σκακιέρα 8×8 , ώστε να μην αλληλεπιδρούν;

Πρόβλημα 10 Πόσα n -στοιχεία υποσύνολα $S \subseteq [2n]$ υπάρχουν ώστε να μην υπάρχουν δύο στοιχεία $x, y \in S$ με $x + y = 2n + 1$;

Πρόβλημα 11 Μια οικοδέσποινα καλεί n ζευγάρια σε ένα πάρτι (άρα $2n$ καλεσμένους). Θέλει να ζητήσει από ένα υποσύνολο των $2n$ καλεσμένων να βγάλουν λόγο, αλλά δεν θέλει να ζητήσει και από τα δύο μέλη οποιουδήποτε ζευγαριού να μιλήσουν. Με πόσους τρόπους μπορεί να το κάνει;

Πρόβλημα 12 Πόσοι πίνακες $n \times n$ με στοιχεία 0 ή 1 υπάρχουν, ώστε κάθε γραμμή και κάθε στήλη να έχουν άρτιο άθροισμα;

Παραδίδετε 5 Προβλήματα έως 24-02-2026.